Cours sur les Produits et les Stratégies de Taux

Frédéric Leroy

Cannes (France), Mars 2013

Cours sur les Produits et les Stratégies de Taux

par Frédéric Leroy

Ce polycopié a été entièrement rédigé sous le logiciel LYX (http://www.lyx.org) et intègre des graphiques créés à l'aide de TikZ/PGF (http://sourceforge.net/projects/pgf/).

Première édition, Mars 2013.

Table des matières

Remerciements **11**

Avertissement **12**

Introduction **13**

1 Couvertures Factorielles Zéro-Coupon **17**

1.1 Couverture Mono-Factorielle 17

1.1.1 Zéro-Coupon (Rappels) 17

1.1.2 Couverture Mono-Factorielle 19

1.2 Couvertures Multi-Factorielles 21

1.2.1 Modèle de Vasicek : Aspects Formels 22

1.2.2 Modèle de Vasicek : Validation Empirique 24

1.2.3 Couvertures Multi-Factorielles 26

1.3 Couvertures « VaR Best Hedge » 27

1.3.1 Introduction au VaR Paramétrique 28

1.3.2 « VaR Best Hedge » : Notations et Définitions 30

1.3.3 « VaR Best Hedge » : Aspects Formels 31

1.3.4 « VaR Best Hedge » vs Couverture Multi-Factorielle 34

1.4 Couverture par « Time Bucket » 35

1.4.1 « Barbellisation » d'un Zéro-Coupon (Cashflow) 36

1.4.2 Barbellisation et Agrégation de l'Echéancier 36

1.4.3 Couverture : Méthode du Bootstrap 37

1.4.4 Remarques et Prolongements 39

2 Prêt-Emprunts, Forward-Forwards & FRAs **40**

2.1 Marché Monétaire, Prêt/Emprunt et Conventions 40

2.1.1 Le Marché Monétaire 40

2.1.2 Structure d'un Prêt/Emprunt 42

2.1.3 Conventions 44

2.1.3.1 Conventions de Calcul des Durées 44
2.1.3.2 Conventions de Taux 45
2.2 Valorisation, Pricing & Risques 47
2.2.1 Valorisation vs Pricing 47
2.2.2 Valorisation : Latent & Réalisé 48
2.2.3 Typologie des Risques et Risque de Taux 50
2.3 Forward-Forward et Taux Forward 52
2.3.1 Montage et Calcul 52
2.3.2 Propriétés Remarquables des Taux Forwards 53
2.4 Forward Rate Agreement 56
2.4.1 Définition d'un FRA 56
2.4.2 Valorisation d'un FRA 57
2.4.3 Pricing d'un FRA 58
2.5 Arbitrage FRA vs Forward-Forward 58
2.5.1 Equivalence FRA/Forward-Forward 58
2.5.2 Arbitrage FRA/Forward-Forward 59

3 Pricing & Trading Obligataire 62
3.1 Généralités sur les Obligations 62
3.1.1 Structure d'une Obligation à Taux Fixe « In Fine » 62
3.1.2 Taux de Rendement Actuariel 64
3.1.3 Duration et Immunisation 66
3.1.4 Couverture en Sensibilité Actuarielle 68
3.1.5 Typologie et Correspondances des Taux 69
3.2 Calcul des Taux Zéro-Coupon 70
3.2.1 Description du Problème 70
3.2.2 Méthode Directe 72
3.2.2.1 Cas des Obligations au Pair 72
3.2.2.2 Cas général 74
3.2.3 Méthode Indirecte 75
3.2.4 Méthode Directe vs Indirecte : Comparatif 77
3.3 Relative Value Trading 79
3.3.1 Le Marché des Repos 79
3.3.2 Méthodologie et Stratégies 80
3.3.2.1 Méthodologie de Pricing Zéro-Coupon 80
3.3.2.2 Relative Value Trading 81
3.3.2.3 Repo Trades 82
3.3.3 Facteurs Exogènes et Limitations 84

4 Barbells : Concepts et Stratégies **86**
4.1 Analyse des Positions Obligataires 86
4.1.1 Calcul des « greeks » d'une Position Obligataire 86
4.1.2 Calcul des « greeks » d'un Portefeuille Obligataire 90
4.1.2.1 Calculs Non-Linéaires/Exacts 90
4.1.2.2 Calculs Linéaires/Approchés 91
4.1.3 Analyse d'une Position Obligataire 92
4.1.3.1 Approche Analytique (« Greeks ») 93
4.1.3.2 Approche Synthétique (« Taux Forward ») 94
4.2 Généralités sur les Barbells Obligataires 95
4.2.1 Barbell vs Bullet Obligataire (Butterfly) 95
4.2.2 Analyse du P/L d'une Stratégie de Butterfly 98
4.2.3 Biais de Convexité 99
4.3 Les Barbells Obligataires en Pratique 101
4.3.1 Barbells de type « Cash-neutral » 102
4.3.2 Barbells de Type « Twist-neutral » 103
4.3.3 Les Stratégies de Butterfly en Pratique 106

5 Swap de Taux et Asset-Swap Gov/Corp **109**
5.1 Swap de Taux : Généralités 109
5.1.1 Généralités sur les Swap 109
5.1.2 Swap de Taux : Principe et Structure 111
5.1.3 Swap de Taux : Intérêt et Utilisation 113
5.1.4 Swap de Taux : Négociation et Cotation 115
5.2 Swap de Taux : Valorisation et Pricing 117
5.2.1 Valorisation d'un Swap de Taux 117
5.2.1.1 Méthode Générale de Valorisation 118
5.2.1.2 Valorisation par Projection des Taux Forwards 118
5.2.1.3 Valorisation par Arbitrage (FRN) 120
5.2.2 Pricing des Swap de Taux (Spot et Forward) 121
5.2.2.1 Pricing des Swaps à Départ Spot 122
5.2.2.2 Pricing des Swaps à Départ Différé 122
5.3 Asset-Swap Gov/Corp 124
5.3.1 Asset-Swap « Non Structuré » 124
5.3.2 Asset-Swap « Structuré » 125
5.3.3 Valorisation, Risques et Financement 128
5.3.4 Hiérarchie et Dynamique des Courbes de Taux 130

6 Contrats Futures CT vs FRAs 132

6.1 Contrats Futures Court Terme . . . 132

6.1.1 Description . . . 132

6.1.2 Analyse du Risque de Corrélation . . . 135

6.1.3 Le Contrat Futures Euribor 3M (Liffe) . . . 138

6.2 Arbitrage Contrat Futures CT vs FRAs . . . 140

6.2.1 Comparatif Contrat Futures CT vs FRAs . . . 141

6.2.2 Calcul du Hedge Ratio . . . 142

6.2.3 Analyse du P/L Intraday de la Position . . . 145

6.3 Biais de Convexité . . . 147

6.3.1 Analyse du Biais de Convexité . . . 147

6.3.2 Pricing du Biais de Convexité . . . 149

6.3.2.1 Heuristique de Calcul du Biais de Convexité . . . 150

6.3.2.2 Prime de Convexité = Prime d'un Straddle . . . 151

6.3.3 Application - Pricing des Swaps de Taux . . . 152

7 Contrats Futures LT vs Cash 155

7.1 Contrats Futures Long Terme . . . 155

7.1.1 Généralités . . . 155

7.1.2 Descriptif du Mécanisme de Livraison . . . 157

7.1.3 Le Contrat Euro-BUND (Eurex) . . . 160

7.2 Arbitrage Cash vs Futures LT . . . 162

7.2.1 Arbitrage « Cash & Carry » Simplifié . . . 162

7.2.2 Arbitrage « Cash & Carry » . . . 164

7.2.2.1 Le titre n°i est CTD en T_1 . . . 164

7.2.2.2 Le titre n°i n'est pas CTD en T_1 . . . 166

7.2.3 Arbitrage « Reverse Cash & Carry » . . . 167

7.2.3.1 Le titre n°i est CTD en T_1 . . . 167

7.2.3.2 Le titre n°i n'est pas CTD en T_1 . . . 167

7.2.4 Taux Repo Implicite . . . 168

7.3 Analyse de la Base . . . 170

7.3.1 Analyse des Options de Changement de CTD . . . 171

7.3.2 Pricing des Options de Changement de CTD . . . 173

7.3.3 Couverture par des Contrats Futures LT . . . 176

8 MBS Arbitrage 179

8.1 MBS Pass-Through . . . 179

8.1.1 Les Crédits Hypothécaires US . . . 180

8.1.2 Titrisation de Prêts Hypothécaires . . . 182

8.1.3 Projection des Cashflows . . . 184

8.1.4 Spread MBS vs UST : Analyse Statique . . . 186

8.2 Analyse du Risque de Prépaiement . . . 189

8.2.1 Prepaiement : Conventions et Calcul . . . 190

8.2.2 Impact du Prépaiement sur le Taux Actuariel . . . 193

8.2.3 Prepaiement : Analyse et Modélisation . . . 195

8.3 Pricing et Arbitrage . . . 197

8.3.1 Calcul de l'Option Adjusted Spread d'un MBS . . . 197

8.3.2 Calcul des Indicateurs de Risques . . . 199

8.3.3 Techniques d'Arbitrages . . . 201

9 CDS vs Asset-Swap Arbitrage 204

9.1 Risque et Probabilité de Défaut . . . 204

9.1.1 Analyse Economique du Risque de Défaut . . . 204

9.1.1.1 Cas d'une Entreprise Industrielle ou Commerciale . . . 205

9.1.1.2 Cas d'un Etat . . . 206

9.1.2 Généralités sur le Calcul des Probabilités de Défaut . . . 207

9.1.3 Méthode de Jarrow-Turnbull . . . 208

9.2 Credit Default Swap . . . 213

9.2.1 Définition des CDS . . . 213

9.2.2 Pricing des CDS . . . 216

9.2.3 Valorisation des CDS . . . 220

9.3 Arbitrage CDS vs Asset-Swap . . . 222

9.3.1 Montage de la Position . . . 222

9.3.2 Calcul de la Base : Cas Théorique . . . 223

9.3.3 Analyse de la Base : Cas Standard . . . 224

10 Capital Structure (Merton) Arbitrage 228

10.1 Le Modèle de Merton . . . 228

10.1.1 Les Hypothèses du Modèle . . . 228

10.1.2 Calcul des Indicateurs de Risques . . . 231

10.1.3 Résolution du Modèle de Merton . . . 233

10.1.4 Limites et Développements . . . 235

10.2 Capital Structure Arbitrages 238
10.2.1 Relation entre le Spread de Crédit et le Cours des Actions 238
10.2.2 Arbitrage Actions vs Dettes 241
10.2.3 Arbitrage Actions vs Synthétiques Actions 244
10.3 Application au Pricing des Obligations Convertibles 246
10.3.1 Généralités sur les Obligations Convertibles 246
10.3.2 Pricing des Obligations Convertibles 248
10.3.2.1 Simulation du Cours de l'Action (Forward) 249
10.3.2.2 Pricing Récursif de l'Obligation Convertible (Backward) . . . 250
10.3.3 Endogénéisation du Spread de Crédit 251

Conclusion **254**

Biblographie Indicative **259**

Remerciements

Ce polycopié est issu du cours « Produits de Taux : Risques, Pricing & Arbitrages » que j'ai développé et eu l'honneur d'enseigner au sein du Master IMAFA du Polytech'Nice-Sophia passant de 8 heures en 2001 à 20 heures de 2002 à 2004 et enfin 40 heures en 2005 et 2006.

Au-delà de l'engagement personnel, cette belle histoire n'aurait jamais pris cette ampleur sans l'enthousiasme des étudiants, l'esprit pragmatique d'Anne-Marie Hugues (Responsable du Master) et le support efficace et sympatique des équipes administratives.

Nombreux sont les étudiants qui ont contribué plus directement au développement de ce cours par leurs remarques, leurs questions mais aussi parfois leurs critiques. Ce polycopié leur doit donc beaucoup, qu'ils soient tous ici chaleureusement remerciés.

Je souhaiterais enfin exprimer toute ma gratitude à Alexandre Garreau qui a bien voulu relire le document et m'a fait part de ses remarques constructives tant sur la forme que sur le fond.

Frédéric Leroy

Avertissement

Le contenu de ce polycopié correspond à la partie « cours magistral » (20 heures) du cours tel qu'il était dispensé au sein du Master IMAFA.

Il n'intègre pas le contenu de la partie « travaux dirigés » (20 heures) du cours qui constitue le complément naturel du « cours magistral » (mise en pratique et en perspective des concepts et calculs présentés dans le « cours magistral »).

Les énoncés des exercices de la partie « travaux dirigés » sont téléchargeables sur le site http://www.tradingtaux.com/.

Introduction

> *« Le cours qui, de l'avis unanime des étudiants, est le plus utile pour leur intégration en salle de marchés »*
> Anne-Marie Hugues
> Resp. Master IMAFA (Polytech'Nice-Sophia)

Synthèse entre connaissances académiques, savoir-faire issus de l'industrie et travaux personnels de l'auteur, le cours « Produits de Taux : Risques, Pricing & Arbitrages » a été enseigné de 2001 à 2006 au sein du Master IMAFA (Polytech'Nice-Sophia).

Aboutissement d'un travail de rédaction commencé en 2008, ce polycopié comprend dix chapitres couvrant une partie significative du spectre des produits et des stratégies de taux :

1. Techniques de Couverture Factorielles Zéro-Coupon
2. Prêt-Emprunts, Forward-Forwards & FRAs
3. Pricing & Trading Obligataire
4. Barbell vs Bullet Obligataires (Butterfly)
5. Swap de Taux et Asset-Swap Gov/Corp
6. Contrats Futures CT vs FRAs
7. Contrats Futures LT vs Cash
8. Mortgage Backed Securities (MBS) Arbitrages
9. Credit Default Swap (CDS) vs Asset-Swap Arbitrage
10. Capital Structure (Merton) Arbitrage

La perspective est orientée opérationnel front-office et plus spécifiquement arbitrage et couverture.

Nous allons dans cette introduction présenter le contenu de ce polycopié à travers trois perpectives différentes :

– Les marchés et les produits couverts (typologie)
– Les concepts fondamentaux d'ingénierie financière (risque, pricing et arbitrage)
– Le trading pour compte propre et l'activité d'arbitrage (taux)

On terminera par les pré-requis et les publics visés par ce cours.

Typologie des Instruments Financiers

Les différents instruments financiers étudiés dans ce document [1] peuvent être classés selon les critères classiques suivants :

– Types de produits (cash, dérivés, optionnels ou hybrides)

1. On notera que les instruments financiers couverts vont au-delà des instruments de taux stricto-sensus mais intègrent aussi des problématiques crédits et (dans une moindre mesure) actions. Il s'agit d'une évolution naturelle du cours au fil des ans correspondant pour partie aux préocupations professionnelles de l'auteur et pour partie à des réflexions personnelles en lien avec l'actualité économique et financière

– Types de marchés (OTC ou organisés)
– Types d'horizons (court terme vs long terme)

Cette typologie (cf. tableau 1) est traditionnelle dans le sens où elle a historiquement structuré l'organisation des activités de marchés des banques (salles de marchés et desks) mais n'est plus pertinente pour l'activité d'arbitrage qui par nature est cross-products et cross-markets.

		Produits			
Horizon	Marchés	Cash	Dérivés	Optionnels	Hybrides
CT	OTC	Prêt-Emprunt, Forward-Forward	FRAs		Repo
	Organisé		IR Futures	Options sur IR Futures	
LT	OTC	Obligation Etat/Corp	IR Swap, CDS		Asset-Swap, MBS
	Organisé	Actions	Futures LT	Options sur Futures LT	Obligations Convertibles

TAB. 1 – Typologies des Produits et des Marchés

Ce cours sur les produits de taux ayant une orientation arbitrage et non trading « directionnel », notre objectif sera de présenter les stratégies qu'il est possible de mettre en oeuvre en construisant des portefeuilles de type « long/short » structurés de façon à annuler le risque directionnel.

Concepts Fondamentaux

Tout au long de ce cours, trois concepts clés viendront rythmer l'étude des différents produits et stratégies de taux (cf. Graphique 1) :

– Par **risque**, on entend l'incertitude sur l'évolution future d'un certain nombre de variables financières (facteurs de risque) qui impactent directement la valorisation d'une position. Analyser les risques c'est d'abord identifier les facteurs de risques, puis mesurer l'exposition de la position à ces différents facteurs (mesurée en Euros par unité de facteurs) et enfin modéliser la dynamique du (ou des) facteur(s) de risque (dans un cadre probabiliste). Ce cadre conceptuel sert à la fois au calcul du Value-at-Risk de la position (mesurée en Euros pour un intervalle de confiance donné) et au pricing des instruments financiers (« risk-neutral valuation »)
– Par **pricing**, on entend le calcul du « prix » théorique d'un instrument financier par opposition à son prix de marché. Le terme de prix est ici employé au sens large qui inclus le prix usuel (exprimé en pourcentage du nominal et pied de coupon pour une obligation, par exemple) mais aussi en taux (pour un FRA), en spread (pour un asset-swap ou un MBS) ou en points de volatilité (pour une option). Ce prix théorique

pourra être calculé par différents moyens selon la complexité de l'instrument considéré allant de la méthode dite du « synthétique » (lorsqu'elle est possible) à l'approche générique appelée « risk-neutral valuation » (valorisation par arbre et simulation de Monte Carlo)
- Un **arbitrage** est une position impliquant l'achat (long) et la vente (short) simultanée d'au moins deux instruments financiers. L'arbitragiste a pour objectif de bénéficier d'un écart de « prix » (mis-pricing) non justifié entre un instrument donné et son portefeuille de couverture « risk-equivalent » aussi appelé « synthétique ». Le gain (P/L positif) sur une position d'arbitrage provient du retour « à la normale » de l'écart de prix[2] et/ou du portage de la position dans le temps. Le prix théorique au sens large (prix, taux, spread, volatilité, etc.) du portefeuille de couverture est appelé prix de la couverture

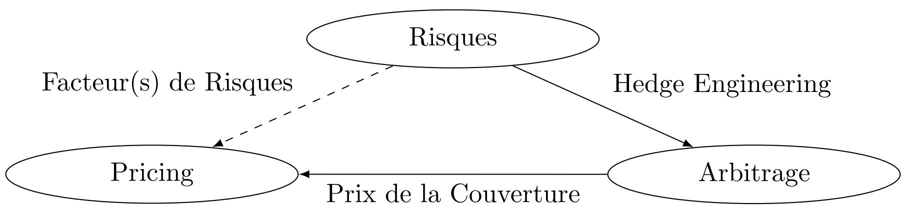

FIG. 1 – *Relations entre les Concepts Fondamentaux*

Ces éléments terminologiques peuvent sembler abscons à ce stade. Ils sont néanmoins nécessaires et prendront tous leurs sens lors de l'étude concrète des produits et des stratégies de taux dans les pages qui suivent.

Arbitrage vs Trading Directionnel

Les arbitragistes sont avec les traders « directionnels » les deux composantes principales des équipes de trading pour compte propre (proprietary trading) des banques[3]. Les deux activités sont d'ailleurs « orthogonales » tant au niveau des méthodes que des risques pris :

- Dans le **trading directionnel**, la valeur ajoutée est essentiellement dans la capacité du trader à « prévoir » l'évolution du principal facteur de risque sous-jacent à sa position (directionnelle) à un horizon donné. La complexité réside dans les modèles et techniques utilisées pour prévoir l'évolution future du facteur de risque et non dans la position elle-même (montage et gestion)
- Dans les **activités d'arbitrage**[4], la valeur ajoutée réside dans la capacité à construire des portefeuilles dont la dynamique du facteur de risque résultant est « facile » à modéliser et à prévoir. La complexité est donc dans la conception, l'analyse et la gestion de la position d'arbitrage et non dans l'analyse du facteur de risque résultant

2. Notons que le portefeuille de couverture (hedge) de l'instrument financier considéré tire son nom du fait que la position globale est par construction couverte contre le risque ou les risques principaux (le risque de taux pour ce qui nous concerne principalement ici)

3. Le trading « pour compte propre » est une activité qui s'est initialement développée au sein banques Anglo-Saxonnes puis, plus récemment, au sein des hedge-funds lorsque ces banques ont « externalisé » une partie de leurs activités de trading pour compte propre vers ses structures indépendantes sur le plan capitalistique

4. On notera que cette définition va au-delà des arbitrages dits « sans risques » tels qu'ils sont usuellement définis dans la littérature économique au point que l'on pourrait même parler de « trading sur spreads » pour qualifier l'activité d'arbitrage telle qu'elle est concrètement exercée au sein de l'industrie financière

Dans cette perspective, un arbitrage (taux/crédit/action) typique peut faire l'objet d'un descriptif standardisé qui doit (au minimum) détailler les points suivants [5] :

- Objectif : Description générale de l'anomalie de marché que l'on souhaite exploiter
- Construction : Détails des instruments utilisés (caractéristiques) et calcul des ratios de couvertures (hedge ratio)
- Niveaux d'Entrée/Sortie : Quantification des niveaux (dans l'unité de mesure du facteur de risque composite) sur lesquels on va rentrer et sortir de la position
- Risques Couverts : Description des risques couverts par construction (risques directionnels)
- Risques Résiduels : Description des risques résiduels non couverts qui peuvent impacter le P/L de la position et des situations dans lesquels ses risques sont susceptibles de se réaliser
- P/L Anticipé : Analyse et calcul du P/L ex-ante pour des hypothèses données de variation du facteur de risque et un horizon donné (impact du portage éventuel)

Il s'agit d'un outil important tant du point de vue interne (établissement des budgets prévisionnels P/L et risques, transmission et évolution des savoirs-faire au sein de l'équipe) que du point de vue externe (communication avec le top management, le département des risques et l'audit interne de la banque le cas échéant).

C'est précisément l'un des objectifs du cours dans sa globalité (cours magistral et travaux dirigés) que d'aboutir à la création des fiches de stratégie pour les différents arbitrages étudiés.

Public Visés et Pré-Requis

De par son contenu et son orientation, ce cours est tout particulièrement destiné aux étudiants en Master 2 orientés « finance de marchés » ou/et « ingénierie financière » ainsi que des écoles d'ingénieurs ou de commerces ayant si possible déjà un acquis de connaissances minimales dans les domaines suivants :

- Outils mathématiques (analyse, calcul matriciel, calcul de probabilité)
- Calcul actuariel (taux d'intérêt, valeur actuelle, conventions)
- Finance de marchés (produits, marchés et acteurs)
- Finance d'entreprise (financement, comptabilité et valorisation)
- Théorie et pratique des options (principes, pricing et stratégies)

Ce cours s'adresse aussi aux professionnels souhaitant compléter leurs connaissances des produits de taux dans une perspective opérationnelle (trader, gérant), d'analyse (risk manager, stratégiste taux) ou d'investissement (gérant de fonds de fonds de « hedges »).

Enfin, les concepts et calculs présentés dans ce polycopié sont parfois (c'est loin d'être systématique) illustrés via un ou plusieurs exemples numériques dont la reproduction (conseillée mais pas nécessaire en première lecture) suppose la maîtrise d'un tableur de type Excel ou équivalent.

Bonne lecture.

5. Cette liste reprend en version simplifiée le modèle standardisé utilisé au sein de la filiale parisienne de la banque Dresdner Kleinwort Benson (ex-Banque Internationale de Placements)

Chapitre 1

Couvertures Factorielles Zéro-Coupon

Ce premier chapitre présente les techniques de couverture zéro-coupon multi- factorielles des portefeuilles taux. Par portefeuille taux on entend tout portefeuille constitué d'instruments cash ou dérivés, fermes ou optionnels et dont l'évolution dépend directement des taux zéro-coupon Etat (ce qui n'exclut d'ailleurs pas les obligations corporates). Pour des raisons pratiques, nous nous plaçons cependant dans le cadre simple de portefeuilles obligataires Etat à taux fixes. Nous commençons par décrire notre problème et présentons les techniques de couverture en sensibilité zéro-coupon mono-factorielle (shift). Nous explicitons ensuite les fondements théoriques et empiriques des approches factorielles de modélisation de la dynamique des courbes de taux zéro- coupon Etat. Ces fondements légitiment les techniques de couvertures multi- factorielles (en général les trois premiers facteurs : shift, twist et butterfly) utilisées entre autre par les market-makers et les gérants obligataires. Les techniques de couvertures multi-factorielles zéro-coupon et le Value-at-Risk paramétrique partagent le même cadre théorique sous-jacent (facteurs de risque gaussiens multi-variés). Après avoir détaillé le calcul d'une couverture par minimisation du Value-at-Risk paramétrique (VaR Best Hedge), on montrera que la couverture multi-factorielle zéro-coupon est une approximation de ce VaR Best Hedge. Enfin, on terminera ce chapitre par l'exposé de la méthode de couverture dite par « time buckets » qui est une couverture locale et de proche en proche (technique du bootstrap) qui nous permettra de conclure sur quelques remarques d'ordre générales et comparatives sur les techniques de macro-couverture.

1.1 Couverture Mono-Factorielle

La couverture mono-factorielle n'est rien d'autre qu'une couverture en sensibilité zéro-coupon d'un instrument financier par un autre. Dans cette première section nous commençons par rappeler ce qu'est un taux zéro-coupon, comment il se justifie économiquement et en quoi il est un concept central en finance de marché. On décrit ensuite la technique de couverture mono-factorielle (hedge ratio) ainsi que les limites de ce type de couverture.

1.1.1 Zéro-Coupon (Rappels)

On appelle « zéro-coupon » (sans risque) un titre qui « paye » uniquement un Euro dans t années (de façon certaine).

L'échéancier de cashflows de ce zéro-coupon (cf. Graphique 1.1) est particulièrement simple puisqu'il ne ne comprend que deux cashflows :

- Le cashflow « sortant » qui correspond à la somme payée par l'investisseur en date 0 (aujourd'hui)
- Le cashflow « rentrant » qui correspond à la somme reçue par l'investisseur à la date (future) t

On se place ici du point de (la trésorerie de) l'investisseur (le prêteur).

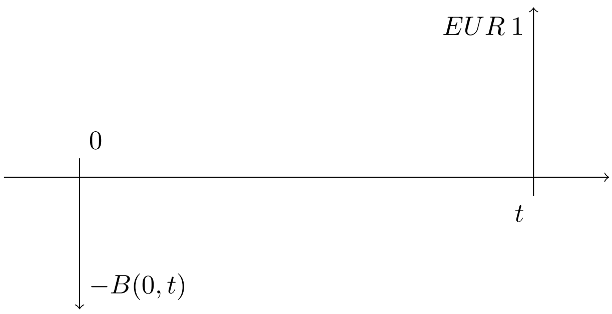

Fig. 1.1 – *Cashflows d'un zéro-coupon*

Pour cet investissement qui lui rapporte 1 Euro dans t années, quel va être le prix payé par l'investisseur en date 0 ? Si le prix réellement payé dépend des conditions de marché, on peut néanmoins avancer que ce prix est en toute logique inférieur à 1 Euro.

Les deux raisons couramment avancées dans la littérature économique pour justifier cette inégalité sont :

1. La préférence pour le présent qui veut qu'un agent « rationnel » préfère recevoir 1 Euro aujourd'hui à un Euro dans t années (a fortiori si t est grand) de sorte que le montant que notre investisseur est prêt à se déssaisir aujourd'hui pour récupérer 1 Euro dans t année est strictement inférieur à 1 Euro
2. La croissance économique qui veut que le montant reçu par l'emprunteur va être réinvesti « dans l'économie » sur la durée du prêt et croître en moyenne au même rythme que cette économie sur cette période[1]

Il est donc possible de définir le taux d'intérêt $z\,(0{,}t)$ du prêt « zéro-coupon » précédent départ 0 et durée t, comme le taux à appliquer au :

- Montant initial prêté $B\,(0{,}t)$ pour retrouver l'Euro reçu en t (capitalisation)
- Montant de 1 Euro reçu en t pour retrouver le montant initial prêté $B\,(0{,}t)$ (actualisation)

Par « appliquer », on désigne la convention de calcul à utiliser en pratique qui intègre le taux d'intérêt (annualisé) et la durée du prêt en années. Si le taux $z\,(0{,}t)$ est en convention « taux continus »[2], la valeur actuelle d'1 Euro dans t années (qui correspondant précisément à la valeur de marché de ce zéro-coupon), s'écrit :

$$B(0{,}t) = e^{-t \times z(0,t)}$$

1. Dans un monde neutre au risque, le taux d'intérêt (réel) sans risque doit être égal au taux de croissance (réel) de l'économie

2. Les trois principales conventions de taux sont monétaires, actuarielles et continu, elles seront étudiées au Chapitre 2

Le taux $z\,(0,t)$ ou plus simplement z_t de ce « zéro-coupon » est appelé taux zéro-coupon pour la maturité t.

La donnée des taux zéro-coupon pour les maturités croissantes $t_1 < t_2 < ... < t_N$ est appelée courbe des taux zéro-coupon. En pratique, les taux zéro-coupon pour des maturités $t \neq t_i$ (i=1...N) sont calculés par interpolation à partir des taux existants.

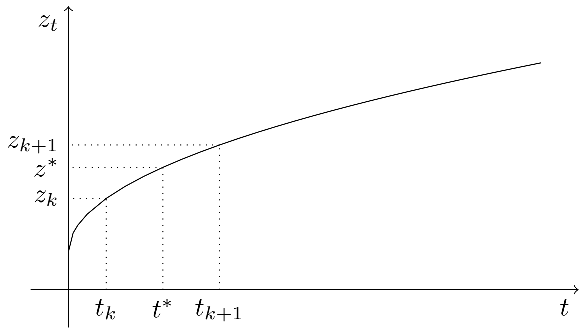

FIG. 1.2 – *Courbe des taux zéro-coupon*

Les taux zéro-coupon Etat (cf. chapitre 3) et Swap (cf. chapitres 2 & 5) sont les « briques de base » du pricing des produits financiers en général et des produits de taux en particulier que les cashflows soient certains (cas des obligations à taux fixes) ou incertains (cas de la plupart des produits dérivés, structurés ou hybrides)[3].

1.1.2 Couverture Mono-Factorielle

On décrit dans ce premier paragraphe le problème de couverture en sensibilité « zéro- coupon » d'un portefeuille obligataire (couverture contre les mouvements uniformes de la courbe des taux).

Afin de simplifier l'exposé mais sans perte de généralité on fait les deux hypothèses suivantes :

1. On est long d'un portefeuille d'obligations en Euros émises par un Etat souverain AAA. Ce portefeuille peut être analysé comme un échéancier de cashflows dont on connaît avec certitude les montants et les dates de versements.
2. Les cashflows tombent sur des dates (ou plutôt des durées) fixes constituants un échéancier de référence pour les vecteurs de sensibilités zéro-coupons ainsi que pour les facteurs de risques.

On note :

- Date générique de l'échéancier : t_i
- Cashflow générique : CF_i
- Taux ZC continue de maturité t_i : z_i

Si l'on suppose que l'échéancier de référence est constitué de N dates ou durées (i=1...N), la valeur actuelle V de notre portefeuille pricée dans la courbe des taux zéro-coupon s'écrit :

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i \qquad avec \qquad V_i = CF_i \times \exp\left(-z_i \times t_i\right)$$

3. La connaissance de ses taux est donc indispensable pour réaliser tout calcul de pricing et par extension tout calcul de risques sur les produits de taux que nous allons traiter dans ce cours. Les méthodes de calcul des taux zéro-coupon à partir des taux des instruments cotés sur le marché (obligations et swaps principalement) sont présentées au Chapitre 3

On appelle vecteur des sensibilités zéro-coupon S_{ZC} le vecteur des sensibilités $S_{ZC,i}$ correspondants à chacun des cashflows CF_i :

$$S_{ZC} = \begin{bmatrix} S_{ZC,1} \\ \vdots \\ S_{ZC,N} \end{bmatrix} \qquad avec \qquad S_{ZC,i} = \frac{dV_i}{dz_i}$$

Tout scenario de déformation de la courbe des taux zéro-coupon Δz s'écrit sous forme vectorielle :

$$\Delta z = \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \vdots \\ \Delta z_N \end{bmatrix}$$

Δz_i est la variation du taux zéro-coupon de maturité t_i sur la période de temps considérée [4].

On appelle mouvement uniforme de la courbe des taux zéro-coupon (shift), les scénarios pour lesquels les variations individuelles de chaque taux zéro-coupon sont identiques et égales à α :

$$\Delta z = \alpha \times \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad avec \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Pour un mouvement uniforme d'amplitude α de la courbe des taux zéro-coupon, la variation de la valeur actuelle de notre portefeuille obligataire ΔV est égale à :

$$\Delta V = S^*_{ZC} \times \alpha$$

S^*_{ZC} est la sensibilité zéro-coupon (totale) du portefeuille obligataire :

$$S^*_{ZC} = \langle S_{ZC} | 1_N \rangle \qquad avec \qquad 1_N = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Considérons maintenant une obligation de couverture dont le prix zéro-coupon unitaire (pour EUR 1 de nominal) est P_0, le vecteur de sensibilité zéro-coupon $S_{ZC,0}$ et la sensibilité zéro-coupon totale $S^*_{ZC,0}$.

Supposons que l'on vende cette obligation pour un montant nominal N_0 alors le vecteur de sensibilité zéro-coupon du portefeuille couvert $S_{ZC,H}$ s'écrit :

$$S_{ZC,H} = S_{ZC} - N_0 \times S_{ZC,0}$$

4. Exemple : overnight ou 1 jour ouvré

La variation de valeur du portefeuille couvert pour un scénario quelconque Δz de déformation de la courbe des taux zéro-coupon s'écrit (en première approximation) :

$$\Delta V_H = \langle S_{ZC} - N_0 \times S_{ZC,0} | \Delta z \rangle$$

On appelle couverture zéro-coupon du portefeuille obligataire [5], le montant nominal N_0 d'obligations de couverture qu'il faut vendre pour couvrir notre portefeuille obligataire contre un scénario de shift.

En remplaçant Δz par sa valeur spécifique dans l'équation ci-dessus et en égalisant à zéro on trouve :

$$N_0 = \frac{S^*_{ZC}}{S^*_{ZC,0}}$$

Par construction, ce type de couverture n'est efficace que pour des mouvements uniformes parallèles de la courbe des taux zéro-coupon (shift). Pour un déplacement non uniforme de la courbe des taux zéro-coupon (cf. Graphique 1.3), une couverture mono-factorielle (Shift) n'est plus efficace par construction.

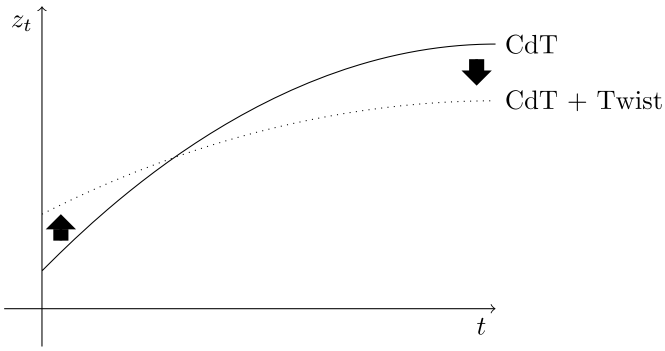

FIG. 1.3 – *Déplacement Non Uniforme de la CdT ZC (Twist)*

Une bonne couverture se doit d'être efficace pour tous les facteurs prépondérants de déformation de la courbe des taux zéro-coupon d'où la nécessité d'identifier ces facteurs autant d'un point de vue théorique qu'empirique.

1.2 Couvertures Multi-Factorielles

Danc cette section nous allons présenter les couvertures multi-factorielles zéro-coupon d'un point de vue théorique dans un premier temps (modèle de Vasicek), puis d'un point de empirique (détermination des facteurs de déformation d'une courbe de taux zéro-coupon à partir de données de marchés) et enfin pratique (calcul de la couverture).

5. Cette couverture « zéro-coupon » est une version moderne de la classique couverture en « duration » bien connue des gérants obligataires

1.2.1 Modèle de Vasicek : Aspects Formels

Le modèle de Vasicek[6] est le plus connu des modèles d'équilibre de la courbe des taux zéro-coupon. Sa popularité tient à sa (relative) simplicité mais aussi et surtout aux nombreux travaux empiriques qui ont validés ses conclusions[7]. Nous allons dans ce paragraphe nous contenter de rappeler dans les grandes lignes les hypothèses et les résultats du modèle.

On fait l'hypothèse que le taux sans risque instantané r_t (unique source d'incertitude du modèle) suit un processus stochastique d'Ornstein-Ulhenbeck :

$$dr_t = \alpha \times (\beta - r_t) \times dt + \sigma \times dW_t$$

La dynamique du taux sans risque instantanné r_t décrite par l'équation différentielle stochastique précédente est la résultante de deux composantes :

1. Une composante déterministe qui suit un processus de « retour à la moyenne » de vitesse α et de moyenne β.
2. Une composante stochastique qui suit un processus dit de Ito ($r_{t+h} - r_t$ suit une gaussienne de moyenne nulle et de variance $h \times \sigma^2$)

On se propose de calculer le prix B(T) d'une obligation zéro-coupon de date valeur 0 et de date de maturité T.

Dans le cadre de la théorie de l'évaluation des actifs financiers sous probabilité risque- neutre (risk-neutral pricing), le prix de ce zéro-coupon s'écrit :

$$B(T) = E_Q\left[e^{-\int_0^t r(s)ds}\right]$$

Soit z(T) le taux zéro-coupon de l'obligation zéro-coupon précédente, on a par définition du taux zéro-coupon :

$$B(T) = e^{-T \times z(T)}$$

La solution du modèle de Vasicek permet de définir la courbe des taux zéro-coupon en fonction des paramètres du processus stochastique qui régit la dynamique du taux sans risque instantanné :

$$z(T) = z_\infty + (r_0 - z_\infty) \times \frac{\phi(T)}{T} + \frac{\sigma^2}{4\alpha^3} \times \frac{\phi(T)}{T} \qquad avec \qquad \phi(\tau) = \frac{1 - e^{-\alpha \times r}}{\alpha}$$

Les taux zéro-coupon aux deux extrêmités de la courbe des taux sont :

$$z_0 = \lim_{T \to 0} z(T) = r_0 \qquad (Taux\ CT)$$

et

$$z_\infty = \lim_{T \to +\infty} z(T) = \beta - \frac{\sigma^2}{2 \times \alpha^2} \qquad (Taux\ LT)$$

On a donc trois facteurs explicatifs de la forme de la courbe des taux :

1. Le taux CT : r_0

6. Vasicek O. (1977), « An Equilibrium Characterization of the Term Structure », Journal of Financial Economics (Vol. 5)

7. Voir sur ce sujet l'article de Chan K.C., Haroly G.A., Longstaff F.A., Sanders A.B. (1992), « An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short Term Interest Rate », Journal of Finance (Vol. 47)

2. La pente : $r_0 - z_\infty = s$
3. La convexité : σ

Dans le cadre du modèle de Vasicek, la valeur actuelle de notre portefeuille calculée dans la courbe des taux zéro-coupon s'écrit :

$$V = \sum_{i=1}^{N} CF_i \times B_i\left(z_\infty, s, \sigma^2\right) \qquad avec \qquad B_i\left(z_\infty, s, \sigma^2\right) = e^{-t_i \times B_i\left(z_\infty, s, \sigma^2; t_i\right)}$$

Calculons les sensibilités de notre portefeuille par rapport à chacun de ces trois facteurs. On trouve :

$$\frac{\partial V}{\partial z_\infty} = \sum_{i=1}^{N} S_{ZC,i} \times \frac{t_i}{t_i} = \langle S_{ZC} | Shift \rangle$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \sum_{i=1}^{N} S_{ZC,i} \times \frac{\phi\left(t_i\right)}{t_i} = \langle S_{ZC} | Twist \rangle$$

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma^2} = \sum_{i=1}^{N} S_{ZC,i} \times \frac{1}{4\alpha^3} \frac{\phi^2\left(t_i\right)}{t_i} = \langle S_{ZC} | Butterfly \rangle$$

Les facteurs de Shift, Twist et Butterfly sont les trois facteurs « implicites » de déformation de la courbe des taux zéro-coupon du modèle de Vasicek :

1. Shift : Mouvement parallèle uniforme
2. Twist : Mouvement de pentification
3. Butterfly : Mouvement de torsion

Le graphique 1.4 ci-dessous permet de visualiser la forme de ces facteurs théoriques de déformation de la courbe des taux zéro- coupon.

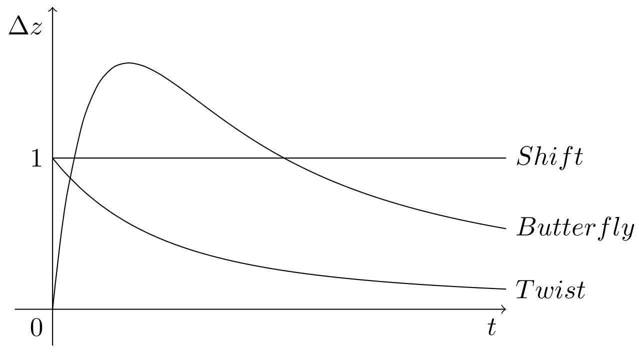

FIG. 1.4 – *Facteurs de déformation de la CdT ZC (Vasicek)*

Le fait que ces trois facteurs permettent de « reproduire » assez fidèlement l'ensemble des déformations observées des courbes de taux zéro-coupon (notamment dans le cas Français) explique le succés rencontré par ce modèle auprès des professionnels. Deux approches sont couramment utilisées pour « extraire » les facteurs de déformation de la courbe des taux zéro-coupon :

1. L'approche paramétrique consiste à estimer les paramètres du modèle de Vasicek (r_0, z_∞, σ) sur des données de marchés

2. L'approche non paramètrique consiste à extraire les facteurs (implicites) à partir de données de marchés sans présupposé théorique sous-jacent

C'est cette seconde approche que nous allons décrire dans le paragraphe qui suit.

1.2.2 Modèle de Vasicek : Validation Empirique

L'application de l'analyse en composantes principales (ACP) aux vecteurs de variations des taux zéro-coupon observés sur une période donnée permet d'extraire les facteurs empiriques qui expliquent le mieux (au sens de la variance) les co-mouvements des taux zéro-coupon de maturités différentes.

La première application de l'ACP à l'étude des facteurs de déformation des courbes de taux zéro-coupon est à mettre au crédit de Litterman R. et Scheinkman J.[8]. Leur méthodologie a été ensuite appliquée par d'autres chercheurs sur des courbes de taux et des périodes différentes. Ce paragraphe est adapté de Bennani K et Bertrand J.C.[9] qui ont appliqué cette méthodologie au marché Français sur la période 1988- 1997 (cf. p.72-76)[10].

Soit $\Delta z_{t,t+1}$ le vecteur des variations des taux zéro-coupon observées sur la période [t, t+1] :

$$\Delta z_{t,t+1} = \begin{bmatrix} \Delta z_{1;t,t+1} \\ \vdots \\ \Delta z_{N;t,t+1} \end{bmatrix}$$

$\Delta z_{i;t,t+1}$ est la variation du taux zéro-coupon de maturité t_i sur la période de temps considérée (exemple : overnight ou 1 jour ouvré).

On définit la dispersion du vecteur aléatoire Δz par rapport à une droite de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^N$ engendrée par le vecteur directeur v par :

$$d_v\left(\Delta z\right) = v^t \Sigma v$$

Σ est la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire Δz. Ainsi, la dispersion de Δz par rapport au i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^N$ est simplement la variance du taux de maturité t_i.

L'idée sous-jacente de l'ACP est de trouver un ensemble d'axes principaux qui expliquent le maximum de variance. Mathématiquement, il s'agit donc de résoudre le problème de maximisation suivant :

$$\max_{\|v\|=1} d_v\left(\Delta z\right)$$

On montre que ce problème est équivalent à trouver les vecteurs et valeurs propres de la matrice Σ[11]. Le vecteur v cherché est simplement le vecteur propre v_1 associé à la plus grande valeur propre λ_1 de la matrice Σ.

8. R. & Scheinkman J. (1991), « Common Factors Affecting Bond Returns », Journal of Fixed Income, 1
9. Bennani K., Bertrand J.C. (1998), Les Obligations à Taux Variables, Economica
10. On pourra consulter l'ouvrage de Bertier P., Bouroche J.M. (1981), Analyse des Données Multi-Dimensionnelles, Presses Universitaires de France (ed.), pour un exposé rigoureux et complet des techniques classiques d'analyse des données en général et de l'ACP en particulier
11. Σ est symétrique définie positive donc diagonalisable.

Les vecteurs $(v_1,v_2,\ldots,v_N)$ forment une base orthogonale de vecteurs propres de la matrice Σ associés aux valeurs propres $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N)$. On suppose que ces vecteurs propres sont ordonnés par valeurs propres décroissantes :

$$\lambda_1, \geq \lambda_2, \geq \ldots \geq \lambda_N \geq 0$$

On défini enfin le pourcentage θ_i de la variance totale expliquée par le i-ème vecteur propre par :

$$\theta_i = \frac{\lambda_1}{\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^2} = \frac{\lambda_1}{\sum_{j=1}^{N}\lambda_j} \qquad avec \qquad \sum_{i=1}^{N}\theta_i = 1$$

L'ACP permet de décrire la dynamique de la courbe des taux zéro-coupon par le sous-ensemble des p premiers facteurs qui contribuent le plus à la variance totale.

Bennani K et Bertrand J.C. ont appliqué cette méthode aux taux Etat Français sur la période 1988-1997. Les résultats obtenus sont conformes à ceux obtenus par ailleurs par Litterman R. et Scheinkman J. et par d'autres chercheurs après eux. Trois facteurs expliquent 99% de la variance totale : le shift, le twist et le butterfly. Ces facteurs empiriques sont qualitativement identiques aux facteurs théoriques du modèle de Vasicek.

Le graphique 1.5 ci-dessus permet de visualiser la forme de ces facteurs empiriques de déformation de la courbe des taux zéro-coupon. On peut aussi y lire le pourcentage de la variance totale expliquée par chacun des facteurs.

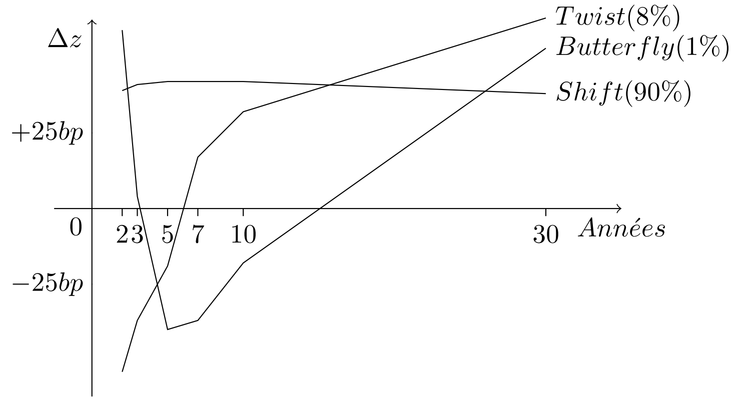

FIG. 1.5 – *Facteurs de déformation de la Cdt ZC (ACP)*

Sans surprise, le Shift (mouvement parallèle uniforme de la courbe des taux) explique en grande partie (90%) la variance totale des variations de la courbe des taux zéro-coupon considérée. Ce chiffre relativement élevé s'explique par deux arguments de natures différentes :

- D'une part, le faible nombre de maturités prises en compte dans la courbe des taux (N=6)
- D'autre part, les politiques de lutte contre l'inflation qui ont permis de faire baisser significativement les taux d'intérêts sur toutes maturités (sur la période d'étude)

Il paraît évident que la même étude réalisée sur un plus grand nombre de maturités et sur la période postérieure à la création de l'Euro devrait aboutir une plus grande importance du twist au détriment du shift. Cette spécificité du Shift explique le succés des techniques de couvertures mono-factorielle qu'elles soient « zéro-coupon » ou plus classiquement « actuarielles » (couverture en duration).

Néanmoins, l'efficacité des couvertures « zéro-coupon » mono-factorelles peut être significativement améliorée par l'introduction de facteurs supplémentaires.

1.2.3 Couvertures Multi-Factorielles

Reprenons le problème de couverture de notre portefeuille tel que nous l'avons décrit au début ce chapitre. Nous allons cette fois le couvrir contre les trois facteurs principaux de déformation de la courbe des taux zéro-coupon décrits ci-dessus. Afin de simplifier l'exposé, on notera ces facteurs f_1, f_2 et f_3.

On se donne trois obligations de couverture $\mathrm{H}_{\text{-}1}$, $\mathrm{H}_{\text{-}2}$ et $\mathrm{H}_{\text{-}3}$ dont les vecteurs de sensibilité zéro-coupon sont respectivement $\mathrm{S}_{ZC,\text{-}1}$, $\mathrm{S}_{\mathrm{ZC},\text{-}2}$ et $\mathrm{S}_{\mathrm{ZC},\text{-}3}$. Supposons que l'on vende des montants nominaux $\mathrm{N}_{\text{-}1}$, $\mathrm{N}_{\text{-}2}$ et $\mathrm{N}_{\text{-}3}$ des obligations de couverture respectives $\mathrm{H}_{\text{-}1}$, $\mathrm{H}_{\text{-}2}$ et $\mathrm{H}_{\text{-}3}$. Le vecteur de sensibilité zéro-coupon du portefeuille couvert $\mathrm{S}_{\mathrm{ZC,H}}$ s'écrit :

$$S_{ZC,H} = S_{ZC} - \sum_{k=1}^{3} N_{-k} \times S_{ZC,-k}$$

La variation de valeur du portefeuille couvert pour un scénario quelconque Δz de déformation de la courbe des taux zéro- coupon s'écrit maintenant :

$$\Delta V_H = \left\langle S_{ZC} - \sum_{k=1}^{3} N_{-k} \times S_{ZC,-k} | \Delta z \right\rangle$$

On appelle couverture multi-factorielle du portefeuille obligataire, les montants nominaux $\mathrm{N}_{\text{-}1}$, $\mathrm{N}_{\text{-}2}$ et $\mathrm{N}_{\text{-}3}$ des obligations de couverture respectives $\mathrm{H}_{\text{-}1}$, $\mathrm{H}_{\text{-}2}$ et $\mathrm{H}_{\text{-}3}$ qu'il faut vendre pour couvrir notre portefeuille obligataire contre les facteurs f_1, f_2 et f_3 de déformation de la courbe des taux zéro- coupon.

Le problème consiste donc à trouver $\mathrm{N}_{\text{-}1}$, $\mathrm{N}_{\text{-}2}$ et $\mathrm{N}_{\text{-}3}$ qui vérifient la contrainte de couverture précédente pour le sous-espace vectoriel des variations des taux zéro-coupon engendré par les facteurs f_1, f_2 et f_3 :

$$\triangle z = \sum_{i=1}^{3} \triangle z_i \times f_i \qquad avec \qquad \triangle z_i \in \mathbb{R}$$

En remplaçant Δz par sa valeur dans la contrainte de couverture, en développant l'expression obtenue puis en factorisant par rapport aux scalaires Δz_i (i=1...3) on trouve :

$$\Delta V_H = \left\langle S_{ZC} - \sum_{k=1}^{3} N_{-k} \times S_{ZC,-k} | f_i \right\rangle \times \Delta z_i$$

La condition nécessaire et suffisante pour que ΔV_H soit nul pour tout Δz tels que définis ci-dessus s'écrit :

$$\left\langle S_{ZC} - \sum_{k=1}^{3} N_{-k} \times S_{ZC,-k} | f_i \right\rangle = 0 \qquad pour\ i = 1{,}2{,}3$$

En développant ces trois expressions et en factorisant par rapport aux montants nominaux cherchés $\mathrm{N}_{\text{-}1}$, $\mathrm{N}_{\text{-}2}$ et $\mathrm{N}_{\text{-}3}$ on trouve un système linéraire de trois équations à trois inconnues :

$$\sum_{k=1}^{3} N_{-k} \times \langle S_{ZC,-k} | f_i \rangle = \langle S_{ZC} | f_i \rangle \qquad \textit{pour } i = 1{,}2{,}3$$

Ce système peut aussi s'écrire sous forme matricielle :

$$M_H \times N = S$$

avec les notations évidentes :

$$\begin{aligned}
M_H &= \begin{bmatrix} \langle S_{ZC,-1}|f_1\rangle & \langle S_{ZC,-2}|f_1\rangle & \langle S_{ZC,-3}|f_1\rangle \\ \langle S_{ZC,-1}|f_2\rangle & \langle S_{ZC,-2}|f_2\rangle & \langle S_{ZC,-3}|f_2\rangle \\ \langle S_{ZC,-1}|f_3\rangle & \langle S_{ZC,-2}|f_3\rangle & \langle S_{ZC,-3}|f_3\rangle \end{bmatrix} \\
N &= \begin{bmatrix} N_{-1} \\ N_{-2} \\ N_{-3} \end{bmatrix} \\
S &= \begin{bmatrix} \langle S_{ZC}|f_1\rangle \\ \langle S_{ZC}|f_2\rangle \\ \langle S_{ZC}|f_3\rangle \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Sous réserve que M soit inversible, la solution de ce système est donnée par :

$$N = M_H^{-1} \times S$$

M est inversible si et seulement si les vecteurs de sensibilité zéro-coupon des obligations de couvertures sont linéairement indépendants. Autrement dit, M est inversible si les profils de risque des obligations de couvertures sont significativement différents. D'un point de vue pratique, il suffit de prendre des obligations de maturités significativement différentes (CT, MT et LT) pour que M soit inversible.

Notons qu'en pratique, on couvre les portefeuilles taux avec des contrats Futures et non avec des obligations. Les coûts de transaction et les fourchettes « bid-ask » sont, en effet, moindres sur les marchés organisés que sur les marchés de gré-à-gré sur lesquel se négocient les obligations d'Etat. Il suffit donc de remplacer les profils de risque des obligations CT, MT et LT par les profils de risque des contrats futures correspondants obtenus à partir des relations d'arbitrage classiques de type « cash & carry »[12]. En gestion taux Euro, par exemple, on utilisera les contrats Bund, Bobl et Schatz de l'Eurex.

1.3 Couvertures « VaR Best Hedge »

Cette section montre comment utiliser le Value-at-Risk Paramétrique comme outil de couverture de portefeuilles multi-actifs et multi-devises[13]. Nous commençons par rappeler les

12. Cf. Chapitre 7

13. Cette partie est basée sur des recherches réalisées par l'auteur dans le cadre de ses fonctions chez Trema Group (cf. Leroy F. (2002), VaR Best Hedge: A Comparison of Value-at-Risk and Risk Factors-based hedging methods, R&D Working Paper, Trema Group)

principes de calcul du VaR paramétrique dans le cas général avant de restreindre l'analyse au cas des portefeuilles taux mono-devises (une seule courbe de taux). Il s'agit d'une restriction de pure forme puisque la nature des facteurs de risques n'intervient pas dans le calcul de la couverture optimale d'un portefeuille donné. Cette restriction nous permet de faire le lien entre cette couverture optimale au sens du VaR (que l'on appelle « VaR Best Hedge » dans la suite) et les couvertures zéro-coupon multifactorielles qui par nature ne s'appliquent qu'aux portefeuilles taux mono-devises. Nous montrons, en effet, que ces couvertures ne sont que des approximations du VaR Best Hedge dont la qualité dépend du pourcentage de la variance totale expliquée par les facteurs utilisés (shift, twist et butterfly).

1.3.1 Introduction au VaR Paramétrique

Par définition le Value-at-Risk (VaR) d'un portefeuille donné, est la perte maximale pour un intervalle de confiance α donné (Le VaR est calculé à un horizon H et exprimé dans une devise CCY). En d'autres termes, on peut écrire :

$$Proba\left[\Delta V < -VaR\right] = 1 - \alpha$$

ΔV est la variation absolue du mark-to-market V du portefeuille entre aujourd'hui et l'horizon H.

Trois approches sont couramment utilisées pour le calcul du VaR[14] :

1. Paramétrique
2. Historique
3. Monte Carlo

L'approche paramétrique (qui seule nous intéresse ici) autorise un calcul simple et direct de l'écart-type $\sigma_{\Delta V}$ de la variable aléatoire ΔV à partir des deux hypothèses suivantes :

1. Le vecteur des returns r (sur les facteurs de risque) est un vecteur Gaussien de matrice de variances- covariances Σ
2. La variation de valeur ΔV du portefeuille est approximée (linéarisation) par le produit scalaire du vecteur des deltas δ par le vecteur des returns r.

La valeur du portefeuille V s'écrit comme une fonction des facteurs de risques :

$$V = V\left(f_1, f_2, \ldots, f_K\right)$$

En différenciant V, on obtient :

$$\Delta V \approx \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial V}{\partial f_k} \times \Delta f_k = \sum_{k=1}^{K} \delta_k \times r_k$$

avec :

14. Ces techniques de calcul du VaR se sont développées à partir du milieu des années 90 lorsque les banques ont mis en conformité leurs méthodologies de suivie des risques de marchés et de calcul des fonds propres réglementaires (amendement de 1996 à l'accord Bâle 1 de 1988). Les VaR Historiques et Monte-Carlo sont deux exemples de « full-valuation » VaR dans le sens où les positions individuelles qui composent le portefeuille sont « repricées » à l'horizon H en utilisant les formules de pricing appropriées et des scénarios (historiques ou simulés) pour les facteurs de risques. Dans les deux cas, le VaR est estimé pour un intervalle de confiance α donné à partir de l'histogramme des ΔV (calculés à l'horizon H et exprimées dans une devise CCY). Le VaR Paramétrique nous intéresse ici pour ses accointances formelles avec les techniques de couverture multi-factorielles zéro-coupon

$$\delta_k = f_k \times \frac{\partial V}{\partial f_k} \qquad avec \qquad r_k = \frac{\Delta f_k}{f_k}$$

En notation vectorielle, on obtient :

$$\Delta V =^t \delta r$$

Si de surcroît, le vecteur des returns des facteurs de risques r vérifie :

$$r \longrightarrow \aleph\,(0,\Sigma)$$

Alors, compte tenu des bonnes propriétés mathématiques des lois normales, on en déduit que :

$$\Delta V \longrightarrow \aleph\left(0,\sigma_{\Delta V}^2\right) \qquad avec \qquad \sigma_{\Delta V} = \sqrt{^t\delta\Sigma\delta}$$

Connaissant l'écart-type $\sigma_{\Delta V}$ de la variable aléatoire normale ΔV, le VaR correspondant pour un intervalle de confiance α s'écrit simplement comme :

$$VaR_\alpha = t_\alpha \times \sigma_{\Delta V}$$

t_α est un coefficient multiplicateur permettant de passer d'un VaR à 84% d'intervalle de confiance (1 écart-type) à un VaR à α% d'intervalle de confiance (t_α écart-type). Par exemple, $t_{95} \approx 1.65$.

Nous avons utilisé les returns en pourcentage dans les formules de calcul du VaR. On utilise plus généralement des returns logarithmiques car ces derniers ont les propriétés empiriques les plus proches des lois normales. Dans la pratique, cela ne pose pas de problème puisque qu'il est possible de passer d'un type de return à un autre par l'approximation :

$$\ln\left(\frac{f_{k,1}}{f_{k,2}}\right) \simeq \frac{f_{k,1} - f_{k,2}}{f_{k,1}} \qquad pour \qquad \left|\frac{f_{k,1} - f_{k,2}}{f_{k,1}}\right| \; petit$$

Dans la suite, nous allons restreindre l'analyse à des portefeuilles taux mono-devises[15]. Dans ce cadre, il est possible de calculer les deltas par rapport :

1. Aux variations absolues des taux zéro-coupon continus
2. Aux returns logarithmiques des prix des zéro-coupon

En effet, si la position est constituée d'un simple zéro-coupon de montant nominal N, de maturité T et dont le taux zéro-coupon est z_T alors le prix de ce zéro-coupon à la date t s'écrit :

$$V = N \times \rho_{t,T} \qquad avec \qquad \rho_{t,T} = e^{-(T-t)\times z_{t,T}}$$

On en déduit facilement les deux formules suivantes :

$$\Delta V_{t\to t+\Delta T} \simeq -V_t \times T \times \Delta z_{t\to t+\Delta t,T} \qquad et \qquad \Delta V_{t\to t+\Delta T} \simeq -V_t \times \frac{\Delta\rho_{t\to t+\Delta t,T}}{\rho_{t,T}}$$

En cohérence, la matrice de variance-covariances Σ doit être calculée (1) à partir :

1. Des variations absolues des taux zéro-coupons
2. Des returns logarithmiques des prix des zéro-coupons[16]

15. Le calcul de la couverture optimale au sens du VaR pour un portefeuille taux mono-devise que nous allons décrire ci-après se généralise directement à tout portefeuille multi-assets et multi-devises.
16. En vertu de l'approximation donnée précédemment

1.3.2 « VaR Best Hedge » : Notations et Définitions

Le VaR est une mesure globale du risque pour un portefeuille donné. Il est usuellement utilisé à des fins de comparaison inter-portefeuilles ou d'analyse intra-portefeuille. En d'autres termes, il s'agit toujours de calculer un VaR pour un portefeuille donné. Nous allons dans cette partie nous intéresser au problème « inverse », à savoir, trouver la couverture optimale au sens du VaR pour un portefeuille donné que l'on appellera VaR Best Hedge.

Soient donc P un portefeuille quelconque et $\{P_n\}_{n=1\ldots N}$ un ensemble de N instruments de couverture. On appelle portefeuille de couverture H_λ toute combinaison linéaire des instruments de couvertures :

$$H_\lambda = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \times P_n$$

λ_n représente la « taille » (montant nominal) de la position pour l'instrument P_n. Tout vecteur $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$ donné représente un portefeuille de couverture H_λ et tout portefeuille de couverture H_λ peut être associé à un tel vecteur.

On défini le VaR Best Hedge du portefeuille P par le portefeuille de couverture λ^* solution du problème de minimisation suivant :

$$\min_{\lambda} VaR\,(P_\lambda) \qquad avec \qquad P_\lambda = P - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \times P_n$$

$P_\lambda (P - H_\lambda)$ est le portefeuille total incluant la position et couvrir (P) ainsi que sa couverture (H_λ).

L'existence d'une solution au problème de minimisation est garantie par les bonnes propriétés de la fonction qui à un vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^N$ associe le nombre réel $VaR(P_\lambda)$:

$$VaR\,(P_\lambda) \geq 0 \qquad pour \qquad \lambda \in \mathbb{R}^N$$

et

$$VaR\,(P_\lambda) \to +\infty \qquad quand \qquad \|\lambda\| \to +\infty$$

En d'autres termes, il existe au moins un vecteur $\lambda^* \in \mathbb{R}^N$ pour lequel $VaR(P_\lambda)$ est minimal.

A titre d'exemple, nous allons illustrer le concept de VaR Best Hedge à l'aide d'un exemple simple dans lequel le nombre d'instruments de couverture est volontairement réduit à deux (N=2).

Supposons donc que l'on souhaite couvrir un cashflow unique sur la maturité 3M par deux cashflows adjacents de maturités respectives 1M et 6M. En d'autres termes, on cherche à couvrir un « bullet » par un « barbell ». Pour simplifier, on travaille au niveau des market-values (et non au niveau des montants nominaux). On cherche donc λ^* pour lequel le VaR de notre position couverte (bullet plus barbell) est minimal.

Ce problème implique donc deux instruments de couverture (les cashflows 1M et 6M) et trois facteurs de risques (les cashflows 1M, 3M et 6M).

1.3.3 « VaR Best Hedge » : Aspects Formels

On considère une matrice de variance-covariances $\sum$ de taille K×K où K est le nombre de facteurs de risques considérés (K > N). En vertu des définitions données au début de cette section, le VaR de notre portefeuille total P_λ est donc :

$$VaR\,(P_\lambda) = \sqrt{{}^t\delta\Sigma\delta}$$

Regardons comment s'écrit δ_λ le vecteur des deltas du portefeuille P_λ. Puisque :

$$P_\lambda = P - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \times P_n$$

On a donc :

$$\delta_\lambda = \begin{bmatrix} \delta_{\lambda,1} \\ \vdots \\ \delta_{\lambda,K} \end{bmatrix} \qquad avec \qquad \delta_{\lambda,k} = \alpha_k - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \times \beta_{n,k}$$

et les notations suivantes :

- $\delta_{\lambda,k}$ est le delta du portefeuille couvert P_λ (pour le facteur de risque k)
- α_k est le delta du portefeuille initial P (pour le facteur de risque k)
- $\beta_{n,k}$ est le delta unitaire de l'instrument de couverture P_n (pour le facteur de risque k)

Puisque la fonction qui à $x \in \mathbb{R}^+$ associe $\sqrt{x}$ est monotone croissante, notre problème de minimisation peut être simplifié de la façon suivante :

$$\min_\lambda f\,(\lambda) \qquad avec \qquad f\,(\lambda) = {}^t\delta\Sigma\delta \qquad et \qquad f \;:\; \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

Nous savons en vertu des résultats de l'Analyse Mathématique que si λ^* est une solution de notre problème de minimisation alors λ^* doit vérifier :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \lambda_n}\right|_{\lambda=\lambda^*} = 0 \qquad pour \qquad n = 1 \cdots N$$

Puisque f(λ) est quadratique, l'ensemble des équations précédentes constituent un système de N équations linéaires à N inconnues : λ_n (n=1...N). Ecrivons ce système à l'aide de la décomposition de δ_λ donnée ci-dessus.

Nous pouvons réécrire f(λ) comme suit :

$$f\,(\lambda) =^t [\alpha + \beta\lambda]\,\Sigma\,[\alpha + \beta\lambda]$$

avec les notations suivantes :

- α est un vecteur de dimension K
- β est une matrice à K lignes et N colonnes
- λ est un vecteur de dimension N

On peut donc écrire :

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = 2^t\beta\Sigma[\alpha + \beta\lambda]$$

Le VaR Best Hedge λ^* du portefeuille P doit donc vérifier :

$$\left.\frac{df}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda^*} = 0_N$$

Notre système de N équations à N inconnues s'écrit directement sous forme matricielle en fonction de α, β et λ :

$$^t\beta\Sigma[\alpha + \beta\lambda] = 0_N$$

Si la matrice $^t\beta\Sigma\beta$ de dimension N×N est inversible alors le VaR Best Hedge λ^* du portefeuille P est donné par :

$$\lambda^* = -\left[^t\beta\Sigma\beta\right]^{-1}\beta\Sigma\alpha$$

Une solution triviale à notre problème est obtenue lorsque δ_λ est nul. Cette propriété est vérifiée si et seulement si :

$$\alpha = -\beta \times \lambda^*$$

Littéralement, cette équation signifie que le vecteur des deltas du portefeuille P peut être reproduit par une combinaison linéaire des vecteurs des deltas des N instruments de couverture (Propriété 1).

Cette propriété peut être obtenue dans les deux situations suivantes :

- Les cashflows du portefeuille P peuvent être reproduits par une combinaison linéaire des N instruments de couverture (Propriété 2)
- Le portefeuille P lui-même peut être reproduit par une combinaison linéaire des N instruments de couverture (Propriété 3)

On a les causalités évidentes suivantes :

$$\boxed{\textit{Propriété } 3 \Longrightarrow \textit{Propriété } 2 \Longrightarrow \textit{Propriété } 1}$$

Ces couvertures que l'on peut qualifier de « parfaites » sont rarement envisageables dans le monde réel du fait de la complexité des portefeuilles à couvrir et des différences de fait entre ces portefeuilles (le plus souvent constitués de produits cash) et les instruments de couvertures usuels (produits dérivés).

Dans le monde réel donc, où les propriétés précédentes ne peuvent être reproduites, nous avons de bonnes chances de trouver une unique solution λ^* à notre système de N équations linéaires :

$$\left[^t\beta\Sigma\beta\right]\lambda^* = -\beta\Sigma\alpha$$

si et seulement si la matrice $^t\beta\Sigma\beta$ est inversible.

La résolution d'un système d'équations linéaires est un problème mathématique bien connu. De nombreux algorithmes et librairies scientifiques ont été développées et sont à disposition des ingénieurs financiers. On pourra, par exemple, se référer à l'ouvrage classique de Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A. and Vertterling W.T.[17] pour plus d'information sur ce sujet.

Notons cependant que, d'un point de vue numérique, deux problèmes peuvent se poser lors de la résolution de tels systèmes :

1. $\beta\Sigma\beta$ est théoriquement inversible mais les erreurs d'arrondi machine la rendent non inversible en pratique (auquel cas la procédure numérique échoue). On peut prévenir ce type de problème en choisissant des instruments de couverture $\{P_n\}_{n=1...N}$ qui soient les plus indépendants possibles. Mathématiquement, on devra choisir les instruments $\{P_n\}_{n=1...N}$ de sorte que β soit de plein rang ($\mathrm{rang}(\beta) = N$)
2. L'accumulation des erreurs d'arrondi au cours du processus de résolution peut aboutir à une solution numérique erronée (ce problème est particulièrement sensible si N est grand). On peut prévenir ce type de problème en limitant autant que possible le nombre d'instruments de couvertures (N petit)

Notons que ces deux heuristiques sont cohérentes avec les pratiques en matière de couverture où l'on cherche effectivement à utiliser le plus petit nombre d'instruments possibles (pour limiter les coûts de transaction et les risques d'exécution) et à prendre des instruments ayant des profils de risques les plus différents possibles (afin d'accroître l'efficacité des couvertures).

Reprenons notre exemple numérique débuté au paragraphe 1.3.2.

Nous pouvons maintenant donner les valeurs numériques que nous allons utiliser pour notre exemple.

$$\Sigma = 10^{-5} \times \begin{bmatrix} 2.5 & 3.75 & 7.5 \\ 3.75 & 10 & 27 \\ 7.5 & 27 & 90 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Σ est la matrice de variances-covariances (fictive) des returns logarithmiques quotidiens pour les zéro-coupons de maturités 1M, 3M et 6M.

Notre problème maintenant posé, nous allons calculer le VaR Best Hedge $\lambda^* = (\lambda_1^* \lambda_2^*)$ de notre 1 cashflow 3M (pour un mark-to-market de EUR 1). Les valeurs exactes de λ_1 et λ_2 qui minimisent le VaR de notre portefeuille couvert sont obtenues en appliquant la formule :

$$\lambda^* = -\left[{}^t\beta\Sigma\beta\right]^{-1}\beta\Sigma\alpha$$

Numériquement, on obtient :

$$\lambda_1^* = -0.8 \qquad et \qquad \lambda_2^* = -0.2333$$

En termes financiers, il est donc nécessaire d'être short de EUR 0.8 sur le 1M et de EUR 0.2333 sur le 6M (en mark-to-market) pour obtenir une couverture optimale « au sens du VaR » de notre cashflow 3M (pour un mark-to-market de EUR 1).

Le $\mathrm{VaR}_{1\sigma}$ du portefeuille couvert est approximativement de EUR 0.00265 à comparer à un $\mathrm{VaR}_{1\sigma}$ initial de EUR 0.01 pour le seul cashflow 3M.

Ceci représente une réduction du VaR de 73.5%.

17. Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A. and Vertterling W.T. (2002), Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press

1.3.4 « VaR Best Hedge » vs Couverture Multi-Factorielle

Dans cette dernière partie, nous allons montrer que les couvertures obtenues à l'aide des approches multi-factorielles zéro-coupon sont des approximations des couvertures de type VaR Best Hedge. De surcroît, la qualité de l'approximation dépend directement du pourcentage de la variance totale expliquée par les facteurs utilisés (shift, twist et butterfly).

Reprenons le problème de couverture tel que nous venons de le décrire mais en fixant cette fois le nombre d'instruments de couverture à trois (N=3). On cherche donc :

$$\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)$$

unique solution du problème de minimisation suivant :

$$\min_{\lambda} f(\lambda) \qquad avec \qquad f(\lambda) = ^t [\alpha + \beta\lambda]\, \Sigma\, [\alpha + \beta\lambda]$$

On suppose ici que la matrice de variances- covariances Σ est une matrice de dimension K dont les composantes $\sigma^2_{T,T'}$, sont les covariances entre Δz_T et $\Delta z_{T'}$ où z_T est le taux continu d'un zéro-coupon de maturité T.

Depuis l'article fondateur de Litterman et Scheinkman (1991), de nombreuses etudes ont été realisé afin de déterminer les principaux facteurs de déformation des courbes de taux zéro-coupon Etat à l'aide d'une analyse en composante principale sur les matrices de variances-covariances Σ. Les K facteurs Δf_k sont les vecteurs propres de la matrice Σ et les K valeurs propres σ_k^2 sont les variances associées aux facteurs Δf_k :

$$\Sigma \times \Delta f_k = \sigma_k^2 \times \Delta f_k$$

Puisque que cette diagonalisation revient à effectuer un changement de base (on passe de la base canonique à la base constituée des vecteurs propres de la matrice Σ), on a[18] :

$$\Sigma = PD^tP$$

D est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les variances σ_k^2 et P est la matrice de passage dont les colonnes sont les vecteurs propres Δf_k.

Ayant posé le problème, on peut maintenant réécrire f(λ) de la façon suivante :

$$f(\lambda) = ^t \left[{}^tP\,[\alpha + \beta\lambda]\right] D\, {}^tP\,[\alpha + \beta\lambda]$$

Puisque D est une matrice diagonale dont le terme diagonal générique σ_k^2 est la variance du facteur Δf_k et puisque la colonne n°k de la matrice P est le vecteur propre Δf_k de la matrice Σ on peut donc écrire :

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^{K} \sigma_k^2 \left\langle \alpha + \beta\lambda | \Delta f_k \right\rangle^2$$

Si l'on considère maintenant que seuls les trois premiers facteurs (shift, twist et butterfly) sont pertinents dans l'analyse des déformations de la courbe des taux zéro- coupon, on peut donc réécrire f(λ) en deux dans parties distinctes :

18. Les K vecteurs propres Δf_k (k=1...K) forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^K$: $P^{-1} = {}^tP$.

$$f(\lambda) = f_{facteurs\ principaux}(\lambda) + f_{facteurs\ résiduels}(\lambda)$$

avec :

$$f_{Facteurs\ principaux}(\lambda) = \sum_{k \in \{Shift, Twist, Butterly\}} \sigma_k^2 \langle \alpha + \beta\lambda | \Delta f_k \rangle^2$$

De ce qui précède, on conclue logiquement qu'une « bonne » approximation du VaR Best Hedge peut être obtenue en résolvant le système de trois équations linéaires à trois inconnues (λ_1, λ_2, λ_3) suivants :

$$\begin{cases} \langle \alpha + \beta\lambda | \Delta f_{Shift} \rangle & = 0 \\ \langle \alpha + \beta\lambda | \Delta f_{Twist} \rangle & = 0 \\ \langle \alpha + \beta\lambda | \Delta f_{Butterfly} \rangle & = 0 \end{cases}$$

Cette solution approchée n'est rien d'autre que la couverture obtenue par les méthodes zéro-coupon multifactorielles lorsque les facteurs sont calculés à partir de la matrice de variances-covariances Σ des variations des taux zéro-coupon.

1.4 Couverture par « Time Bucket »

Nous terminons ce chapitre sur les couvertures multifactorielles zéro-coupon par une présentation des techniques de couverture dite par « time bucket » qui sont des couvertures locales étendues globalement de proche en proche par la méthode du bootstrap [19].

Le problème consiste à couvrir à l'aide d'obligations au pair donc de maturités entières un échéancier de cashflows E tombant sur des dates quelconques :

$$E = \{F_i\}_{i=1...I}$$

On suppose que les cashflows F_i tombent à des dates non néssairement entières t_i et qu'ils sont ordonnés par maturités croissantes :

$$t_i < t_{i+1} \qquad (i = 1...I-1)$$

Nous allons procéder en trois étapes :

1. Projection ou « barbellisation » des cashflows individuels (bullet) sur les maturités entières adjacentes
2. Agrégation des nouveaux cashflows issus des barbells sur l'échéancier « au pair »
3. Calcul du portefeuille de couverture exact par la méthode du bootstrap

19. Pour les étudiants du Master IMAFA ayant suivi mon cours, cette section correspond à l'ancien exercice 4 (application des butterfly à la couverture d'un échéancier de cashflows)

1.4.1 « Barbellisation » d'un Zéro-Coupon (Cashflow)

On considère les trois cashflows suivants :

	Bullet	Gauche	Droite
Maturité	T<t<T+1	T	T+1
Montant	$\mathrm{F_t}$	$\mathrm{F_T}$	$\mathrm{F_{T+1}}$
Taux Zéro-Coupon	$\mathrm{z_t}$	$\mathrm{z_T}$	$\mathrm{z_{T+1}}$
Facteur d'Actualisation	ρ_t	ρ_T	ρ_{T+1}
Duration Modifiée	D_t^{mod}	D_T^{mod}	D_{T+1}^{mod}

TAB. 1.1 – Caractéristiques des Cashflows

On veut « barbelliser » le cashflow bullet sur les maturitées adjacentes T et T+1 de telle sorte que le synthétique constitué des deux cashflows adjacents ait les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} V_t & = V_T + V_{T+1} \qquad (\textit{market value inchangée}) \\ S_t & = S_T + S_{T+1} \qquad (\textit{sensibilité inchangée}) \end{cases}$$

avec :

$$V = F \times \rho \qquad et \qquad S = -F \times \rho \times D^{mod}$$

Par « barbelliser », on entend bien sûr « remplacer le cashflow existant sur la maturité t par deux cashflows sur les maturités adjacentes (T et T+1A) ».

Calculons les montants $\mathrm{F_T}$ et $\mathrm{F_{T+1}}$ qui respectent les deux contraintes ci-dessus.

En remplaçant V et S par leurs expressions respectives dans les deux propriétés ci-dessus, on trouve :

$$\begin{cases} F_t \times \rho_t & = F_T \times \rho_T + F_{T+1} \times \rho_{T+1} \\ F_t \times \rho_t \times D_t^{mod} & = F_T \times \rho_T \times D_T^{mod} + F_{T+1} \times \rho_{T+1} \times D_{T+1}^{mod} \end{cases}$$

La résolution formelle de ce système de deux équations à deux inconnues nous donne les montants $\mathrm{F_T}$ et $\mathrm{F_{T+1}}$ recherchés :

$$\begin{cases} N_T & = N_t \times \frac{\rho_t}{\rho_T} \times \frac{\left(D_{T+1}^{mod} - D_t^{mod}\right)}{\left(D_{T+1}^{mod} - D_T^{mod}\right)} \\ N_{T+1} & = N_t \times \frac{\rho_t}{\rho_{T+1}} \times \frac{\left(D_t^{mod} - D_T^{mod}\right)}{\left(D_{T+1}^{mod} - D_T^{mod}\right)} \end{cases}$$

Remarque : Il s'agit d'un barbell « zéro-coupon » de type « Cash-neutral ». On renvoie le lecteur au Chapitre 4 pour une étude des barbells et des stratégies de butterfly associées dans le contexte des obligations d'Etat à taux fixe et amortissement « in fine ».

1.4.2 Barbellisation et Agrégation de l'Echéancier

En utilisant le résultat obtenu au paragraphe 1.4.1, on va « barbelliser » les cashflows de l'échéancier de cashflows E donné en introduction de cette section de façon à le transformer en un échéancier de casflows E^* ne comportant que des maturités entières :

$$E^* = \{F_k^*\}_{k=1...K}$$

On suppose que les cashflow F_k^* tombent à des dates t_k entières :

$$t_k = k \qquad (k = 1...K)$$

En toute généralité, le processus de « barbellisation » du cashflow générique F_i de l'échéancier de cashflows initial E, consiste à projeter ce cashflow sur l'échéancier $\{t_k\}_{k=1...K}$ de façon à obtenir un échéancier de cashflows F_i^* défini par :

$$E_i^* = \left\{F_{i,k}^*\right\}_{k=1...K}$$

avec de façon évidente [20] :

$$F_{i,k}^* = \begin{cases} F_{Ent[t_i]} & si\ k = Ent\,[t_i] \\ F_{Ent[t_i]+1} & si\ k = Ent\,[t_i]+1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Au final, notre échéancier de cashflows barbellisé E^* est obtenu par sommation des échéanciers de cashflows E_i^* (i=1...I) :

$$E^* = \underset{i=1...I}{\cup} E_i^* \qquad et \qquad F_k^* = \sum_{i=1}^{I} F_{i,k}^*$$

Notons que puisque notre barbell « zéro-coupon » conserve la sensibilité et la market value (localement), ces deux propriétés sont de façon triviale vérifiées sur l'échéancier global (les market values et les sensibilités sont additives).

1.4.3 Couverture : Méthode du Bootstrap

On se propose maintenant de couvrir le nouvel échéancier de cashflows E^* calculé au paragraphe 1.4.2 à l'aide de K obligations au « pair » de maturités k (k=1...K) et dont les taux de coupon C_k (k=1...K) sont donnés.

La méthode du bootstrap consiste à couvrir le cashflow de plus grande maturité K avec l'obligation de maturité correspondante K puis à passer au cashflow de maturité K-1 et ainsi de suite jusqu'au 1A. Cependant à l'étape k, il est nécessaire de compléter l'échéancier de cashflows de l'étape k+1 par les coupons versés par l'obligation utilisée pour couvrir le cashflow de maturité k+1.

Calculons les montants nominaux N_k (k=1…K) des obligations de maturités k (k=1…K) nécessaires pour couvrir cet échéancier.

Procédons par étape de la maturité K à la maturité 1A :

20. $Ent\,[x]$ désigne la partie entière de x

$$
\begin{cases}
F_K^* & = N_K \times (1 + C_K) \\
F_{K-1}^* & = N_K \times C_K + N_{K-1} \times (1 + C_{K-1}) \\
\vdots & \vdots \\
F_k^* & = \sum_{i=k+1}^{K} N_i \times C_i + N_k \times (1 + C_k) \\
\vdots & \vdots \\
F_1^* & = \sum_{i=2}^{K} N_i \times C_i + N_1 \times (1 + C_1)
\end{cases}
$$

Avec les notations suivantes :

- Les F_k^* sont les cashflows à couvrir
- Les N_k sont les montants nominaux des obligations de couverture
- Les C_k sont les taux de coupon (en %) des obligations de couverture

Avec, dans les trois cas, k=1...K.

On peut écrire ce système d'équations sous forme matricielle :

$$
\begin{bmatrix}
1 + C_K & 0 & \cdots & 0 \\
C_K & 1 + C_{K-1} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
C_K & C_{K-1} & \cdots & 1 + C_1
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix}
N_K \\ N_{K-1} \\ \vdots \\ N_1
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
F_K^* \\ F_{K-1}^* \\ \vdots \\ F_1^*
\end{bmatrix}
$$

soit :

$$F^* = M \times N$$

Comme M est inversible car triangulaire, on peut finalement écrire :

$$N = M^{-1} \times F^*$$

Cette couverture est a priori parfaite dans le sens où on inverse les cashflows de l'échéancier initial. La qualité du hedge dépend de la périodicité de l'échéancier sur lequel on mappe les cashflows initiaux :

- Plus cette périodicité est petite, meilleur sera le hedge mais au prix d'un (trop) grand nombre de transactions
- Plus elle est grande, moins le hedge sera efficace mais plus il sera facile à mettre en place (et moins couteux en frais de transactions)

Ce type de hedge peut être utilisé pour couvrir des portefeuilles de type :

- Swap de taux car les swaps sont côtés au pair (quotidiennement) et sont des instruments « hors bilan » négociables facilement et à moindre coût (cf. Chapitre 5)
- Obligataires en utilisants les marchés de futures CT, MT et LT (lorsqu'ils existent) et seulement trois points dans la courbe pour le mapping (cf. Chapitre 7)

Dans la pratique, il faudra arrondir les nominaux obtenus de façon à avoir des multiples entiers de Million d'Euros (les marchés financiers sont des marchés de « gros » et non de « détails »). Cette remarque est d'ailleurs d'ordre générale et s'applique donc à tous les montages étudiés dans ce cours.

1.4.4 Remarques et Prolongements

Dans ce chapitre, nous avons présenté les techniques de couvertures zéro-coupon multi-factorielles pour des portefeuilles obligataires à taux fixes. Nous terminons par quelques remarques importantes permettant de situer ces techniques dans l'univers plus large des techniques de couverture tout en précisant leurs champs d'application.

Il existe différentes techniques de couvertures des instruments et/ou des portefeuilles taux.

On distingue généralement les couvertures instantannées en sensibilité (delta) ou en sensibilité et convexité (delta/gamma) des couvertures à horizon. Contrairement aux couvertures instantannées, les couvertures « à horizon » tiennent compte du temps (portage). On distingue de même les couvertures globales ou macro-couvertures (cas plus spécifiquement traité dans ce chapitre) des couvertures analytiques ou micro-couvertures fondées sur des relations d'arbitrages (cas traités plus généralement dans cet ouvrage). Enfin, parmi les couvertures globales on distingue des couvertures par « time bucket » (bootstrap) des couvertures multi-factorielles. Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Chazot C. et Claude P. [21] pour un exposé relativement exhaustif de ces techniques dans le contexte des swaps (Chap. 13).

Les techniques de couvertures zéro-coupon multi-factorielles peuvent être (sous réserve d'un traitement séparé des risques spéciques) appliquées à tout types de portefeuilles taux mono-devise. Les techniques de couvertures zéro-coupon multi-factorielles peuvent être appliquées aux portefeuilles taux mono-devises incorporants des obligations corporate, des repos, des futures CT, des futures LT ou des options.

Le principe général consiste à projeter ou « mapper » notre portefeuille sur un ensemble de taux zéro-coupon Etat/Swap correspondants à des dates de maturité pré-définies. Ce mapping s'effectue en deux étapes :

- Dans un premier temps, on remplace toutes les positions par leurs « équivalent-risques » en utilisant les relations d'arbitrages classiques largement décrites dans cet ouvrage. A ce stade on dispose d'un échéancier de cashflows certains (positifs ou négatifs) tombant à des dates quelconques
- Dans un deuxième temps, on va projeter chaque cashflow individuellement sur un échéancier fixe. Cette étape appellée « cashflow mapping » est décrite, entre autre, dans l'article de recherche de Mina J. [22] du Groupe RiskMetrics

Notons que ces deux projections ne sont pas neutres en terme de risque puisque certains risques spécifiques ne sont pas pris en compte (on pense en particulier au risque de volatilité sur les options, au risque de base sur les contrats futures LT ou au risque de credit spread sur les obligations corporate, par exemple). Il est bien évident que ces risques doivent être identifiés et faire l'objet d'un traitement spécifique (analyse, mesure et couverture éventuelle).

Les couvertures multi-factorielles ont pour principal avantage de combiner des effets de couvertures (compensation des sensibilités par facteur de risque) et les effets de diversification (compensation des sensibilités entre différents facteurs de risque via les corrélations).

Cette flexibilité permet de simplifier la construction des couvertures mais ces dernières sont néanmoins dépendantes des scénarios utilisés qui eux-mêmes dépendent des périodes sur lesquelles les variations de taux ont été observé. A contrario les techniques de couverture par « time bucket » sont exclusivement fondées sur les effets de « couvertures » et ne dépendent donc pas de scénarios prédéfinis. Par contre, elle sont plus « lourdes » à mettre en œuvre et ne sont vraiment opérationnelles que dans certains cas particuliers.

21. Chazot C. & Claude P. (1999), Les Swaps : Concepts et Applications, Economica (Collection Gestion)
22. Mina J. (1996), « Improved Cash Flow Map », Working Paper, RiskMetrics Group

Chapitre 2

Prêt-Emprunts, Forward-Forwards & FRAs

Introduction aux techniques de valorisation et de pricing (actualisation vs capitalisation, latent vs réalisé, etc.), aux risques financiers (risque de marchés, risque de crédit, risque de liquidité) et aux techniques d'arbitrages (FRA vs Forward-Forward) dans le contexte simple des instruments de taux à court terme (prêts-emprunts, forward-forward et FRA). Ce chapitre introduit en particulier le concept de taux forward et montre son importance fondamentale en tant que scénario central pour la valorisation d'une position de taux. Les Forward Rate Agreement (FRA) sont abordés de façon exhaustive (description des contrats, valorisation d'une position en cours de vie, applications en gestion de trésorerie). L'arbitrage simple entre un FRA et un Forward-Forward (de mêmes caractéristiques) sert de même à introduire les notions de produit « synthétique » et de pricing sous hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage (AOA). Enfin, l'étude complète de cet arbitrage est réalisé (montage et débouclage) afin d'illustrer les notions récurrentes de P/L anticipé, de risques couverts et de risques résiduels.

2.1 Marché Monétaire, Prêt/Emprunt et Conventions

Cette première section va nous permettre de présenter le marché interbancaire (composante du marché monétaire), les prêt-emprunts en blanc (principal instrument du marché interbancaire) et les conventions utilisées (taux et durées) sur les marchés de taux.

2.1.1 Le Marché Monétaire

Le marché monétaire est le lieu virtuel où les agents économiques placent leurs excédents de trésorerie ou financent leurs déficits de trésorerie. Il permet le financement à court terme (moins d'un an) des agents économiques principalement par le biais de prêts/emprunts négociés de gré-à-gré entre un prêteur et un emprunteur [1].

La rémunération du prêteur dépend du taux d'intérêt négocié, qui rémunère :

1. La privation de liquidité

1. A ce titre, les dettes à court terme des agents économiques ne se dinstinguent pas uniquement des dettes long termes par leurs maturités plus courtes. Les dettes à court terme correspondent à des besoins de trésoreries liées aux décalages ponctuels ou structurels entre les dépenses et les recettes de l'activité. Alors que les dettes à long terme sont avec les capitaux propres les contreparties (passif) des investissements réalisés par ces agents économiques pour la bonne marche de leurs activités (actif).

2. L'insolvabilité anticipée de l'emprunteur sur la période du prêt
3. L'inflation anticipée sur la période du prêt

Les principaux intervenants du marché monétaire sont les banques (banque centrale et banques commerciales), les investisseurs institutionnels (assureurs, sociétés de gestion, fonds de pension, etc.), les (grandes) entreprises et, bien sûr, le ou les Etats.

Le marché monétaire n'est pas une structure plate mais au contraire hiérarchisée dans laquelle le marché interbancaire tient un rôle primordial.

Dans la suite du cours nous nous intéresserons au seul marché interbancaire[2].

Le marché interbancaire est comme son nom l'indique la composante du marché monétaire réservée aux seules banques. Sur ce marché, les banques commerciales s'échangent, principalement au jour-le-jour mais aussi sur des maturités plus longues, leurs excédents/déficits de trésorerie.

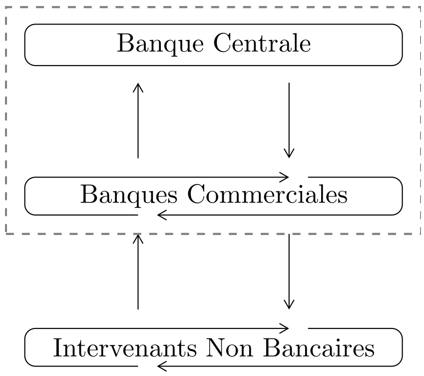

FIG. 2.1 – *Marchés Monétaire et Interbancaire*

Le solde du marché interbancaire est réalisé par un acteur fondamental des économies modernes : la banque centrale.

A ce stade[3], on peut considérer que les banques centrales ont pour principal objectif le contrôle du mix macroéconomique « croissance-inflation ». L'objectif intermédiaire des banques centrales est le contrôle de la liquidité bancaire à travers leur principal instrument, le taux directeur, qui détermine le taux payé par les banques commerciales pour des opérations de financement au jour-le-jour auprès de la banque centrale.

Les trois principales banques centrales dans le monde sont la Federal Reserve Bank (New York), l'European Central Bank (Francfort) et la Bank of Japan (Tokyo) qui interviennent sur les marchés interbancaires du dollar US, de l'Euro et du Yen, respectivement.

Notons que les marchés interbancaires sont directement liés à la monnaie dans laquelle les opérations de prêt-emprunt sont négociées. Ils sont la plupart du temps domestiques, à l'exception notable du marché monétaire de la zone Euro qui est commun à l'ensemble des pays membres.

Le marché interbancaire de la zone Euro dispose d'un indice de référence appelé Euribor (EURopean InterBank Offered Rate) qui est l'indice des taux interbancaires libellés en Euros. Plus précisement :

- C'est le taux moyen en Euro offert pour un dépôt à terme entre des banques de « première catégorie » ayant une activité significative sur le marché interbancaire en Euros.

2. Sauf mention contraire, on se placera dans le cas de grandes banques commerciales de la zone Euro dont le risque de crédit peut être négligé en première approximation.

3. Nous y reviendront au chapitre 5.

- Il est publié par la Fédération des Banques Européennes (EBF) tout les jours à 11:00 am CET pour des taux valeur Spot (J+2), diffusé en temps réel par Telerate et disponible sur www.euribor.org

Depuis son introduction en 1998, l'Euribor est devenu un indice « benchmark » qui sert de « sous-jacent » à de nombreux produits dérivés OTC ou organisés :

- Forward Rate Agreement (cf. pragraphe 2.4 dans ce chapitre)
- Swaps de taux d'intérêt (cf. Chapitre 5)
- Futures CT (cf. Chapitre 6)

L'indice Euribor n'est pas unique, il existe en fait 15 indices Euribor différents correspondants aux maturités suivantes :

- 1, 2, 3 semaines
- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 mois

Les taux Euribor sont des taux de type « Spot/Period ».

Notons enfin que l'Euribor « Spot/Next » (S/N) n'existe pas, il est « remplacé » par un indice spécifique des taux au jour le jour (O/N) appelé Eonia (Euro OverNight Index Average) [4].

2.1.2 Structure d'un Prêt/Emprunt

L'instrument privilégié négocié sur le marché interbancaire (qui seul nous intéressera ici) est le prêt/emprunt [5].

Dans une opération de prêt-emprunt classique, une banque A prête à une banque B un montant N de devises (Euros dans la suite sauf mention contraire) à partir d'une date t_1 (date de valeur) et jusqu'à une date t_2 (date de maturité ou d'échéance).

En échange de ce prêt, la banque B conscent à payer, un montant d'intérêt I proportionnel au montant nominal et à la durée du prêt, calculé sur la base d'un taux d'intérêt « normalisé » (voir plus bas). Le prêt est à intérêts post-comptés lorsqu'ils sont payés en date de maturité et à intérêts pré-comptés lorsqu'ils sont payés en date de valeur.

Dans la suite du cours seuls les prêts à intérêts post-comptés sont traités.

La date t_0 à laquelle les banques A et B se mettent d'accord sur les conditions du prêt-emprunt est la date de négociation. On a donc :

$$\boxed{\text{Date de Négociation } (t_0) < \text{Date de Valeur } (t_1) < \text{Date de Maturité } (t_2)}$$

On représente généralement les échéanciers de cashflows des prêts-emprunts (et des instruments de taux en général) sous forme graphique. On distingue deux types de flux :

- Les flux rentrants correspondent à des encaissements (trésorerie), ils sont représentés par une flêche vers le haut
- Les flux sortants correspondent à des décaissements (trésorerie), ils sont représentés par une flêche vers le bas

4. Tout comme l'Euribor, L'Eonia est un un indice « benchmark » qui sert notamment de sous-jacent aux Overnight Index Swap qui sont des swap de taux court terme cotés sur les mêmes maturités que celles des indices Euribor

5. Plus précisément, il s'agit du prêt/emprunt « en blanc », c'est-à-dire non gagé par des actifs financiers livrables à la contrepartie prêteuse en cas de défaut de l'emprunteur

Le graphique ci-dessous représente la situation du point de vue du prêteur (A). Le graphique représentant la situation du point de vue de l'emprunteur est identique au sens des flèches et aux signes des montants prés.

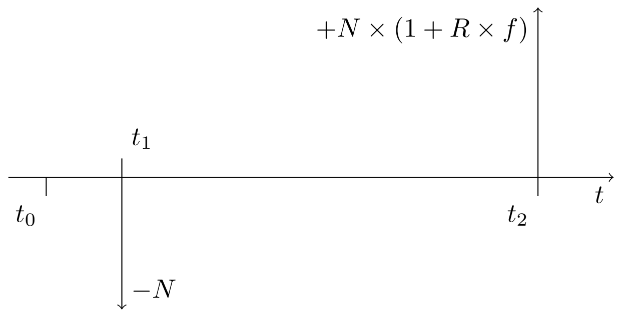

FIG. 2.2 – *Structure de Cashflows d'un Prêt-Emprunt*

Conformément à ce qui a été dit précédemment, le montant total remboursé par la banque B à la banque A est la somme du montant (nominal) emprunté N et des intérêts I, avec :

$$\boxed{I = N \times R \times f}$$

Avec les notations suivantes :

- N : Montant nominal du prêt
- R : Taux d'intérêt négocié pour ce prêt
- f : Fraction d'année correspondant à la durée du prêt

Les dates t_0, t_1 et t_2 correspondent toujours à des jours d'ouverture des marchés appelés « jours ouvrés » (hors weekends et jours fériés).

Notons enfin que les prêts dit « période » (sur au moins 2 jours) se négocient principalement sur des dates de valeurs égales à leur date de négociation plus 2 jours (J+2). Les taux correspondants sont dits « Spot/Period » (Spot = 2J).

Les prêts sur une journée (1J) se négocient plutôt sur les dates de valeur « J » (On parle de « JJ » pour « jour-le-jour ») et « Jour+1 » (Cf. tableau 2.1 ci-dessous).

Date de Valeur	Type de Taux	Acronyme
J	Overnight	O/N
J+1	Tom/Next	T/N
J+2	Spot/Next	S/N

TAB. 2.1 – Prêt/Emprunt sur 1 Journée

A titre d'exemple, le 01/12/03 (date de négociation), une Banque X (AAA) prête EUR 1M à une banque Y (AAA) au taux de 2% du 03/12/03 (date de valeur) au 24/12/03 (date de maturité) :

- Le 01/12/03 : X et Y négocient les conditions du prêt
- Le 03/12/03 : X crédite Y de EUR 1M
- Le 24/12/03 : Y crédite X de EUR 1,001,666.67

Le montant d'intérêt (coût du crédit) pour Y est calculé comme suit (taux linéaire et base Exact/360) :

$$I = EUR\,1M \times 2\% \times \left[\frac{21}{360}\right] = EUR\,1666.67$$

2.1.3 Conventions

Les marchés de taux font usages de conventions notamment pour le calcul des taux d'intérêt et des fractions d'années. Notons que ces conventions qui varient généralement selon les marchés, les produits et les devises n'ont cependant qu'un impact quantitif limité sur les quantités calculées et n'ont surtout aucun impact qualitatif sur la validité des formules générales de pricing et les raisonnements d'arbitrage donnés dans ce document. Ce paragraphe n'a pas pour vocation de couvrir le sujet de façon exhaustive mais souhaite simplement donner au lecteur les clés pour la prise en compte des ses conventions dans un cadre professionnel [6].

2.1.3.1 Conventions de Calcul des Durées

Ce sous-paragraphe est principalement basé sur une note interne de la Banque Internationale de Placement [7].

La fraction d'année entre deux dates (d'une même année) est calculée en divisant le nombre de jours entre ces deux dates par le nombre de jours total de l'année :

$$\boxed{f = \frac{Nombre\ de\ jours\ entre\ t_1\ et\ t_2}{Nombre\ de\ jours\ total\ dans\ l'ann\acute{e}e}}$$

La convention du calcul des fractions d'années est définie par deux « bases »:

- La base numérateur
- La base dénominateur

La base numérateur permet de calculer le nombre de jours entre les dates t_1 et t_2. Les principales bases numérateurs sont :

- NJE : On prend en compte le nombre de jours exact
- 30 : On considère que tous les mois font 30 jours

L'algorithme de calcul du nombre de jours entre les dates t_1 et t_2 lorsque la base numérateur est « 30 » est celui-ci :

```
SOIENT Y_i, M_i, D_i
(l'année, le mois et le jour de la date t_i  pour i=1,2)
SI D_1 = 31 ALORS D_1 = 30
SI D_2 = 31 ET D_1 = 30 ALORS D_2 = 30
NBJ = (Y_2 - Y_1)*360+(M_2 - M_1)*30+(D_2 - D_1)
```

La base dénominateur permet de calculer le nombre de jours total de l'année. Les principales bases dénominateurs sont :

- 360 : Une année a 360 jours

6. Notons qu'une troisième convention doit être prise en compte (mais ne sera pas évoquée dans ce cours), elle concerne le calcul des dates lorsque les dates « théoriques » de versement des coupons ne tombent pas sur des jours ouvrés. Dans la suite du cours, on ne tient pas compte des jours feriés.

7. Valérie Devers (1996), Documentation financière pour les courbes de taux, Département Analyse - Arbitrage, Informatique Front Office (Banque Internationale de Placement)

– 365 : Une année a 365 jours
– NBJ : Nombre de jours exact de l'année

Notons que lorsque la base dénominateur est « 360 » ou « 365 », la généralisation du calcul des fractions pour des dates t_1 et t_2 n'appartenant pas à la même année est immédiate.

Lorsque la base dénominateur est NBJ, la base numérateur est obligatoirement NBJ et le calcul de la fraction d'année consiste à décomposer la période $[t_1;\ t_2]$ en trois périodes contigues :

$$[t_1;\ t_2] = [t_1;\ 31/12/Y_1] \cup [01/01/Y_1+1;\ 31/12/Y_2-1] \cup [01/01/Y_2;\ t_2]$$

La fraction d'année de la période $[t_1;\ t_2]$ est logiquement définie comme la somme des fractions d'année correspondants à chaque sous-période :

$$f_{[t_1;\,t_2]} = f_{[t_1;\,31/12/Y_1]} + f_{[01/01/Y_1+1;\,31/12/Y_2-1]} + f_{[01/01/Y_2;\,t_2]}$$

avec de façon évidente :

$$f_{[01/01/Y_1+1;\,31/12/Y_2-1]} = Y_2 - Y_1 - 1$$

2.1.3.2 Conventions de Taux

On distingue généralement trois types de **conventions de taux** pour le calcul du montant d'intérêts et des facteurs d'actualisation :

1. Monétaire
2. Actuarielle
3. Continue

Pour une durée f donnée, le facteur d'actualisation (unique) DF s'écrit différemment selon la convention utilisée pour le calcul du taux[8]. :

$$\boxed{DF = \underbrace{\frac{1}{(1+f\times R_{mon})}}_{Monétaire} = \underbrace{\frac{1}{(1+R_{act})^f}}_{Actuarielle} = \underbrace{e^{-R_{cont}\times f}}_{Continue}}$$

On notera que la valeur actuelle du cashflow unique N+I (où I est le montant d'intérêts et N le montant nominal) est ègal à N dans les trois cas uniquement lorsque f est égal à 1 :

$$N = (N+I)\times DF$$

Ce n'est plus le cas lorsque f est strictement inférieur à 1 sauf pour la convention de taux « monétaire ».

Néanmoins, cette propriété n'est plus vraie pour un instrument dont le coupon annuel est versé en plusieurs fois car la convention de taux « monétaire » n'est pas techniquement compatible avec le principe d'actualisation :

8. Notons qu'il est parfois nécessaire de passer d'une convention de taux à une autre. C'est la cas en particulier lorsque l'on doit construire des courbes de taux zéro-coupon à partir d'instruments hétérogènes en terme de conventions de taux. Les formules de passage peuvent êtres directement obtenues à partir des formules données dans l'encadré ci-dessous

$$N \neq \frac{N \times R_{mon}}{1 + R_{mon}} + \frac{N + N \times R_{mon}}{1 + 2 \times R_{mon}}$$

Ces remarques expliquent pourquoi la convention de taux « monétaire » [9], la plus simple à comprendre et à calculer, est utilisée pour les instruments à court-terme typiques du marché monétaire qui :

- Se négocient sur des périodes inférieures à 1 an non standardisées
- Ne servent pas de coupons intermédiaires

Par contre, on utilise la convention de taux « actuarielle » pour les instruments « couponnés » comme les obligations (cf. Chapitre 3). La raison est essentiellement mathématique puisqu'en convention de taux « actuarielle », on a bien :

$$N = \frac{N \times R_{act}}{(1 + R_{act})^1} + \frac{N + N \times R_{act}}{(1 + R_{act})^2}$$

A noter, qu'un taux actuariel dépend de la période sur laquelle il s'applique qui est de 1A dans les formules précédentes. Si l'on considère le taux actuariel bi-annuel (applicable à une période de 6M), cette formule devient (par convention) pour le montant d'intérêt et le facteur d'actualisation respectivement :

$$I = N \times \frac{R_{act}^{bi-annuel}}{2} \qquad et \qquad DF = \left(1 + \frac{R_{act}^{bi-annuel}}{2}\right)^i \qquad avec \qquad i = 1,2$$

On montre facilement que la somme des valeurs actuelles des cashflows tombants à 6M et à 1A est précisément égal à N lorsque les taux sont « actuariels »:

$$N = \frac{N \times \frac{R_{act}^{bi-annuel}}{2}}{\left(1 + \frac{R_{act}^{bi-annuel}}{2}\right)} + \frac{N \times \frac{R_{act}^{bi-annuel}}{2} + N}{\left(1 + \frac{R_{act}^{bi-annuel}}{2}\right)^2}$$

Cette propriété se généralise à une périodicité quelconque p :

$$N = \sum_{k=1}^{p} \frac{N \times \frac{R_{act}^{p-annuel}}{p}}{\left(1 + \frac{R_{act}^{p-annuel}}{p}\right)^k} + \frac{N}{\left(1 + \frac{R_{act}^{p-annuel}}{p}\right)^p}$$

Dans ce cadre, le taux « continue » se défini comme le taux pour lequel le flux de coupon est continue, ce qui mathématiquement correspond à un taux actuariel de périodicité infinie.

$$R_{continue} = \underset{p \to +\infty}{Lim} R_{actuariel}^{p-annuel}$$

Les taux continus sont principalement utilisés dans la littérature académique du fait d'une simplicité d'écriture accrue liée aux « bonnes » propriétés de la fonction exponentielle.

Dans la suite de ce chapitre, on utilisera les conventions du marché monétaire, à savoir des taux « monétaires » et une base 30/NJE.

9. Cette convention de taux est dite « monétaire » par abus de langage, il s'agit en effet de la convention de taux « linéaire » qui est devenu « monétaire » du fait de son application unique sur le marché monétaire

2.2 Valorisation, Pricing & Risques

Les notions de valorisation, de pricing et de risques sont récurrentes en finance de marchés et constituent une part importante du travail quotidien des « Front Office » des banques et ce quel que soient les marchés et les instruments financiers traités. Valorisation et calcul des risques des positions sont aussi deux prérogatives des « Services de Contrôle des Risques » qui sont sensés donner à la direction générale des banques ainsi qu'aux autorités de contrôle une vision indépendante du « Front Office ».

2.2.1 Valorisation vs Pricing

Les notions de valorisation et de pricing sont parfois utilisées de façon subsituables pour décrire une même réalité.

Pourtant, ces deux notions ne sont absolument pas équivalentes.

On appelle **pricing** le processus qui consiste à calculer un (juste) « prix » pour un instrument financier donné.

Le concept de « prix » peut prendre des formes différentes selon les instruments traités. Il peut s'agir d'un montant en devises pour une action mais aussi pour une devise vis-à-vis d'une autre (on parle de taux de change), d'un pourcentage pour une obligation (prix pied de coupon exprimé en pourcentage du nominal de l'obligation) ou pour un contrat futures (CT ou LT), d'un taux d'intérêt pour un prêt/emprunt (taux spot) ou un FRA (taux forward) ou encore d'un spread (on parle aussi de marge) pour un asset-swap (marge au dessus du taux Euribor) ou un credit default swap par exemple[10].

Pricer c'est donc donner un « prix » unitaire et « mid-market » (prix milieu de fourchette) pour un instrument financier donné où le concept de « prix » dépend des spécificités de l'instrument (techniques, conventionnelles et/ou contractuelles). Ce « prix » est théoriquement indépendant du montant nominal souhaité mais en pratique la liquidité nécessairement imparfaite des marchés impose souvent de devoir donner un prix en « bid/ask spread » (fourchette achat/vente) qui peut varier en fonction du montant nominal souhaité.

De façon triviale, pricer un instrument financier c'est donc répondre à la question suivante :

Quel est le juste « prix » de cet instrument ?

On appele **valorisation** le processus qui consiste à calculer la « valeur de liquidation » d'une position donnée en cours de vie. Cette valeur est toujours exprimée dans la devise de la position (ou parfois dans la devise comptable de l'entité détentrice de la position si ces deux devises diffèrent). Cette valeur dépend donc directement du montant nominal ou de la taille de la position (elle est de fait propotionnelle à la taille de la position).

De façon générale, deux approches sont envisageables pour valoriser une position :

- En inversant (fictivement) la position en prenant une position de sens contraire (même instrument et même marché) sur le marché secondaire. Par exemple, le détenteur d'obligations pourra vendre ses obligations au prix du marché et en déduire son gain ou sa perte compte tenu du prix d'achat initial, du différentiel de coupon couru et du montant nominal de la position
- En couvrant (fictivement) la position en construisant une couverture via un ou plusieurs instruments éventuellement différents (de l'instrument à couvrir) sur un ou plusieurs marchés éventuellement différents (du marché de l'instrument à couvrir). C'est la cas notamment lorsqu'il n'y a pas de marché secondaire comme pour les prêt/emprunts négociés sur le marché interbancaire, par exemple

10. Cette liste n'est pas exhaustive, on pense en particulier à la volatilité pour les options et, plus exotique, à la corrélation pour les CDO

De façon triviale, valoriser une position en cours de vie c'est répondre à la question suivante :

Qu'est-ce que je gagne/perd si je « solde » ma position aujourd'hui ?

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons essentiellement nous intéresser au processus de valorisation. [11]

Par exemple, la Banque A peut, à une date t ($t_1 < t < t_2$), vouloir valoriser la position que constitue le prêt en cours de vie octroyé à la banque B.

Ainsi, notre banque A pourra chercher à :

- Inverser (et donc annuler) sa position auprès de la banque B avec paiement ou réception d'une soulte qui représente la valorisation du latent de la position (voir plus bas). Notons que cette solution annule simultanément le risque de taux et le risque de crédit
- Couvrir sa position en prenant une position se sens contraire vis-à-vis d'une banque tièrce C. Notons que cette solution annule le risque de taux mais pas le risque de crédit [12]

Dans le paragraphe suivant nous allons décrire le processus de valorisation d'un prêt-emprunt par couverture de la position résiduelle.

2.2.2 Valorisation : Latent & Réalisé

La valorisation d'une position en cours de vie (quel que soit l'instrument financier) est la somme de deux composantes faisant l'objet de deux calculs séparés :

- La **valeur latente** (« le latent ») qui correspond à la capitalisation (au jour de valorisation) des cashflows passés de la position
- La **valeur réalisée** (« le réalisé ») qui correspond à l'actualisation (au jour de valorisation) des cashflows futurs de la position

On peut donc écrire :

$$\boxed{V_{Total} = V_{Réalisé} + V_{Latent}}$$

Avant d'illustrer ces concepts dans le cadre simple du prêt/emprunt, faisons deux remarques d'ordre général :

- Le calcul du réalisé inclue généralement un financement « théorique » de la position lorsque cette position est prise dans le cadre d'une activité pour « compte propre » (trading pour compte propre). Ce n'est pas le cas lorsque la position est prise dans le cadre d'une activité pour « compte de tiers » (gestion pour compte de tiers)
- Le calcul du latent n'est pas toujours réalisable par actualisation simple des cashflows futurs car cette technique est envisageable uniquement lorsque les cashflows sont certains. Par « actualisation des cashflows futurs », on entend donc toutes les techniques qui généralisent le concept d'actualisation des cashflows certains aux cashflows incertains. Cette valeur latente est par ailleurs calculée à la date de valeur conventionnelle pour l'instrument en question (J+2 pour un prêt-emprunt « période », par exemple). Le calcul en valeur « jour » revient à ramener cette valeur latente de la date de valeur à la date du jour de valorisation via un ou plusieurs emprunts (resp. prêts) successifs si cette valeur latente est positive (resp. négative)

11. Les exemples de pricing évoqués plus haut seront abordés plus loins dans ce chapitre et très largement dans les chapitres suivants

12. Néanmoins, comme indiqué au début de ce chapitre, on suppose que le risque de crédit est négligeable pour les banques de première catégorie

Passons maintenant à la valorisation du prêt de la Banque A à la banque B. On se place donc du point de vue de la banque A à une date de valorisation t_3 (dont la date de valeur spot est t_4) :

$$\boxed{t_0 < t_1 < t_3 < t_4 < t_2}$$

On commence par **calculer la valeur latente du prêt**, ce qui revient à calculer la valeur actuelle du cashflow futur correspondant au remboursement du montant nominal du prêt et du paiement des intérêts.

La banque A va donc négocier auprès d'une banque C un emprunt pour un montant nominal N_2 au taux R_2 et de date maturité t_2 (date de maturité du prêt originel). L'objectif de la banque A est donc d'annuler le cashflow en date de maturité.

Sur le graphique 1.3 ci-dessous, on représente les cashflows du prêt originel en traits pleins et les cashflows du nouvel emprunt en traits pointillés.

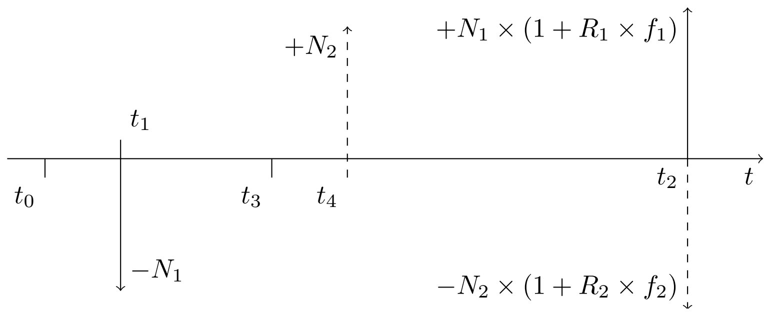

FIG. 2.3 – *Inversion d'une Position de Prêt-Emprunt*

Quel montant Nominal N_2 la banque A doit-elle emprunter ?

Un calcul simple nous donne :

$$N_2 = -N_1 \times \frac{(1 + R_1 \times f_1)}{(1 + R_2 \times f_2)}$$

Notons que cette procédure revient (en quelque sorte) à « ramener » le cashflow d'origine de la date de maturité t_2 à la date de valeur de l'emprunt t_4.

Afin de calculer une valorisation en valeur « jour », il est nécessaire de ramener ce cashflow en date de négociation de l'emprunt t_3, date à laquelle se pose le problème de valorisation. Pour ce faire, la banque A pourra contracter :

- Un emprunt valeur « J » et date maturité valeur « J + 1 » appelé emprunt « overnight » (ON)
- Un emprunt valeur « J + 1 » et date maturité valeur « J + 2 » appelé emprunt « Tom-Next » (TN)

Au final, la valeur réalisée du prêt correspond au montant emprunté via les 3 emprunts successifs et contigus est donnée par :

$$V_{Latent} = \frac{-N_2}{\left(1 + R_{ON}^{t_3} \times f_{ON}^{t_3}\right) \times \left(1 + R_{TN}^{t_3} \times f_{TN}^{t_3}\right)}$$

Ce montant n'est autre que la valeur latente du cashflow d'origine $+N_1 \times (1 + R_1 \times f_1)$ calculé en valeur « jour ».

Calculons maintenant **la valeur réalisée du prêt** c'est-à-dire la valeur actuelle des cashflows passés.

Le prêt en lui-même n'a pas généré de cashflow entre les dates t_1 et t_2. Mais comme le calcul est effectué par une banque, nous allons calculer la valeur du financement théorique du prêt.

Rappelons que la banque A est prêteuse vis-à-vis de la banque B d'un montant nominal N_1. Le calcul du financement théorique du prêt revient à supposer que la banque A « finance » cette sortie de cash par des emprunts overnight successifs. La valeur « jour » du latent est donc simplement égale au montant prêté N_1 capitalisé aux taux overnight successifs :

$$V_{Réalisé} = -N_1 \times \prod_{i=0}^{t-1} (1 + R_{i,i+1} \times f_{i,i+1})$$

Insistons sur le fait que dans ce calcul, seul le calcul du latent en date de valeur (J+2) est spécifique à notre position de prêt-emprunt. Par contre, le calcul du réalisé (J) et le calcul du latent en date de valorisation (J) sont génériques, c'est-à-dire les mêmes pour tous les instruments financiers.

2.2.3 Typologie des Risques et Risque de Taux

Le concept de risque en général et de risque de taux en particulier est omniprésent tout au long de ce cours. Nous décrivons ici les risques de taux, de crédit et de liquidité dont l'interprétation diffère selon qu'ils s'appliquent à la gestion du latent ou du réalisé.

Soit V_t la valorisation de la position en t (où t est la date du jour) et $\tilde{V}_{t+k}$ la valorisation ex-ante de la position en t+k (où k est un nombre quelconque strictement positif de jours ouvrés).

On appelle « Profit & Loss » (P/L) ex-ante la différence entre ces deux quantités :

$$\boxed{\widetilde{P/L}_{t,t+k} = \tilde{V}_{t+k} - V_t}$$

Le risque est fondamentalement lié à l'incertitude sur la valorisation de la position à horizon t+k. Plus présisément, il y a risque du fait de l'incertitude sur les facteurs qui rentrent dans le calcul de la valorisation de la position à cette date t+k.

Il nous faut distinguer les risques portant sur le réalisé (risques de financement) des risques portant sur le latent qui sont de natures différentes :

1. Le financement des positions (réalisé) est en général géré de façon agrégé (par devise) par les desks « marchés monétaires » ou les trésoreries des banques tandis que les positions elles-mêmes (latent) sont en général gérées par des desks spécialisés (par types d'instruments financiers ou par types de marchés ou encore par types de stratégies)
2. Les risques sur les positions résiduelles (latent) sont en général bien plus importants en terme de moins-value potentielle (exprimée dans la devise de la position) que les risques liés au financement de ces positions (réalisé) [13]

13. Cette différence d'ordre de grandeur entre les risques sur le latent et les risques sur le réalisé est évidemment assumée puisque ces risques sur le latent sont la contrepartie des gains attendus sur les desks en charge de ses positions, desks qui constituent des centres de profit pour les banques tandis que les activités de gestion de trésorerie sont des activités importantes certe mais secondaires qui ne participent que marginalement aux résultats des banques

Concernant **le réalisé de la position**, le risque porte sur le taux d'intérêt auquel la trésorerie de la position pourra être refinancée. Ce risque est logiquement appelé risque de (re-)financement et peut se décliner en trois composantes :

- Le risque de « spread/marge de crédit » est le risque de devoir refinancer une trésorerie « short » à des taux plus plus élévés du fait d'une dégradation de la solvabilité de la banque (perçue par le marché interbancaire et éventuellement mais pas obligatoirement sanctionnée par les agences de notation) entraînant le marché interbancaire à exiger une prime pour rémunérer le risque de crédit
- Le risque de liquidité est le risque de devoir refinancer une trésorerie « short » (resp. « long ») à des taux plus élevés (resp. faibles) du fait d'un reflu de la liquidité sur le marché. Notons que ce risque est de fait limité pour les banques commerciales dont la liquidité est assurée par la banque centrale en dernier ressort
- Le risque de taux est le risque de devoir refinancer une trésorerie « short » (resp. « long ») à des taux plus élevés (resp. faibles) indépendamment des deux facteurs précédents. Le facteur principal qui conditionne les variations des taux interbancaires est la perception par le marché des changements de politique monétaire de la banque centrale

Ces différents risques sont toujours les mêmes quelles que soient les positions sous-jacentes.

Par contre, les risques qui portent sur le latent des positions sont intimement liés aux types d'instruments utilisés (cash, dérivés, options ...) ainsi qu'aux types de marchés « sous-jacents » (taux, action, change, matières premières, ...) sur lesquels ses instruments sont traités. L'étude de ces risques doit être réalisée par types d'instruments ce qui sera fait dans les chapitres qui suivent pour les instruments de taux.

Pour le moment, regardons les risques qui portent sur le réalisé de notre position de prêt-emprunt.

Concernant **le latent de la position** de prêt (on se place toujours du point de vue de la banque A), le risque porte principalement sur le taux d'intérêt qui sert à l'actualisation du montant à recevoir en date de maturité du prêt (remboursement du montant nominal et paiement des intérêts du prêt) mais pas uniquement puisque le risque de défaut de la contrepartie (la banque B) ne peut être totalement exclue. Ces risques peuvent se décliner à travers trois composantes :

- Le risque de crédit a deux sous-composantes distinctes :
  - Le risque de « spread/prime de crédit » qui est le risque de devoir actualiser le cashflow à un taux plus élévé du fait d'une dégradation de la solvabilité de la banque B (perçue par le marché interbancaire et/ou sanctionnée par les agences de notation) entraînant le marché interbancaire à exiger une prime pour rémunérer le risque de crédit
  - Le risque de défaut qui est précisément le risque que la banque B fasse défaut sur tout ou partie des intérêts à payer et/ou sur tout ou partie du montant nominal du prêt
- Le risque de liquidité est le risque de devoir actualiser le cashflow à un taux plus élévé du fait d'un reflu de la liquidité sur le marché interbancaire. Notons que ce risque est de fait limité pour les banques commerciales dont la liquidité est assurée par la banque centrale en dernier ressort
- Le risque de taux est le risque de devoir actualiser le cashflow à un taux plus élévé indépendamment des deux facteurs précédents. Le facteur principal qui conditionne les variations des taux interbancaires est la perception par le marché des changements de politique monétaire de la banque centrale

Dans la suite du cours, nous nous intéresserons essentiellement aux risques portants sur le latent des positions dont le risque de taux qui est le sujet principal du cours.

Terminons par plusieurs remarques d'ordre général sur le risque de taux (latent).

La valeur latente d'une position (quel que soit l'instrument financier) est sensible aux variations du taux d'intérêt (effet d'actualisation). Toutes choses égales par ailleurs, les valorisations évoluent en sens inverse des taux d'intérêt :

$$\begin{cases} R \downarrow \Rightarrow \quad V_{Latent} \uparrow & (risque\ de\ l'emprunteur/vendeur) \\ R \uparrow \Rightarrow \quad V_{Latent} \downarrow & (risque\ du\ prêteur/achetteur) \end{cases}$$

Dans le cas des prêt-emprunts et des obligations à taux fixe (cf. Chapitre 3), la relation entre les deux quantités est déterministe[14].

La **sensibilité** est généralement mesurée par la dérivée mathématique de la valeur latente de la position par rapport au taux d'intérêt intervenant dans le facteur d'actualisation :

$$Sensibilit\acute{e} = \frac{dV_{Latent}}{dR}$$

On montre que la sensibilité des instruments à taux fixes (prêt-emprunts et obligations) augmente avec la maturité des dits instruments. **Ces instruments sont donc d'autant plus risqués que leur maturité est lointaine.** En particulier, le risque de taux sur les instruments du marché monétaire (prêt-emprunts à moins d'1A) est en général considéré comme négligeable ou tout au moins secondaire comparé au risque de taux sur les instruments du marché obligataire dont les maturités vont du 2A au 30A[15].

La sensibilité est un indicateur de risque très utilisé sur les marchés de taux du fait de sa simplicité. Il faut néanmoins garder à l'esprit, qu'il s'agit d'un indicateur « local » qui ne tient évidemment pas compte de la convexité de la relation prix-taux ainsi que du passage du temps.

2.3 Forward-Forward et Taux Forward

On appelle « Forward-Forward » un prêt-emprunt dont la date de valeur n'est pas une date spot conventionnelle mais une date plus lointaine appellée date forward. Par opposition aux taux d'intérêts « spots » des prêts-emprunts « spots », le taux d'intérêt d'un « Forward-Forward » est appellé « Taux Forward ».

2.3.1 Montage et Calcul

Les « Forward-Forwards » ne sont généralement pas cotés dans le marché interbancaire mais il est possible de créer un « synthétique » d'un prêt Forward-Forward (T_1,T_2) à partir d'un prêt de maturité T_2 et d'un emprunt de maturité T_1 (cf. tableau 2.2).

14. Aux risques de crédit et de liquidité prés

15. Ce constat est renforcé par le fait que les positions de trading et d'arbitrage sur le marché obligataire (secondaire) ont des horizons (bien) plus courts les maturités résiduelles des titres traités alors que les positions sur le marché monétaire (primaire) sont généralement tenues jusqu'à échéance

	T_0	T_1	T_2
Forward-Forward		$-N$	$+N \times \left(1 + R_{1,2}^{Fwd} \times f_{1,2}\right)$

TAB. 2.2 – Cashflows d'un Forward-Forward

On montre qu'un tel prêt est équivalent (en terme de cashflows) aux deux opérations combinées décrites dans le tableau 2.3 ci-dessous :

	Opération 1	Opération 2
Sens	Prêt	Emprunt
Date de valeur	T_0	T_0
Date de maturité	T_2	T_1
Taux	$R_{0,2}^0$	$R_{0,1}^0$
Nominal	$\frac{N}{1+R_{0,1}^0 \times f_{0,1}}$	$\frac{N}{1+R_{0,1}^0 \times f_{0,1}}$

TAB. 2.3 – Forward-Forward Synthétique (Détail des Opérations)

Pour le prouver, il suffit de comparer les structures de cashflows de l'opération Forward-Forward et de son « synthétique ».

	T_0	T_1	T_2
Opération 1	$+\frac{N}{1+R_{0,1}^0 \times f_{0,1}}$	$-N$	
Opération 2	$-\frac{N}{1+R_{0,1}^0 \times f_{0,1}}$		$+N \times \frac{1+R_{0,2}^0 \times f_{0,2}}{1+R_{0,1}^0 \times f_{0,1}}$
Total		$-N$	$+N \times \frac{1+R_{0,2}^0 \times f_{0,2}}{1+R_{0,1}^0 \times f_{0,1}}$

TAB. 2.4 – Forward-Forward Synthétique (Cashflows)

On a donc reproduit un prêt forward « synthétique » dont le taux forward « implicite » est donné par la formule ci-dessous (obtenue par identification des cashflows en date T_2 donnés dans les tableaux 2.2 et 2.4) :

$$\boxed{R_{1,2}^{fwd} = \frac{1}{f_{1,2}} \times \left[\frac{1 + R_{0,2} \times f_{0,2}}{1 + R_{0,1} \times f_{0,1}} - 1\right]}$$

Le taux forward est dit « implicite » car du fait de l'absence d'un marché des « Forward-Forward » il est calculé implicitement à partir des taux spots.

2.3.2 Propriétés Remarquables des Taux Forwards

Nous allons dans ce paragraphe énoncer et démontrer deux propriétés fondamentales des taux forwards.

Si les taux forwards implicites dans la courbe des taux interbancaires se réalisent systématiquement alors la valorisation d'un prêt/emprunt (latent plus réalisé) est nulle à chaque date de valorisation quel que soit le mode de financement.

Pour le prouver, considérons un prêt négocié à une date T_0 quelconque, de date de valeur T_1 (spot) et de date de maturité T_2. Plaçons-nous à une date t quelconque comprise entre T_1 et T_2 et démontrons que la valorisation du prêt est nulle à cette date quel que soit le mode financement.

<u>Cas n°1 :</u> On finance le prêt par un emprunt de T_1 à t

Pour le latent (valable dans les trois cas), on peut écrire en appliquant notre hypothèse de réalisation des taux forwards :

$$\begin{aligned} V_{Latent} &= N \times \frac{1 + R^{spot}_{T_1,T_2} \times f_{T_1,T_2}}{1 + R^{spot}_{t,T_2} \times f_{t,T_2}} \\ &= N \times \frac{1 + R^{spot}_{T_1,T_2} \times f_{T_1,T_2}}{1 + R^{fwd}_{t,T_2} \times f_{t,T_2}} \\ &= N \times \left(1 + R^{spot}_{T_1,t} \times f_{T_1,t}\right) \end{aligned}$$

Le réalisé s'écrit simplement dans ce cas :

$$V_{Réalisé} = -N \times \left(1 + R^{spot}_{T_1,t} \times f_{T_1,t}\right)$$

Au total, on a donc bien :

$$V_{Total} = V_{Latent} + V_{Réalisé} = 0$$

<u>Cas n°2 :</u> On finance le prêt par K emprunts successifs entre T_1 et t

Dans ce cas et avec des notations évidentes, le montant du réalisé s'écrit :

$$V_{Réalisé} = -N \times \prod_{k=0}^{K-1} \left(1 + R^{spot}_{t_k,t_{k+1}} \times f_{t_k,t_{k+1}}\right)$$

Par hypothèse puisque les forwards se réalisent, on peut reécrire cette expression en remplaçant les taux spots par les taux forwards correspondants :

$$V_{Réalisé} = -N \times \left(1 + R^{spot}_{t_0,t_1} \times f_{t_0,t_1}\right) \times \prod_{k=1}^{K-1} \left(1 + R^{fwd}_{t_k,t_{k+1}} \times f_{t_k,t_{k+1}}\right)$$

Par définition d'un taux forward, on peut reécrire cette expression en ne faisant intervenir que le taux spot sur la période [T_1; t] :

$$V_{Réalisé} = -N \times \left(1 + R^{spot}_{T_1,t} \times f_{T_1,t}\right)$$

On retrouve donc le cas n° 1.

<u>Cas n°3 :</u> On finance le prêt par K emprunts successifs entre T_1 et t dont le dernier (en cours) a une date de maturité comprise (strictement) entre t et T_2

En appliquant le résultat précédent au calcul du réalisé en date $t_{K\text{-}1}$, on trouve :

$$V_{Réalisé,t_{K-1}} = -N \times \left(1 + R^{spot}_{T_1,t_{K-1}} \times f_{T_1,t_{K-1}}\right)$$

Cette valeur est le montant qui a été emprunté de t_{K-1}à t_K ($t_{K-1} < t < t_K$).

Le calcul du réalisé en date t nécessite d'actualiser le cashflow correspondant au remboursement du nominal et au paiement des intérêts de t_K à t :

$$V_{Réalisé} = \frac{-N \times \left(1 + R^{spot}_{T_1,t_{K-1}} \times f_{T_1,t_{K-1}}\right) \times \left(1 + R^{spot}_{t_{K-1},t_K} \times f_{t_{K-1},t_K}\right)}{\left(1 + R^{spot}_{t,t_K} \times f_{t,t_K}\right)}$$

Par définition d'un taux forward, on peut reécrire cette expression en faisant intervenir le taux forward sur la période $[t_K; t]$:

$$V_{Réalisé} = -N \times \left(1 + R^{spot}_{T_1,t_{K-1}} \times f_{T_1,t_{K-1}}\right) \times \left(1 + R^{fwd}_{t_{K-1},t} \times f_{t_{K-1},t}\right)$$

Et finalement, toujours par définition d'un taux forward, cette expression se réduit à :

$$V_{Réalisé} = -N \times \left(1 + R^{spot}_{T_1,t} \times f_{T_1,t}\right)$$

Ce qui termine la preuve de la propriété.

Cette propriété a un corrolaire tout aussi fondamental :

Les taux forwards sont des estimateurs non biaisés des taux spots futurs correspondants.

Ce résultat se démontre simplement par un raisonnement par l'absurde.

Supposons pour fixer les idées que les taux forwards sont des estimateurs biaisés par défaut des taux spots futurs[16] :

$$R^{spot}_{t,t'} = R^{fwd}_{t,t'} + \epsilon \qquad avec \qquad \epsilon > 0$$

Dans ce cas, une stratégie évidente consiste à prêter « à taux fixe » et à financer ce prêt par une suite d'emprunts successifs, ce qui revient (par abus de langage) à être emprunteur « à taux variable ».

On est précisément dans le cadre de la propriété 1.

Pour conclure cette démonstration sans effort superflu, il suffit de remarquer que notre hypothèse revient à dire que les taux forwards se réalisent à ε-prés (ε > 0). En conséquence, la valeur réalisée (financement) peut s'écrire (dans les trois cas) comme la somme de deux composantes :

- La composante « réalisation des taux forwards »
- La composante « biais systématique »

Au final, la valorisation totale de la position se réduit à la composante « biais systématique » qui est positive par hypothèse.

Il est donc possible de « jouer » ce biais systématique pour générer (en moyenne) un profit sans risque ce qui n'est pas possible sous hypothèse AOA.

Ce qui termine la preuve de la propriété.

On constate donc que le risque ne porte donc pas sur la variation des taux d'intérêts par rapport à leurs niveaux actuels (comme on pourrait le penser a priori) mais sur la différence entre les taux réalisés et les taux forwards.

16. Notons que l'on parle bien ici de taux (spots) futurs et non de taux Futures c'est-à-dire des taux des contrats Futures CT (cf. Chapitre 6)

2.4 Forward Rate Agreement

Les Forward Rate Agreements (FRAs) sont probablement les instruments dérivés de taux les plus simples. On commence par en donner les caractéristiques principales puis on explique comment valoriser une position de FRA en cours de vie et comment pricer un FRA.

2.4.1 Définition d'un FRA

Un FRA est une **garantie de taux d'intérêt pour un emprunt (achat) ou un prêt (vente) à terme** dont le montant, la date de départ et la durée sont pré-déterminés[17].

Contrairement aux Forward-Forwards, les FRAs sont des instruments « hors bilan » dans la mesure où il n'y a pas de prêt ou d'emprunt (cash) à l'échéance du FRA (date de départ du prêt/emprunt). Le prêt/emprunt, appelé sous-jacent du FRA, sert simplement de référence (fictive) à la construction du FRA.

A l'échéance, le FRA est liquidé (cash settlement) par le versement du différentiel entre le taux R_{FRA} (taux du FRA défini en date de négociation) et le taux constaté sur le marché R_{FIXING} (taux du « fixing Euribor » en date d'échéance du FRA) actualisé et ajusté par le montant négocié et la durée du prêt-emprunt sous-jacent :

$$\boxed{Cash\ Settlement = \frac{N \times (R_{FIXING} - R_{FRA}) \times f}{(1 + R_{FIXING} \times f)}}$$

A des fins de transparence et de normalisation, le taux R_{FIXING} qui sert de référence au calcul du cash settlement n'est pas un « vrai » taux de marché mais un indice représentatif des taux du marché interbancaire, l'Euribor. On rappelle que cet indice est calculé une fois par jour sur les principales maturités standards du marché interbancaire et publié à heure fixe, on parle de « fixing Euribor » (cf. paragraphe 2.1.1).

Les FRA servent essentiellement à la gestion du risque de taux CT que ce soit sur le latent ou sur le réalisé (cf. Tableau 2.5).

	Latent	Réalisé
Achat	Se couvrir contre une hausse des taux CT	Se garantir un taux d'emprunt à terme
Vente	Se couvrir contre une baisse des taux CT	Se garantir un taux de prêt à terme

TAB. 2.5 – Gestion du risque de taux CT

A titre d'exemple, considérons qu'une banque A « achète » un FRA à une banque B. Les caractéristiques du FRA sont :

- Nominal : EUR 1M
- Taux : 2,5%
- Echéancier : 3M dans 1M (Taux 3 mois départ dans 1 mois)

A l'échéance du FRA (un mois plus tard), le fixing Euribor 3M est à 2%. En conséquence, le cash settlement du FRA est de EUR -1243.78. A savoir :

17. Contrairement aux contrats Futures CT (cf. Chapitre 6), les FRA sont des produits dérivés négociés de gré-à-gré et cotés par certains acteurs du marché interbancaire.

$$Cash\ Settlement = \frac{EUR\,1M \times (2\% - 2.5\%) \times 0.25}{(1 + 2\% \times 0.25)} = -EUR\,1243.78$$

La banque A va donc verser EUR 1243.78 à la banque B en date d'échéance du FRA.

On montre que la banque A a ainsi fixé ou cristalisé le taux auquel elle pourrait emprunter EUR 1M sur 3M. En d'autres termes, si elle montait effectivement l'emprunt à l'échéance du contrat de FRA au taux du Fixing Euribor alors l'opération combinée FRA + Emprunt serait équivalente à un Emprunt au taux de 2,5%.

On formalisera ce résultat au paragraphe 2.5.1.

2.4.2 Valorisation d'un FRA

On se donne une position de FRA (Achat) X mois dans Y mois négociée au taux R^1_{FRA} et on se place à Z mois de l'échéance du FRA (Z < Y).

Comment calculer la valeur actuelle pour cette position FRA?

La valorisation est réalisée en trois étapes[18] :

1. Couverture du FRA initial par un FRA de sens contraire
2. Remplacement du taux $\mathrm{R}_{\mathrm{FIXING}}$ (inconnu) par le taux Forward équivalent (connu)
3. Actualisation du cashflow (connu) de la date d'échéance du FRA à la date de valorisation

La **première étape** consiste à couvrir cette position de FRA initiale par un FRA de mêmes caractéristiques (prêt-emprunt sous-jacent) que le FRA initial à l'exception du sens (Vente), de la période « forward » (Z mois) et du taux R^2_{FRA}.

Le total des cash settlement des deux FRA est donc :

$$Total_{CS} = \frac{N \times \left(R^1_{FRA} - R^2_{FRA}\right) \times f}{(1 + R_{FIXING} \times f)}$$

La somme des deux cash settlements élimine le taux du Fixing du numérateur de l'expression.

La **deuxième étape** consiste à éliminer l'incertitude sur le taux du fixing au dénominateur en utilisant la technique dite de « projection des taux forward » pour l'estimation de taux spots futurs. Cette technique se justifie par la deuxième propriété énoncée au paragraphe 2.3.2 qui veut que les taux forwards sont des estimations non biaisés des taux spots futurs.

En conséquence, le cashflow agrégé en date d'échéance des deux positions de FRA est maintenent parfaitement connu en date de valorisation et s'écrit :

$$Total_{CS} = \frac{N \times \left(R^1_{FRA} - R^2_{FRA}\right) \times f}{(1 + R_{FWD} \times f)}$$

Le taux $\mathrm{R}_{\mathrm{FWD}}$ est le taux forward X mois dans Z mois calculé à partir des taux Euribor spots X mois et Z mois.

La **troisième et dernière étape** consister à ramener ce cashflow en date de valorisation.

18. En tant que contrat « hors bilan » ne générant pas de cashflow initial, la volarisation d'une position de FRA est réduite à sa seule valeur latente

Il suffit donc de l'actualiser en utilisant le taux Euribor spot Z mois, ce qui par définition du taux forward revient à actualiser le numérateur de l'expression précédente en utilisant le taux Euribor spot Z + X mois ce qui termine le calcul de la valeur de notre position de FRA :

$$V_{FRA} = \frac{N \times \left(R^1_{FRA} - R^2_{FRA}\right) \times f}{\left(1 + R^{Z+X}_{SPOT} \times f_{Z+X}\right)}$$

On a supposé dans ce calcul qu'il était possible de prêter ou d'emprunter au taux du fixing. Rappelons que ce n'est vrai qu'en première approximation et pour les banques de première catégorie.

2.4.3 Pricing d'un FRA

Le pricing d'un FRA consiste à calculer le taux forward équivalent sur le marché interbancaire (cash). L'équivalence en le taux d'un FRA et le taux forward (toutes choses égales par ailleurs) fait l'objet du paragraphe 2.5.1.

2.5 Arbitrage FRA vs Forward-Forward

On montre dans cette dernière section que les taux de FRA et les taux Forwards correspondants doivent être égaux sous hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). On illustre aussi le concept de stratégie d'arbitrage en expliquant comment tirer partie d'un écart significatif entre ces deux taux.

2.5.1 Equivalence FRA/Forward-Forward

Nous avons vu au sous-paragraphe 2.3.1 comment était construit un Forward-Forward à partir de deux opérations de prêt-emprunt spots de sens contraires.

Nous allons montrer ici que ce Forward-Forward peut être obtenu à partir d'une opération combinant un FRA, la mise en place du prêt-emprunt sous-jacent et le « portage » du cash settlement en date de maturité du prêt-emprunt sous-jacent.

Plus précisément, on a l'équivalence suivante :

Prêter un montant $\frac{N}{(1+R_{0,1}\times f_{0,1})}$ au taux $R_{0,2}$ sur la période [T_1, T_2]
+
Emprunter un montant $\frac{N}{(1+R_{0,1}\times f_{0,1})}$ au taux $R_{0,1}$ sur la période [T_0, T_1]
<==>
Vendre un FRA pour un montant N au taux $R^{FRA}_{1,2}$ sur la période [T_1, T_2]
+
Prêter un montant N au taux $R_{1,2}$ sur la période [T_1, T_2] (opé. réalisée en T_1)
+
« Porter » le cash settlement du FRA de T_1 à T_2 (opé. réalisée en T_1)

Pour prouver qu'il y a bien équivalence, nous allons procéder comme précédemment en comparant les structures de cashflows des deux montages aux dates T_1 et T_2 (aucun flux en T_0) :

– La structure de cashflow du Forward-Forward est donnée dans le tableau 2.2 du paragraphe 2.3.1

– La structure de cashflow de la position de FRA est donnée dans le tableau 2.6 ci-dessous

	T_1	T_2
Vente FRA	$\frac{N\times\left(R^1_{1,2}-R^{FRA}_{1,2}\right)\times f_{1,2}}{\left(1+R^1_{1,2}\times f_{1,2}\right)}$	
Prêt à terme	$+N$	$-N \times \left(1 + R^1_{1,2} \times f_{1,2}\right)$
Portage du CS	$-\frac{N\times\left(R^1_{1,2}-R^{FRA}_{1,2}\right)\times f_{1,2}}{\left(1+R^1_{1,2}\times f_{1,2}\right)}$	$N \times \left(R^1_{1,2} - R^{FRA}_{1,2}\right) \times f_{1,2}$
Total	$+N$	$-N \times \left(1 + R^1_{1,2} \times f_{1,2}\right)$

TAB. 2.6 – Equivalence FRA vs Forward-Forward

Les deux structures sont donc équivalentes et sous hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrages (AOA), on doit avoir égalité entre les taux Forward et les taux de FRAs de mêmes caractéristiques :

$$R^{FRA}_{1,2} \equiv R^{FWD}_{1,2}$$

2.5.2 Arbitrage FRA/Forward-Forward

Dans ce paragraphe, nous allons supposer que l'AOA n'est pas vérifiée et plus précisément que le taux du FRA est plus grand que le taux Forward :

$$R^{t,FRA}_{1,2} > R^{t,FWD}_{1,2}$$

t est une date quelconque t $<$ T_1 $<$ T_2.

Afin de profiter de ce « mis-pricing » entre les taux de FRA et les taux Forward, on va logiquement mettre en place l'arbitrage suivant :

1. « Prêt au taux du FRA » (Vente du « FRA »)
2. « Emprunt au taux Forward » (Emprunt Fwd-Fwd)

Les deux opérations sont réalisées simultanément pour un montant nominal N sur le sous-jacent du FRA.

Le P/L de ce montage en date T_2 est connu et certain en date t :

$$P/L_{T_2} = N \times \left(R^{t,FRA}_{1,2} - R^{t,FWD}_{1,2}\right) \times f_{1,2}$$

Il s'agit d'un arbitrage (presque) « parfait » puisqu'il nous procure un gain sans risque (en date T_2) pour un investissement initial nul (en date t).

Ce gain est connu en t et garanti à l'échéance du FRA en T_1 du fait de la double convergence :

– Des taux Forwards vers les taux Spot (Euribor) liée à la construction même des Forwards-Forward qui constituent une généralisation des Prêt-Emprunts Spots à des dates de départ non standards
– Des taux de FRA vers les taux Spot (Euribor) liée à l'utilisation de la référence Euribor pour le calcul des cash settlement des positions de FRAs

On a donc :

$$R_{1,2}^{t,FRA} \; et \; R_{1,2}^{t,FWD} \underset{t \to T_1}{\longrightarrow} R_{1,2}^{1,SPOT}$$

A titre d'exemple, on considère les données de marchés regroupées dans le tableau 2.7 ci-dessous.

3M dans 3M	Prêteur	Emprunteur
FRA	3.00	3.05
Forward-Forward	2.80	2.90

TAB. 2.7 – Exemple - Données de Marchés

Le nominal de la position est de EUR 100M.

Compte tenu des données précédentes :

- Quel arbitrage faut-il monter pour profiter du mis- pricing entre le FRA et le Forward-Forward ?
- Sur quel niveau de spread ?
- Quel est notre P/L anticipé à la date d'échéance ?

On peut prêter au taux du FRA (3%) et emprunter au taux du Forward-Forward (2.90%) et ainsi « locker » un spread de 10bp.

On va donc monter l'arbitrage suivant :

- V (Prêt) EUR100M FRA 3M/3M @ 3%
- A (Emprunt) EUR100M (~FRA) FWD/FWD 3M/3M @ 2.90%

Le P/L anticipé est égal à :

$$P/L = EUR\,100M \times (3\% - 2.90\%) \times 0.25 = EUR\,25000$$

Ce P/L de EUR 25000 sera versé dans 6M (date de maturité du prêt fictif sous- jacent au FRA).

Fin de l'exemple numérique.

Dans cette analyse, on a supposé que l'on pouvait prêter ou emprunter au taux Euribor. Dans la réalité, on a vu que le taux Euribor n'est pas un taux sur lequel on peut traiter mais un indice (une moyenne) des taux pratiqués sur un panel de grandes banques intervenants sur le marché interbancaire de la zone Euro. Cet arbitrage n'est donc envisageable que si les deux conditions suivantes sont réunies :

1. L'arbitragiste est une grande banque de la place pouvant traiter sur des taux Euribor à $\pm\varepsilon$-prés
2. La liquidité du marché interbancaire est suffisante pour pouvoir traiter les quantités voulues sur les échéances voulues avec des fourchettes bid-ask « acceptables » [19]

19. Hypothèse forte !

On a aussi supposé que l'arbitragiste montait l'arbitrage en t et gardait sa position jusqu'à la date T_1. Cependant, le mis-pricing entre le taux de FRA et le taux Forward peut évoluer entre t et T_1. Si ce spread venait à s'inverser alors notre arbitragiste aurait tout intérêt à inverser sa position (sortie anticipée) de façon à « locker » le spread initial constaté en t plus le spread constaté en t' (t < t' < T_1).

Supposons donc qu'en t', on ait la situation suivante :

$$R_{1,2}^{t',FWD} > R_{1,2}^{t',FRA} \qquad avec \qquad t < t' < t + 3M$$

L'arbitragiste va donc inverser sa position via les deux opérations suivantes :

1. « Emprunt au taux du FRA » (Achat du « FRA »)
2. « Prêt au taux Forward » (Prêt Fwd-Fwd)

Ce qui lui permet d'améliorer son gain « sans risque » anticipé (en date T_2) :

$$P/L_{T_2} = N \times \left(R_{1,2}^{t,FRA} - R_{1,2}^{t,FWD}\right) \times f_{1,2} - N \times \left(R_{1,2}^{t',FRA} - R_{1,2}^{t',FWD}\right) \times f_{1,2}$$

On n'a pas tenu compte des spreads bid-ask sur les FRAs et les prêt/emprunts dans le calcul mais au contraire considéré que l'on pouvait traiter à l'achat (prêt) ou la vente (emprunt) au même taux « milieu de fourchette » [20].

A titre d'exemple, supposons que le spread change de signe entre la date de montage de la position et la date d'échéance du FRA. Sous cette hypothèse, on peut doubler le P/L calculé précédemment (EUR 50000) en inversant la position sans attendre la date d'échéance du FRA.

20. Rappelons qu'en pratique il faut évidemment en tenir compte (cf. Exercice 1)

Chapitre 3

Pricing & Trading Obligataire

Ce chapitre est une introduction aux techniques de « relative value trading » au sein d'une même courbe de taux (même devise et même émetteur). On commence par présenter les obligations à taux fixe « in fine » et les concepts actuariels associés (taux, duration et sensibilité). On présente ensuite les trois types de taux (taux zéro-coupon, taux actuariel et taux au pair), les structures obligataires associées et les méthodes de calculs pour passer d'un type de taux à un autre (correspondances). Le calcul des taux zéro-coupon est fondamental car ils constituent l'une des briques de base pour le pricing et la valorisation des produits financiers. Nous présentons les deux méthodes les plus couramment utilisées pour calculer les taux zéro-coupon à partir des prix d'un échantillon homogène l'obligations couponnées : la méthode directe (dite du bootstrap) et la méthode indirecte (Vacisek-Fong). Un comparatif entre ces deux méthodes termine cette section. Dans la dernière section, nous étudierons le financement des opérations d'achat ou de vente de titres obligataires par le marché des repos, les techniques de pricing obligataire et leurs limites (hétérogénéité non réductible) ainsi que les stratégies de « relative value trading » qui permettent de tirer partie d'anomalies dans la courbe de taux.

3.1 Généralités sur les Obligations

Le marché obligataire permet le financement à long terme des agents économiques (Etats, banques commerciales et autres grandes entreprises non bancaires) par l'émission d'emprunts obligataires (marché primaire). Contrairement aux prêts-emprunts du marché interbancaire étudiés au chapitre 2, les titres obligataires sont généralement négociables sur le marché secondaire durant toute leur durée de vie. C'est en particulier le cas pour les obligations émises par les Etats dont les OAT (Obligations Assimilables du Trésor) en France [1] .

3.1.1 Structure d'une Obligation à Taux Fixe « In Fine »

Les Trésors Publics des pays du G7 émettent régulièrement des titres obligataires pour financer leurs déficits budgétaires ou refinancer leurs dettes.

1. Les OAT sont des titres obligataires émis habituellement par voie d'adjudication dans le cadre d'un calendrier annuel publié à l'avance. Par assimilable on entend que des émissions peuvent être réalisées à plusieurs dates différentes sur une même « souche ». Chaque nouvelle émission vient accroître le montant total émis sur la souche. Le site web de l'Agence France Trésor est une mine d'informations concernant les spécificités des titres émis par le Trésor Public Français ainsi que sur les procédures d'émission qui ne sont donc pas reproduites ici

Ces titres sont en général :

- A taux fixe (les coupons sont déterminés à l'émission)
- « in fine » (le remboursement du principal à lieu à la maturité du titre)

En France, le Trésor Public émet principalement ce type d'obligations à taux fixe « in fine » sur des maturités allant du 2A au 50A[2]. Les titres émis par l'Etat Français ont une périodicité de coupon annuelle[3].

Un acheteur d'une obligation à taux fixe « in fine » à coupons annuels qui conserverait son titre jusqu'à l'échéance va recevoir un coupon tout les ans en date anniversaire de l'émission du titre obligataire et sera remboursé du principal en date de maturité (le graphique ci-dessous décrit la structure de cashflows d'un tel titre en cours de vie).

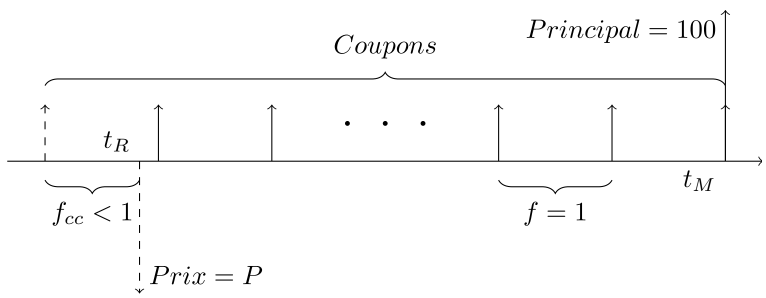

FIG. 3.1 – *Structure de Cashflows d'une Obligation*

En contrepartie, il doit s'acquitter du prix de l'obligation lors de son achat sur le marché (primaire ou secondaire). Le prix payé par l'acheteur est le prix brut égal au prix net (appelé prix « pied de coupon ») plus le coupon couru (égal au taux de coupon fois la fraction d'année écoulée depuis la date de versement du dernier coupon) :

$$P_{brut} = P_{net} + C \times f_{cc}$$

Par convention, les obligations sont cotées en prix « pied de coupon » et en pourcentage (du montant nominal). Ainsi, l'acheteur de EUR 10M d'une obligation qui cote 103.45% avec un coupon 3.10% et 6 mois de coupon couru devra débourser la somme de EUR 10.5M pour acquérir ces titres :

$$EUR\ 10.5M = EUR\ 10M \times [103.45\% + 3.10\% \times 0.5]$$

D'une façon générale, le prix négocié sur le marché obligataire (primaire ou secondaire) pour une obligation à taux fixe « in fine » dépend de :

- La maturité de l'obligation
- La solvabilité de l'emetteur
- La date à laquelle il est négocié

2. Le Trésor Public Français émet des OAT (Obligations Assimilables du Trésor) du 7A au 50A, des BTAN (Bons du Trésor à Intérêts Annuel) du 2A au 7A et des BTF (Bons du Trésor à taux Fixe et à intérêt précompté) à moins d'1A

3. Plus généralement et sauf cas particulier, les obligations émises par les pays d'Europe Continentale (ex: Allemagne) ont une périodicité de coupon annuelle (un coupon plein par an) tandis que dans les pays Anglo-Saxons (ex : Etats-Unis) elles ont une périodicité de coupon bi-annuelle (un demi-coupon tout les six mois)

Dans la suite de ce chapitre, on traitera le cas des obligations d'Etats du G7 dont le risque de crédit sera supposé négligeable en première analyse.[4]

Le cadre général des obligations à taux fixe « in fine » a deux cas particuliers remarquables :

1. Lorsque le taux de coupon est nul (l'obligation ne paye pas de coupon ni intermédiaire ni final, le seul et unique cashflow est le principal remboursé en date de maturité), on est en présence d'une obligation « zéro-coupon »
2. Lorsque la date de maturité est infinie (l'obligation paye un coupon indéfiniment et le principal n'est jamais remboursé), on est en présence d'une structure obligataire passée de mode appelée rente perpétuelle

Les obligations à taux fixe et amortissement « in fine » sont des structures « plain vanilla ».

Il existe d'autres types d'obligations qui se dinstinguent notamment par le type de taux (taux variables indexés sur des indices de taux d'intérêt ou de taux d'inflation, par exemple) et par le type d'amortissement du principal (amortissement linéaire ou « par annuités constantes », par exemple)[5].

3.1.2 Taux de Rendement Actuariel

Le taux de rendement actuariel ou, plus simplement, taux actuariel d'une obligation à taux fixe « in fine » est le taux $\mathrm{R_{act}}$ unique pour lequel la somme des valeurs actuelles des cashflows attachés à cette obligation est égale à son prix de marché (prix brut) :

$$\boxed{P_{brut} = (1+R_{act})^{f_{cc}} \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{100 \times C}{(1+R_{act})^i} + \frac{100}{(1+R_{act})^N} \right]}$$

Cette équation définie $\mathrm{R_{act}}$ implicitement en fonction de P et des caractéristiques de l'obligation. La fonction qui à $\mathrm{R_{act}}$ associe P n'étant pas inversible, la recherche de $\mathrm{R_{act}}$ se fait numériquement[6].

Le taux actuariel a deux propriétés importantes.

On pourrait penser a priori que le taux de rendement actuariel (ex-ante) de l'investissement obligataire doit être égal au taux de coupon de l'obligation. Il n'en est rien sauf dans le cas particulier où l'obligation est émise « au pair ». Une obligation est dite émise « au pair » lorsque son prix d'émission est égal à sa valeur de remboursement (100).

A l'émission, si l'obligation est émise « au pair » (Prix d'Emission = 100) alors le taux actuariel (à l'émission) est égal au taux de coupon C.

Supposons qu'à l'émission un titre obligataire a un taux actuariel égal à son taux de coupon alors son prix d'émission s'écrit :

$$P = C \times \sum_{i=1}^{N} \frac{100}{(1+C)^i} + \frac{100}{(1+C)^N}$$

4. Le risque de crédit sera abordé lors des chapitres 5 (Swaps de Taux et Asset-Swap Gov/Corp), 9 (CDS Arbitrage) et 10 (Capital Structure Arbitrage)

5. Les titres obligataires émis par les Etats (dont la France) sont en général à amortissement « in fine ». L'Etat Français émet en plus des OAT classiques des obligations à taux variables indexées sur l'indice obligataire TEC10 (OAT TEC10) et des obligations indexées sur l'inflation (OATi). Ces deux types spécifiques d'OAT ne sont pas traitées dans ce cours

6. Parmi les algorithmes de calcul du « zéro » d'une fonction, l'algorithme de Newton-Raphson est le plus souvent utilisé pour le calcul du taux actuariel. Dans le cadre des exercices, on utilisera l'outil « Solveur » disponible sur les tableurs de type MS Excel ou OO Calc

Posons :

$$\alpha = \frac{1}{(1+C)} \qquad et \qquad S_N = \sum_{i=1}^{N} \alpha^i$$

S_N est la somme d'une suite géométrique de progression α. On a :

$$S_N = \alpha \times \frac{\alpha^N - 1}{\alpha - 1}$$

En remplaçant α par sa valeur, on trouve :

$$S_N = -\frac{1}{C} \times \left[\frac{1}{(1+C)^N} - 1\right]$$

En remplaçant S_N par sa valeur dans l'expression de P, on a finalement :

$$P = 100$$

Ce qui termine la preuve de la propriété.

Le taux actuariel est égal au taux de rendement ex-post (TREP) à l'échéance de cet investissement sous l'hypothèse où les coupons (intermédiaires) sont tous réinvestis à ce même taux actuariel.

On note :

- P : Le prix (brut) d'acquisition du titre obligataire
- V_N : La valeur de l'investissement en date de maturité du titre obligataire

Par définition, le TREP de cet investissement s'écrit [7] :

$$TREP = \left(1 + \frac{V_N - P}{P}\right)^{1/N} - 1$$

Si on suppose de plus que les flux intermédiaires (coupons) sont réinvestis au taux actuariel alors V_N s'écrit :

$$V_N = 100 \times \left[C \times \sum_{i=1}^{N} (1 + R_{act})^i + 1\right]$$

$$V_N = 100 \times (1 + R_{act})^N \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{C}{(1 + R_{act})^{N-i}} + \frac{1}{(1 + R_{act})^N}\right]$$

$$V_N = 100 \times (1 + R_{act})^N \times P$$

En réinjectant cette expression de V_N dans la formule du TREP ci-dessus et en simplifiant, on trouve finalement :

7. Le TREP est le taux de rendement ex-post (annualisé) d'un investissement qui intègre toutes les composantes contributives de la performance globale de cet investissement (les revenus intermédiaires, le réinvestissement de ces revenus intermédiaires et la plus-ou-moins value éventuelle en capital).

$$TREP = R_{act}$$

Ce qui termine la preuve de la propriété.

Le taux actuariel est donc une bonne approximation ex-ante du taux de rendement ex-post de l'investissement obligataire dans l'hypothèse où l'on conserve l'obligation jusqu'à son échéance et où l'on réinvesti les coupons intermédiaires reçus à un taux d'intérêt proche du taux actuariel (hypothèse forte mais néanmoins acceptable en première approximation).

3.1.3 Duration et Immunisation

La **duration** d'une obligation est la moyenne pondérée des « dates » (en fait les durées) auxquelles sont versées les coupons et le principal par la contribution de chacun des versements à la valeur de l'obligation :

$$\boxed{D = \frac{(1+R_{act})^{f_{cc}} \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{100\times C\times(i-f_{cc})}{(1+R_{act})^{i}} + \frac{100\times(N-f_{cc})}{(1+R_{act})^{N}}\right]}{P}}$$

Toutes choses égales par ailleurs, on peut faire les constats suivants :

- La duration d'une obligation à taux fixe « in fine » croît avec la durée de vie résiduelle tout en étant toujours inférieure à cette durée de vie résiduelle
- La duration est d'autant plus élevée et proche de la durée de vie résiduelle que le taux de coupon est faible. Dans le cas où le taux de coupon est nul (obligation « zéro-coupon »), la duration est égale à la durée de vie résiduelle
- La duration d'une rente perpétuelle est une valeur finie [8]

On verrait de même que la duration :

- Croît avec la durée de vie mais à un taux décroissant
  - Non limité si elle cote en dessous du pair
  - Limité si elle cote au dessus du pair
- Diminue lorsque les taux d'interêts augmentent

Le graphique suivant illustre ces différentes observations :

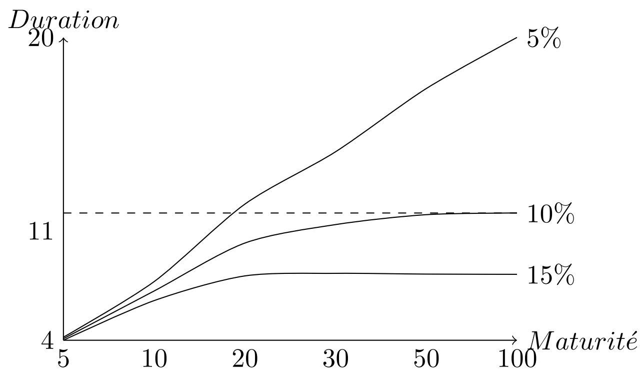

Fig. 3.2 – *Duration en Fonction de la Maturité et du Taux Actuariel (C=10%)*

8. A titre d'exemple, la duration d'une rente perpétuelle versant un coupon de 10% annuellement est 11 ans.

En dehors de ces constats élémentaires, la duration possède une propriété fondamentale et non totalement triviale.

La duration D est la durée de détention de l'obligation pour laquelle l'investisseur est totalement « immunisé ». Autrement dit, la duration est la durée de détention de l'obligation pour laquelle la valeur $\mathbf{V_D}$ de l'investissement (latent+réalisé) à la date D ne dépend pas du taux actuariel $\mathbf{R_{act}}$.

On se place à une date D quelconque entre deux dates de coupon :

$$0 < \ldots < n \leq D < n+1 < \cdots < K$$

Calculons les deux composantes de V_D :

1. Le réalisé qui est constitué des coupons reçus (depuis l'achat du titre) réinvestis au taux actuariel R_{act}
2. Le latent qui est constitué des flux futurs à recevoir actualisés au taux actuariel R_{act}

On a :

$$V_D = V_D^{Réalisé} + D_D^{Latent}$$

avec :

$$V_D^{Réalisé} = \sum_{k=1}^{n} C \times (1+R_{act})^{D-k}$$

et :

$$V_D^{Latent} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C}{(1+R_{act})^{k-D}} + \frac{100}{(1+R_{act})^{K-D}}$$

Puisque l'on souhaite montrer que V_D ne dépend pas de R_{act}, il suffit donc de trouver D tel que :

$$\frac{dV_D}{dR_{act}} = 0$$

En dérivant chacune des deux composantes précédentes de V_D par rapport au taux actuariel R_{act}, on obtient :

$$\frac{dV_D^{Réalisé}}{dR_{act}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(D-k) \times C}{(1+R_{act})^{k-D+1}}$$

et :

$$\frac{dV_D^{Latent}}{dR_{act}} = \sum_{k=n+1}^{K} \frac{(D-k) \times C}{(1+R_{act})^{k-D+1}} + \frac{100 \times (D-k)}{(1+R_{act})^{K-D}}$$

Après sommation de ces deux dernières expressions, égalisation à zéro, réorganisation des termes et simplification, on trouve l'expression de D qui vérifie notre condition d'immunisation :

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{K} \frac{k \times C}{(1+R_{act})^k} + \frac{100 \times k}{(1+R_{act})^K}}{\sum_{k=1}^{K} \frac{C}{(1+R_{act})^k} + \frac{100}{(1+R_{act})^K}}$$

D est donc bien l'expression de la duration de l'obligation (dans le cas particulier où la date d'investissement correspond à la date d'émission ou à une date tombée de coupon).

Ce qui termine la preuve de la propriété.

La duration s'interprète donc comme **la durée de détention d'une obligation pour laquelle l'effet des variations du taux actuariel sur le réalisé (réinvestissement des cashflows passés) et sur le latent (actualisation des cashflows futurs) se compensent**[9].

La duration permet de dinstinguer deux périodes dans la vie d'une position obligataire correspondant à deux types de gestions différentes :

- Lorsque l'horizon d'investissement est inférieur à la duration, le TREP de la position dépend essentiellement de la moins-value ou plus-value sur le latent. Ce TREP peut donc s'écarter très sensiblement dans un sens ou dans un autre du taux actuariel R_{act} négocié lors de l'achat des titres obligataires (cas d'un trader ou d'un arbitragiste taux)
- Si l'horizon d'investissement est supérieur à la duration, le TREP de la position dépend essentiellement de la capitalisation des revenus intermédiaires (coupons). Ce TREP peut s'écarter du taux actuariel R_{act} négocié lors de l'achat des titres obligataires mais dans des proportions biens moindres que dans le cas précédent[10] (cas d'un gestionnaire obligataire ou d'un assureur vie)

On retrouve ici la dichotomie entre « spéculation » (recherche de plus-value à CT) et « investissement » (recherche de revenus à LT).

3.1.4 Couverture en Sensibilité Actuarielle

La **sensibilité** (actuarielle) est par définition la dérivée première du prix de l'obligation P par rapport à son taux actuariel R_{act} :

$$S = \frac{dP}{dR_{act}}$$

En dérivant la formule du prix d'une obligation par rapport à son taux actuariel on trouve une expression simple de la sensibilité de cette obligation en fonction de sa duration, de son prix et de son taux actuariel :

$$S = -P \times \frac{D}{(1 + R_{act})} = -P \times D_{mod}$$

La Duration Modifiée (D_{mod}) est définie comme la duration divisée par un plus le taux actuariel.

9. En d'autres termes, la position obligataire est parfaitement immunisée en terme de valorisation globale (latent + réalisé) du fait que la moins-value (resp. plus-value) sur le latent liée à une hausse des taux d'intérêts (resp. baisse des taux d'intérêts) est parfaitement compensée sur le réalisé du fait du réinvestissement des coupons intermédiaires à des taux plus élevés (resp. moins élevés).

10. Ce constat est exacerbé lorsque les titres obligataires sont conservés jusqu'à maturité du fait du phénomène de convergence du prix de l'obligation vers sa valeur de remboursement à l'échéance (connu sous le nom de « pull-to-par effect » dans la littérature)

De cette expression, on déduit que **la sensibilité d'une obligation est d'autant plus grande (en valeur absolue) que sa duration (et donc sa maturité résiduelle) est importante**. En d'autres termes et toutes choses égales par ailleurs, l'impact d'une hausse du taux actuariel sur le prix d'une obligation est d'autant plus important que la duration (et donc la durée de vie résiduelle) de cette obligation est importante.

Par convention, la sensibilité d'une obligation est généralement exprimée en centimes de prix par point de base de taux (ctm/bp). Ainsi une sensibilité de 7 ctm/bp signifie que si le taux actuariel augmente (resp. baisse) de 1bp (soit 0.01%) alors l'impact sur le prix de l'obligation sera en première approximation de -7 ctm ou -0.07 (resp. +7 ctm ou +0.07).

La sensibilité actuarielle est utilisée pour **mesurer le risque d'une position obligataire** (latent) et par extension pour la **construction de couvertures obligataires** (calcul de hedge ratio).

Considérons un portefeuille investi dans K obligations pour des montants nominaux N_k (k=1...K). Si P_k est le prix de l'obligation k alors la valeur actuelle de ce portefeuille est donnée par :

$$V = \sum_{k=1}^{K} N_k \times P_k$$

Considérons une obligation de couverture dont le prix est P_0 et la sensibilité S_0.

Quel montant nominal de cette obligation faut-il vendre pour couvrir notre portefeuille en sensibilité actuarielle ?

Formellement, notre condition de couverture s'écrit :

$$\triangle (V - N_0 \times P_0) = 0 \qquad \forall \triangle R = \triangle R_k = Cte$$

Si dans la condition de couverture précédente on remplace V par sa valeur, on distribue l'opérateur Δ et on remplace ΔP_k par sa valeur « approximée » $S_k \times \triangle R$, on obtient après avoir factorisé ΔR :

$$\triangle V = \left[\sum_{k=1}^{N} N_k \times S_k - N_0 \times S_0 \right] \times \triangle R = 0 \qquad \forall \triangle R = Cte$$

En conséquence, le montant nominal N_0 nécessaire pour couvrir notre portefeuille est :

$$N_0 = \frac{\sum_{k=1}^{N} N_k \times S_k}{S_0}$$

Pour rappel (cf. Chapitre 1), il s'agit d'une couverture instantanée (elle ne tient pas compte du temps) et mono-factorielle (scénario de déplacement uniforme des taux actuariels des différentes obligations).

3.1.5 Typologie et Correspondances des Taux

Trois types de taux sont régulièrement utilisés sur les marchés obligataires :

1. Les <u>taux actuariels</u> liés à des titres spécifiques
2. Les <u>taux « au pair »</u> qui permettent les comparaisons « inter-courbes »

3. Les taux zéro-coupon qui sont les briques de base du pricing des produits de taux

Les taux actuariels et les indicateurs de risques associés (duration et sensibilité) sont très utilisés sur les marchés pour analyser les titres obligataires indépendamment des uns des autres. Néanmoins l'usage des taux actuariels pose deux problèmes :

1. Un problème théorique lié à l'hypothèse sous-jacente d'une courbe des taux plate qui est largement contredite dans les faits
2. Un problème pratique lié à l'impossibilité de comparer de façon rigoureuse les titres obligataires les uns par rapport aux autres

Ces limitations ont été progressivement levées par l'introduction du concept de taux zéro-coupon et des techniques de calcul associées au cours des trente dernières années.

Le tableau 3.1 suivant résume les correspondances entre les trois types de taux :

de↑/vers →	Taux Actuariel	Taux Zéro-Coupon	Taux au Pair
Taux Actuariel		Calcul des taux zéro-coupon	Passage par les taux zéro-coupon
Taux Zéro-Coupon	Pricing obligataire		Pricing obligataire
Taux au Pair	Passage par les taux zéro-coupon	Calcul des taux zéro-coupon	

TAB. 3.1 – Correspondances des Taux

Dans la suite de ce chapitre nous allons essentiellement expliquer comment passer d'un type de taux à un autre ce qui revient à décrire les techniques de calcul des taux zéro-coupon et la technique (inverse) de pricing obligataire.

3.2 Calcul des Taux Zéro-Coupon

La construction d'une courbe des taux zéro-coupons est un problème qui doit d'abord être posé indépendamment des techniques utilisées et dont certains aspects connexes (choix des taux court terme et techniques d'interpolation) doivent aussi être préalablement traités. On décrit ensuite les deux techniques utilisées pour calculer des taux zéro-coupon à partir d'un échantillon d'obligations « couponnées » de différentes maturités (méthodes directe et indirecte). On termine par un comparatif des deux approches.

3.2.1 Description du Problème

Les Etats n'émettent pas de titres zéro-coupon mais essentiellement des titres à taux fixe « in fine » classiques. **On va donc devoir reconstruire une courbe des taux zéro-coupon à partir des instruments « couponnés » dont on dispose.**

On se donne un échantillon de titres obligataires ayant :

– Les mêmes caractéristiques structurelles (taux fixe – « in fine »)
– Les même intervenants (de sorte que courbe soit globalement « arbitrée »)
– La « même » liquidité (bid-ask spread)

Hypothèse fondamentale : Les prix théoriques des titres pricés dans la courbe des taux zéro-coupon sont « égaux » aux prix de marchés.

$$\boxed{\textit{Prix Théorique } (P^*) \equiv \textit{Prix Observé } (P)}$$

Le prix théorique P^* d'un titre obligataire de l'échantillon pricé dans une courbe des taux zéro-coupon est donné par la formule générique suivante :

$$P^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{F_i}{(1+Z_i)^{f_i}}$$

Avec les notations :

- F_i est le i-ème cashflow du titre obligataire considéré de l'échantillon
- f_i est la durée correspondant au versement du cashflow F_i
- Z_i est le taux zéro-coupon Etat pour la durée f_i

A partir de cet échantillon, il existe deux méthodes permettant de recalculer les taux zéro-coupon « correspondants » :

1. Méthode Directe : les taux zéro-coupon sont calculés de proche en proche des maturités les plus courtes vers les plus longues et l'égalité entre prix théorique et prix observé est strictement vérifiée
2. Méthode Indirecte : les taux zéro-coupon sont calculés globalement sur toute la courbe par minimisation d'une fonction d'erreur et l'égalité entre prix théorique et prix observé est vérifiée modulo l'erreur d'ajustement

Ces deux méthodes feront l'objet d'une présentation détaillée dans les paragraphes 3.2.2 et 3.2.3 respectivement.

Pour que cette courbe des taux permette le calcul de n'importe quel taux zéro-coupon du 1J au 30A, il est nécessaire de la compléter sur le court terme ($<$ 1A) tout en garantissant l'homogénéité de l'échantillon.

Comment déterminer les taux Etat à court terme ($<$ 1A) ?

Plusieurs solutions sont invisageables :

1. Utiliser les taux actuariels de titres « en fin de vie » (moins d'1 an de maturité résiduelle) qui sont par nature des taux zéro-coupons
2. Utiliser les taux des instruments de dettes à court terme (BTF en France)
3. Utiliser les taux du marché des Repo « GC »[11]

Les deux premières solutions sont les plus évidentes mais souffrent de problèmes liés à l'illiquidité des titres « en fin de vie » et du marché des BTF globalement (ces titres à CT sont très souvent acquis à l'émission et conservés jusqu'à échéance par les investisseurs). De surcroît, les intervenants sur les parties LT et CT de la courbe des taux Etat sont en général distincts. **On utilisera donc les taux du marché des repo « GC » qui présentent l'avantage d'êtres des marchés relativement liquides, représentatifs du risque Etat par construction et traités par les mêmes intervenants que la partie LT de la courbe.**

La méthode directe de calcul de taux zéro-coupon permet de calculer les taux zéro-coupon correspondants aux dates de maturités des obligations constituant l'échantillon.

Comment calculer un taux zéro-coupon correspondant à une date quelconque ?

11. Cf. paragraphe 3.3.1 (dans ce chapitre) pour un descriptif du marché des repos

On va simplement interpoler le taux cherché à partir des taux zéro-coupon adjacents déjà calculés.

Trois méthodes sont envisageables :

1. Linéaire
2. Cubique
3. Cubique Différentiable

Les méthodes d'interpolation cubiques permettent d'introduire de la convexité « glocale » dans la construction de la courbe des taux. La méthode cubique différentiable permet en outre d'obtenir une courbe « lisse » en chaque point[12]. Bien qu'attractives sur le plan technique, ces méthodes peuvent générer des taux difficilement justifiables sur le plan financier voir même abérants (taux négatifs) lorsque, par exemple, les courbes des taux sont inversées sur le court terme et « normales » sur le long terme.

On utilisera la méthode d'interpolation linéaire qui est la plus simple à mettre en œuvre et conforme aux usages du marché.

La méthode d'interpolation linéaire consiste à calculer le taux zéro-coupon Z pour une durée f quelconque à partir des taux zéro-coupon adjacents $\mathrm{Z_k}$ et $\mathrm{Z_{k+1}}$ de durées respectives $\mathrm{f_k}$ et $\mathrm{f_{k+1}}$ avec $\mathrm{f_k} < \mathrm{f} < \mathrm{f_{k+1}}$ en utilisant une combinaison linéaire des deux taux « pro rata temporis » :

$$Z = \frac{(f_{k+1} - f) \times Z_k + (f - f_k) \times Z_{k+1}}{f_{k+1} - f_k}$$

C'est cette méthode d'interpolation que nous allons systématiquement utiliser dans ce cours (exemples numériques et exercices) pour le calcul des taux zéro-coupon à des dates quelconques.

3.2.2 Méthode Directe

La méthode directe consiste à procéder de proche en proche des maturités les plus courtes vers les maturités les plus longues en réinjectant à l'étape courante du calcul les taux zéro-coupon déjà calculés aux étapes précédentes. **On commence par décrire le cas simple où l'échantillon obligataire est constitué uniquement d'obligations « aux pair » avant d'expliquer comment procéder dans le cas général**[13].

3.2.2.1 Cas des Obligations au Pair

Supposons que l'on dispose de N obligations (à taux fixe, remboursement « in fine » et périodicité des coupons annuelle) « au pair » dont les maturités vont du 1A (la première obligation est donc un zéro-coupon) au N Ans. Comme ces obligations sont au pair, les cashflows tombent sur les maturités entières : 1A, 2A, ... N Ans.

On commence par calculer le taux zéro-coupon 1A à partir de l'obligation au pair de maturité 1A :

$$100 = \frac{100 + C_1}{(1 + Z_1)^1} \qquad \Longrightarrow \qquad Z_1 = \frac{C_1}{100}$$

12. Le lecteur intéressé pourra consulter l'ouvrage de Chazot C. et Claude P. (1999) sur les swaps pour un descriptif clair et concis des méthodes cubiques

13. Le cas des taux au pair est un cas très spécifique qui n'a pas d'application sur le marché obligataire mais qui n'est pas pour autant sans intérêt pratique puisque les swaps de taux sont cotés au pair (cf. Chapitre 5)

On passe ensuite au taux zéro-coupon de maturité 2A.

On applique la formule de pricing zéro-coupon de cette obligation en réinjectant le taux zéro-coupon 1A précédemment calculé :

$$100 = \frac{C_2}{(1+Z_1)^1} + \frac{100+C_2}{(1+Z_2)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad Z_2 = \sqrt{\frac{100+C_2}{100 - \frac{C_2}{(1+Z_1)}}} - 1$$

Et ainsi de suite...

A l'étape N, on calcule le taux zéro-coupon de maturité N Ans en réinjectant les N-1 taux zéro-coupon précédemment calculés dans la formule de pricing zéro-coupon de l'obligation de maturité N Ans :

$$100 = \sum_{i=1}^{N} \frac{C_N}{(1+Z_i)^i} + \frac{100+C_N}{(1+Z_N)^N} \qquad \Longrightarrow \qquad Z_N = \left[\frac{100+C_N}{100 - \sum_{i=1}^{N} \frac{C_N}{(1+Z_i)^i}}\right]^{1/N} - 1$$

Cette procédure peut être facilement écrite sous forme matricielle.

Notons $\rho_n = \frac{1}{(1+Z_n)^n}$ le facteur d'actualisation pour la maturité n correspondant au taux zéro-coupon $\mathrm{Z_n}$. Les N équations de pricing correspondants aux obligations « au pair » de maturité n=1...N peuvent êtres écrites sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 100 = & (1+C_1) \times \rho_1 \\ 100 = & C_2 \times \rho_1 + (1+C_2) \times \rho_2 \\ & \dots \\ 100 = & C_N \times \rho_1 + C_N \times \rho_2 + (1+C_N) \times \rho_N \end{cases}$$

On a donc un système de N équations à N inconnues que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$M \times \rho = 100 \times 1_N$$

La matrice M étant inversible (car triangulaire), on a donc :

$$\rho = 100 \times M^{-1} \times 1_N$$

On obtient finalement les taux zéro-coupon $\mathrm{Z_n}$ (n=1...N) cherchés par la formule :

$$Z_n = \frac{1}{(\rho_n)^{1/n} - 1}$$

<u>A titre d'exemple</u>, considérons les taux au pair ainsi que les taux zéro-coupon correspondants donnés par le tableau 3.2.

Maturité	1A	2A	3A	4A	5A
Taux au Pair (%)	2.000	2.500	2.980	3.430	3.850
Taux ZC (%)	2.000	2.506	2.994	3.466	3.922

TAB. 3.2 – Exemple - Taux au Pair

La formule générique de calcul des facteurs d'actualisation à partir des taux au pair :

$$\rho = 100 \times M^{-1} \times 1_N$$

s'écrit dans sa forme développée et dans ce cas particulier :

$$\begin{bmatrix} 0.98039 \\ 0.95170 \\ 0.91529 \\ 0.87259 \\ 0.82502 \end{bmatrix} = 100 \times \begin{bmatrix} 102 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.5 & 102.5 & 0 & 0 & 0 \\ 2.98 & 2.98 & 102.98 & 0 & 0 \\ 3.43 & 3.43 & 3.43 & 103.43 & 0 \\ 3.85 & 3.85 & 3.85 & 3.85 & 103.85 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à calculer les taux zéro-coupon correspondants, par exemple :

$$3.922\% = \frac{1}{(0.82502)^{1/5} - 1}$$

pour le taux 5A.

Ce qui termine l'exemple numérique.

Remarquons que les taux « au pair » peuvent s'interpréter comme des moyennes au sens de l'actualisation des taux zéro-coupon. On en déduit les propriétés triviales suivantes :

- Lorsque la courbe des taux est croissante, les taux zéro-coupon sont plus élevés que les taux au pair de mêmes maturités et l'écart croît avec la maturité
- Lorsque la courbe des taux est décroissante, les taux zéro-coupon sont moins élevés que les taux au pair de mêmes maturités et l'écart croît avec la maturité

En dehors de ces deux cas spécifiques, on ne peut rien dire de particulier.

3.2.2.2 Cas général

Dans le cas général[14], l'échantillon de titres obligataires a les propriétés suivantes :

1. Les échéanciers de cashflows sont disjoints (les dates de maturités des titres et donc des cashflows ne sont plus des multiples entiers d'années)
2. Il y a moins de titres que de dates de coupon (dans le cas des titres émis au pair, il y a N titres et N dates de coupon)

Plaçons-nous en cours de calcul et supposons que les taux zéro-coupon Z_1 et Z_2 ont déjà été calculé. On va maintenant calculer le taux zéro-coupon $\hat{Z}_3$ dont la date de maturité correspond à la date de maturité de l'obligation suivante de l'échantillon (f_3).

Cette situation est décrite par le Graphique 3.3 ci-dessous.

14. Valérie Devers (1996), Documentation financière pour les courbes de taux, Département Analyse - Arbitrage, Informatique Front Office (Banque Internationale de Placement)

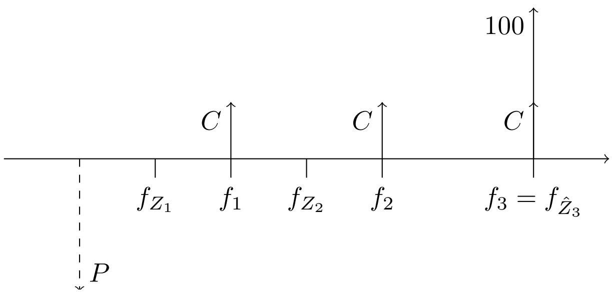

FIG. 3.3 – *Calcul des Taux ZC par la Méthode Directe (Cas Général)*

Le traitement de cette obligation pose deux problèmes :

1. La date du premier coupon f_1 tombe entre deux dates de taux zéro-coupon déjà calculés f_{Z_1} et f_{Z_2}
2. La date du second coupon f_2 tombe entre une date de taux zéro-coupon déjà calculé f_{Z_2} et la date du taux zéro-coupon que l'on cherche précisément à calculer $f_{Z_3} = f_3$

Dans ces deux cas, **on va simplement interpoler linéairement les taux manquants** :

1. Lorsque les taux zéro-coupon adjacents sont déjà calculés, le taux interpolé est calculable directement (cas du premier coupon)
2. Lorsque le taux adjacent est le taux zéro-coupon à calculer (en date de maturité de l'obligation en cours de « traitement ») le taux interpolé n'est pas calculable directement (cas du deuxième coupon)

D'un point de vue formel, notre formule de pricing pour le titre obligataire en cours de traitement s'écrit :

$$P = \frac{C}{\left(1 + Int\left(Z_1, Z_2\right)\right)^{f_1}} + \frac{C}{\left(1 + Int\left(Z_2, \hat{Z}_3\right)\right)^{f_2}} + \frac{100 + C}{\left(1 + \hat{Z}_3\right)^{f_3}}$$

avec :

$$\begin{cases} Int\left(Z_1, Z_2\right) = \frac{\left(f_1 - f_{Z_1}\right) \times Z_2 + \left(f_{Z_2} - f_1\right) \times Z_1}{f_{Z_2} - f_{Z_1}} \\ Int\left(Z_2, \hat{Z}_3\right) = \frac{\left(f_2 - f_{Z_2}\right) \times \hat{Z}_3 + \left(f_{\hat{Z}_3} - f_2\right) \times Z_2}{f_{\hat{Z}_3} - f_{Z_2}} \end{cases}$$

Cette équation n'a pas de solution algébrique et doit être résolue numériquement.

La méthode générale consiste donc à procéder par étape comme dans le cas particulier où les obligations sont « au pair » sans qu'il soit néanmoins possible d'écrire l'ensemble des équations sous forme matricielle.

3.2.3 Méthode Indirecte

La méthode indirecte permet de calculer la courbe des taux zéro-coupon de sorte que les taux zéro-coupon sont définis partout (et non aux seules dates de maturité des titres obligataires) et l'ajustement est global (et non plus local).

Cette méthode développée par Vasicek & Fong[15] consiste essentiellement à :

- Travailler à partir d'un espace vectoriel des fonctions d'actualisation (techniquement il s'agit de fonctions polynomiales par morceaux - ou splines)
- Chercher dans cet espace la fonction d'actualisation qui minimise l'erreur entre les prix observés et les prix théoriques sur les titres de l'échantillon

Le problème étant linéaire par construction, la fonction d'actualisation cherchée sera obtenue par l'estimateur des moindres carrés généralisés (MCG)[16].

A une date donnée, on dispose d'un échantillon homogène de I obligations d'Etat dont on connaît les caractéristiques des flux (montants et dates de versement). L'objectif est d'estimer globalement la courbe des taux zéro-coupon implicitement définie par cet échantillon.

On note :

- $\mathrm{P_i}$: Prix observé de l'obligation i
- $\mathrm{F_{ij}}$: Flux j de l'obligation i
- $\mathrm{f_j}$: Date de versement du j-ième flux
- J : Dernier flux (toutes obligations confondues)
- $\mathrm{Z_t}$: Taux zéro-coupon à la date de maturité t
- ρ_t : Facteur d'actualisation associé à $\mathrm{Z_t}$

Le prix théorique de l'obligation i peut s'écrire comme le produit scalaire du vecteur des cashflows de cette obligation avec le vecteur constitué des facteurs d'actualisations correspondants :

$$P_i^* = \sum_{j=1}^{J} F_{ij} \times \rho_{f_j} \qquad avec \qquad \rho_t = \frac{1}{\left(1 + Z_{f_j}\right)^{f_j}}$$

L'introduction de la fonction d'actualisation permet d'exprimer le prix théorique de l'obligation sous la forme d'une combinaison linéaire des cashflows par les coefficients d'actualisation.

On va chercher une approximation de la fonction ρ dans un espace vectoriel de fonctions polynômiales par morceaux. Soit $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mathrm{K})$ une base de cet espace, on cherche ρ sous la forme :

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{K} \beta_k \times \rho_k(x) \qquad avec \qquad x = 1 - e^{-\alpha \times f}$$

En introduisant cette expression de ρ dans la formule du prix théorique du titre i, on obtient :

$$P_i^* = \sum_{k=1}^{K} \beta_k \sum_{j=1}^{J} F_{ij} \times \rho_k(x_j) \qquad avec \qquad x_j = 1 - e^{-\alpha \times f_j}$$

Dans cette dernière expression, P_i^* est le prix théorique de l'obligation i et $\mathrm{f_j}$ est la date de versement du j-ème flux toutes obligations confondues ($\mathrm{F_{ij}}$ est nul si l'obligation i ne verse pas de cashflows à la date $\mathrm{f_j}$).

15. O.A. Vasicek & F.G. Fong, « Term structure modeling using exponential splines », The Journal of Finance (May 1982)

16. Le texte qui suit est un résumé du modèle original proposée par Vasicek & Fong. Pour un exposé plus complet incluant des développements plus récents se reporter à l'ouvrage de L. Martellini et J. Priaulet, « Les Produits de Taux d'Intérêt - Méthodes dynamiques d'évaluation et de couverture », Economica (2000)

Le modèle postule que le prix observé du titre i est égal à son prix théorique plus un terme erreur :

$$\boxed{P_i = P_i^* + \epsilon_i \qquad (i = 1...I)}$$

On suppose que les erreurs ε_i sont des v.a. normales d'espérences nulles et sont non corrélées entre elles.

On peut écrire le modèle précédent sous forme matricielle :

$$P = H \times \beta + \varepsilon$$

Avec les notations suivantes :

- P : Vecteur des prix observés (dim[P] = I)
- H : Matrice des coefficients h_{ik} (i=1...I et k=1...K)
- ε : Vecteur des coefficients de régression (dim[ε] = K)

Les coefficients h_{ik} s'écrivent :

$$h_{ik} = \sum_{j=1}^{J} F_{ij} \times \rho_k(x_j) \qquad (i = 1...I \ et \ k = 1...K)$$

On obtient une estimation de β en utilisant l'estimateur des MCG (Moindres Carrés Généralisés) donné par :

$$\hat{\beta} = \left({}^tHW^{-1}H\right)^{-1} HW^{-1}P \qquad avec \qquad W = E\left({}^t\epsilon.\epsilon\right)$$

W est la matrice de variance-covariances des erreurs.

La fonction d'actualisation recherchée et les taux zéro-coupon correspondants s'écrivent donc :

$$\boxed{\hat{\rho}(x) = \sum_{k=1}^{K} \hat{\beta}_k \times \rho_k(x) \qquad et \qquad \hat{Z}_f = \frac{1}{[\hat{\rho}(x_f)]^{1/f} - 1}}$$

L'estimateur $\hat{\beta}$ a pour propriété fondamentale de minimiser la somme des carrés des erreurs (SCE) :

$$SCE = \sum_{i=1}^{I} \epsilon_i^2 \qquad avec \qquad \epsilon_i = P_i - P_i^*$$

Chaque titre de l'échantillon a donc le même poids dans la SCE.

3.2.4 Méthode Directe vs Indirecte : Comparatif

L'opposition entre ces deux approches est assez révélatrice des différences « culturelles » entre les praticiens de la finance (les professionnels) et les théoriciens de la finance (les universitaires). Les professionnels préfèrent en général l'approche directe du fait de sa relative simplicité computationnelle et de ses bonnes propriétés. Au contraire, les universitaires semblent plus attirés par l'esthétique formelle et la plus grande technicité de l'approche indirecte.

Le tableau 3.3 ci-dessous permet une comparaison synthétique des deux approches.

	Méthode Directe	Méthode Indirecte
Les taux zéro-coupons sont-ils définis partout?	Non - On procède par interpolation pour calculer les taux manquants	Oui - Les taux zéro-coupon sont définis par une fonction dont les paramètres ont été obtenus par régression linéaire (MCG)
Les prix théoriques et observés sont-ils égaux (pour les obligations de l'échantillon)?	Oui - Si la même méthode d'interpolation est utilisée dans la procédure de calcul des taux zéro-coupon à partir des obligations couponnées et dans le calcul des taux zéro-coupon manquants	Non - Le processus de régression ne permet pas d'obtenir un ajustement exact mais le meilleur ajustement possible dans l'espace fonctionnel donné
Faut-il faire des hypothèses sur la forme de la courbe des taux?	Non - Aucune hypothèse sur la forme de la courbe des taux n'est introduite dans le calcul	Oui - Les formes de courbes de taux sont implicitement définies par l'espace fonctionnel dans lequel on cherche le meilleur ajustement
L'ajustement est-il réalisé globalement?	Non - L'ajustement est réalisé localement de proche en proche des maturités les plus courtes vers les plus longues	Oui - L'ajustement est réalisé globalement par minimisation d'une fonction d'erreur
L'implémentation est-elle difficile?	Non - L'implémentation est modérément compliquée dans le cas général	Oui - La difficulté est plus grande du fait de la relative complexité du processus d'ajustement

Tab. 3.3 – Comparatif des Méthodes Directe et Indirecte

D'un point de vue opérationnel, l'égalité entre prix théorique et prix observé pour les obligations de l'échantillon est une propriété essentielle pour les opérateurs de marché qui doivent pouvoir justifier les valorisations des positions prises et leurs variations d'un jour sur l'autre. L'introduction d'une erreur non systématique et non interprétable financièrement rend la méthode indirecte difficilement acceptable par ces derniers[17].

17. Cf. F. Leroy (1996), « Courbe des taux théorique et valorisation en spread », Note Interne du Département des Risques, Banque Internationale de Placement

3.3 Relative Value Trading

L'une des applications des taux zéro-coupon est le pricing des obligations d'Etat hors échantillon. Ce pricing est à la base des stratégies de type « relative value » qui consistent à acheter les titres sous-évalués et/ou à vendre les titres sur-évalués contre leurs équivalents-risques dans le courbe. Nous allons, au cours de cette dernière section expliquer le rôle du marché des repos en trading obligataire, décrire les stratégies de « relative value » trading et expliquer comment certains facteurs exogènes peuvent impacter la pertinence des évaluations.

3.3.1 Le Marché des Repos

Un **repurchase agreement** (repo) est une opération de prêt-emprunt de cash entre un prêteur et un emprunteur (du cash) adossée à un emprunt-prêt de titres (mise en pension) pour garantir le prêt-emprunt de cash. Les deux opérations (sur le cash et les titres) sont réalisées et débouclées aux mêmes dates comme illustré par le graphique 3.4.

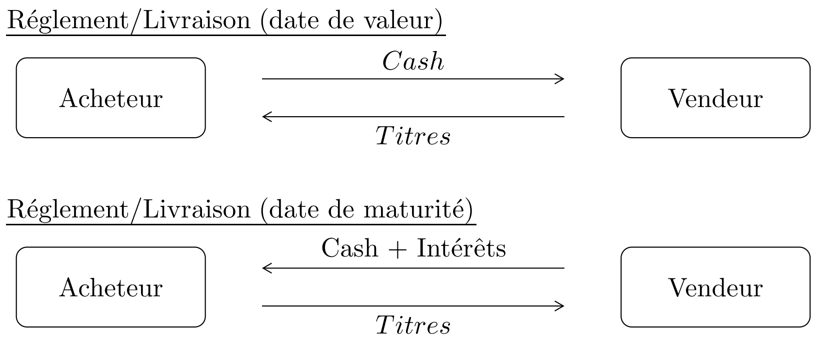

FIG. 3.4 – *Réglement/Livraison d'une Opération de Repo*

Les titres livrés servent à garantir le prêt en cash. La propriété des titres reste au prêteur des titres puisque les titres lui sont rétrocédés en date de maturité du repo (sauf en cas de défaut du prêteur, auquel cas les titres deviennent la propriété de l'emprunteur).

Fondamentalement, le marché du repo permet aux acteurs du marché obligataire :

- L'achat de titres en se finançant à un taux inférieur au taux interbancaire
- La vente à découvert de titres par « emprunt des titres en repo »

Ce dernier point est important car sans marché des repos, il n'est théoriquement pas possible de vendre à découvert une obligation d'Etat.

Les taux de repos négociés entre banques de premières catégories sont égaux aux taux du marché interbancaire moins une prime qui diffère selon les titres livrés :

- **Prime GC (General Collateral)** s'applique à tout les titres d'Etat livrés en garantie (le titre livré importe peu, seul compte le fait qu'il soit émis par l'Etat)
- **Prime « Special »** s'applique à un titre spécifique dont la demande sur le marché du repo excède l'offre (cas de certains titres « chers » dans la courbe qui sont recherchés pour être vendus à découvert)

A titre d'exemple, si le taux du marché interbancaire à 1W est de 3.5% et la prime repo GC de même durée à 20bp alors un titre Etat quelconque (GC) pourra être livré en contrepartie du cash sur la base d'un taux de repo de 3.3%. Si la prime repo de même maturité sur l'OAT

3.25% 25 OCT 2021 est de 50bp alors ce titre pourra être livré en contrepartie du cash sur la base d'un taux de repo de 3%.

Notons enfin que les conventions de taux du marché des repos sont les mêmes que celles du marché interbancaire (cf. Chapitre 2).

3.3.2 Méthodologie et Stratégies

On commence par expliquer la méthodologie de pricing d'une obligation hors échantillon dans une courbe des taux zéro-coupon. Puis on décrit les stratégies de type « relative value » (mis-pricing sur le marché obligataire) et les stratégies de type « repo trades » (mis-pricing sur le marché des repos).

3.3.2.1 Méthodologie de Pricing Zéro-Coupon

On se donne une courbe de taux zéro-coupon calculée à partir d'un échantillon homogène d'obligations « couponnées » en utilisant l'une des deux méthodes présentées à la section 3.2. Considérons maintenant **une obligation quelconque hors échantillon** dont les propriétés[18] autorisent son pricing dans la courbe des taux zéro-coupon précédente.

On calcule le prix théorique P^* de cette obligation en actualisant les flux $\mathrm{F_i}$ avec les taux zéro-coupon précédemment calculés :

$$P^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{F_i}{(1+Z_i)^{f_i}} \qquad \Longrightarrow \qquad P^*$$

On en déduit ensuite le taux de rendement actuariel théorique R_{act}^* de cette obligation en « inversant » la relation prix-taux suivante :

$$P^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{F_i}{(1+R_{act}^*)^{f_i}} \qquad \Longrightarrow \qquad R_{act}^*$$

On calcule enfin le spread entre le taux actuariel théorique R_{act}^* et le taux actuariel observé R_{act} :

$$Spread = R_{act}^* - R_{act} \qquad \Longrightarrow \qquad Spread$$

On peut de même calculer le taux repo r^* du synthétique zéro-coupon et la prime repo entre le taux repo théorique r^* et le taux repo observé r :

$$Prime = r^* - r \qquad \Longrightarrow \qquad Prime$$

Les stratégies de type « relative value » permettent de jouer un mis-pricing sur le marché obligataire (sur le spread) tandis que les stratégies de type « repo trade » permettent de jouer un mis-pricing sur le marché des repos (sur la prime).

18. Caractéristiques structurelles, liquidité du titre dans le marché et types d'intervenants

3.3.2.2 Relative Value Trading

Supposons que le spread de taux actuariel (Spread) suit un processus aléatoire de type Ornstein-Ulhenbeck de moyenne nulle. La valeur d'équilibre (Spread = 0) est la situation pour laquelle l'obligation est parfaitement pricée dans la courbe des taux zéro-coupon à savoir que le prix observé (resp. taux actuariel observé) est égal au prix théorique (resp. taux actuariel théorique).

Sous cette hypothèse, la comparaison entre les taux actuariels observé et théorique constitue un critère de sur- ou sous-évaluation (pour le titre obligataire considéré sur le marché obligataire) :

$$\begin{cases} Spread > +\epsilon & \Rightarrow Le\,titre\,est\,"cher" \\ Spread < -\epsilon & \Rightarrow Le\,titre\,n'est\,"pas\,cher" \end{cases}$$

ε est le seuil à partir duquel on décide qu'il est opportun de monter la position.

Ce constat peut théoriquement motiver l'achat (si le titre n'est « pas cher ») ou la vente (si le titre est « cher ») du titre obligataire contre son synthétique zéro-coupon (« relative value » trading).

Supposons, pour fixer les idées, que le timing des opérations est le suivant :

- Date t : $\mathrm{Spread}_{\mathrm{t}}= \varepsilon$ (Entrée)
- Date t+Δt : $\mathrm{Spread}_{\mathrm{t}+\Delta\mathrm{t}}= 0$ (Sortie)

On suppose de plus que l'obligation et son synthétique se négocient au même taux repo r sur la période $[t, t + \triangle t]$.

Les opérations à réaliser aux dates t et t+Δt et les flux correspondants sont décrites dans le tableau 4.4 ci-dessous.

Branches	Marchés	t	t+Δt
Obligation	Cash	Vente de l'obligation au prix P_t	Rachat de l'obligation au prix $P^*_{t+\Delta t}$
	Repo	Emprunt de l'obligation au taux repo $r_{t,t+\triangle t}$	*n.a.*
Synthétique ZC	Cash	Achat du synthétique ZC au prix P^*_t	Rachat du synthétique ZC au prix $P^*_{t+\Delta t}$
	Repo	Prêt du synthétique ZC au taux repo $r_{t,t+\triangle t}$	*n.a.*

TAB. 3.4 – Tableau des Opérations en t et t+Δt

Les flux de trésorerie correspondants aux opérations précédentes pour une taille N de la position (montant nominal) sont donnés dans le tableau 3.5 ci-dessous pour la date t+Δt [19].

19. Le flux de trésorerie total en t est nul car les deux branches de l'opération sont auto-financées.

Branches	Marchés	t+Δt
Obligation	Cash	$-N \times P^*_{t+\Delta t}$
	Repo	$N \times P_t \times (1 + r_{t,t+\triangle t} \times \triangle t)$
Synthétique ZC	Cash	$+N \times P^*_{t+\Delta t}$
	Repo	$-N \times P^*_t \times (1 + r_{t,t+\triangle t} \times \triangle t)$
Total		$-N \times (P_t - P^*_t) \times (1 + r_{t,t+\triangle t} \times \triangle t)$

TAB. 3.5 – Tableau des Flux de Trésorerie en t+Δt

Au final, le P/L ex-ante de la position à l'horizon t+Δt peut être approximé en introduisant la sensibilité actuarielle S^*_t du synthétique ZC :

$$\boxed{P/L_{t,t+\triangle t} \approx N \times S^*_t \times \triangle Spread \times (1 + r_{t,t+\triangle t} \times \triangle t)}$$

Le P/L du montage sur la période $[t, t + \triangle t]$ est connu avec certitude en t du fait que le prix $P^*_{t+\Delta t}$ de l'obligation et de son synthétique ZC en t+Δt n'intervient pas dans la formule précédente. Ce P/L « période » n'est autre que le P/L « intraday » porté au taux repo $r_{t,t+\triangle t}$ sur la période $[t, t + \triangle t]$ avec :

$$P/L^{intraday}_t \approx N \times S^*_t \times \triangle Spread$$

On constate que le P/L « intraday » est directement proportionnel non seulement à la taille de la position mais aussi à la sensibilité de la position (levier) ainsi qu'à la variation du spread de taux [20].

On notera cependant que dans le monde réel, il n'est pas possible de prévoir a priori à quel horizon le spread reviendra sur sa valeur d'équilibre. On est donc obligé de financer ce type de position (l'obligation et son synthétique) par des repos à très court terme que l'on roule lorsqu'ils arrivent à échéance (ce qui introduit un risque de refinancement).

Les stratégies de type « relative value » sont essentiellement des stratégies de trading sur spread de taux.

3.3.2.3 Repo Trades

On suppose ici que le spread entre l'obligation et son synthétique zéro-coupon est nul à tout instant de sorte que l'obligation est toujours parfaitement pricée dans la courbe des taux zéro-coupons.

Supposons de plus que l'écart entre le taux repo r de l'obligations et le taux repo r^* de son synthétique zéro-coupon est non nul. Sous cette hypothèse, la comparaison entre les taux repo observé et théorique constitue un critère de sur- ou sous-évaluation (pour le titre obligataire considéré sur le marché des repos) :

$$\begin{cases} r^* - r > +\epsilon & \Rightarrow Le\ titre\ est\ ''cher\ en\ repo'' \\ r^* - r < -\epsilon & \Rightarrow Le\ titre\ n'est\ ''pas\ cher\ en\ repo'' \end{cases}$$

ε est le seuil à partir duquel on décide qu'il est opportun de monter la position.

20. ΔSpread = ε

Ce constat peut théoriquement motiver l'emprunt du titre en repo (et sa vente en cash) ou le prêt du titre en repo (et son achat en cash) contre son synthétique zéro-coupon (« repo trade »).

Supposons, pour fixer les idées, que les taux sur le marché des repos sur la période $[t, t + \triangle t]$ sont les suivants :

- Taux repo obligataire : r
- Taux repo synthétique : $r^* = r - prime$ $(prime > 0)$

Le titre obligataire n'est donc pas cher en repo.

Les opérations à réaliser aux dates t et t+Δt et les flux correspondants sont décrites dans le tableau 3.6 ci-dessous.

Branches	Marchés	t	t+Δt
Obligation	Cash	Vente de l'obligation au prix P_t^*	Rachat de l'obligation au prix $P_{t+\Delta t}^*$
	Repo	Emprunt de l'obligation au taux repo $r_{t,t+\triangle t}^* + prime$	*n.a.*
Synthétique ZC	Cash	Achat du synthétique ZC au prix P_t^*	Rachat du synthétique ZC au prix $P_{t+\Delta t}^*$
	Repo	Prêt du synthétique ZC au taux repo $r_{t,t+\triangle t}^*$	*n.a.*

TAB. 3.6 – Tableau des Opérations en t et t+Δt

Les flux de trésorerie correspondants aux opérations précédentes pour une taille N de la position (montant nominal) sont donnés dans le tableau 3.7 ci-dessous pour la date t+Δt.

Branches	Marchés	t+Δt
Obligation	Cash	$-N \times P_{t+\Delta t}^*$
	Repo	$N \times P_t^* \times \left(1 + \left(r_{t,t+\triangle t}^* + prime\right) \times \triangle t\right)$
Synthétique ZC	Cash	$+N \times P_{t+\Delta t}^*$
	Repo	$-N \times P_t^* \times \left(1 + r_{t,t+\triangle t}^* \times \triangle t\right)$
Total		$N \times P_t^* \times prime \times \triangle t$

TAB. 3.7 – Tableau des Flux de Trésorerie en t+Δt

Au final, le P/L ex-ante de la position à l'horizon t+Δt est connu avec certitude en t et s'écrit simplement :

$$\boxed{P/L_{t,t+\triangle t} = N \times P_t^* \times prime \times \triangle t}$$

On constate que le P/L est directement proportionnel non seulement à la taille de la position mais aussi à la prime repo (en t) ainsi qu'à la durée de portage de la position.

Les stratégies de type « repo trade » sont de fait essentiellement des stratégies de portage.

3.3.3 Facteurs Exogènes et Limitations

Dans la présentation des méthodes directes et indirectes de calcul des taux zéro-coupon à la section 3.2, on a fait l'hypothèse que l'échantillon de titres obligataires utilisé devait être « homogène ». Dans la pratique, le choix est souvent délicat car les titres obligataires se différencient souvent des uns des autres sur différents critères.

Les principaux critères différenciants sur le marché obligataire sont discutés dans le tableau 3.8 ci-dessous.

	Commentaires
Liquidité	La liquidité des titres dans la courbe est un facteur discriminant puisque les titres moins liquides sont par nature sujets à des mis-pricing au moins temporaires
Fiscalité	Le gap de fiscalité entre les coupons (revenus) et le principal (plus-value) est une source de distortion entre les titres à faibles coupons versus les titres à coupons élevés (de même maturité). Ces derniers sont très recherchés par les investisseurs institutionnels pour être conservés jusqu'à échéance dans leurs bilans et peuvent aussi souffrir d'une très faible liquidité dans le marché
Benchmark	Les titres récemment émis sur les maturités 2A, 5A, 10A et 30A sont généralement les plus liquides et deviennent de facto des références (benchmarks) pour les autres titres dans la courbe. Les anciennes benchmarks (« off-the-run ») se traitent généralement avec une prime négative par rapport aux nouvelles (« on-the-run »)
Livrables	Les titres livrables contre un contrat Futures sur Obligations d'Etat (cf. Chapitre 7) bénéficient aussi d'un statut spécifique. Le titre le moins-cher-à-livrer (CTD) en particulier se traite usuellement avec une prime positive et peut même faire l'objet de « squeezes » temporaires
Repo	Les titres chers dans la courbe (« Special ») sont souvent chers en repo d'où la nécessité de mettre en cohérence les obligations de l'échantillon à repo flat (« GC »)

TAB. 3.8 – Facteurs Exogènes (Hors Modèle)

On peut être ainsi amené à construire non pas une courbe des taux zéro-coupon pour un émetteur donné (Etat) mais plusieurs courbes des taux zéro-coupon corresponds à des sous-ensembles homogènes des titres obligataires.

On pourra, par exemple distinguer :

- « On-the-run » Treasury bonds : Titres récemment émis qui sont (encore) activement traités sur le marché secondaire et par les banques chargées de placer le papier au près des investisseurs institutionnels (Ex : Spécialistes en Valeurs du Trésor en France et Primary Dealers aux US) et sont les (nouvelles) benchmarks sur les maturités phares (2A, 5A, 10A et 30A)
- « Off-the-run » Treasury bonds : Anciennes émissions qui ne sont plus activement traitées sur le marché secondaire et dont une part importante de l'encours est bloqué jusqu'à échéance dans les actifs des investisseurs institionnels (en particulier les assureurs

vie qui utilisent les obligations d'Etat pour couvrir leurs engagement à long terme au passif)

Le même problème se pose évidemment aussi pour le **pricing des obligations hors échantillon** puisque l'analyse présentée à la sous-section 3.3.2 suppose que le titre obligataire est en tout points cohérent avec les obligations choisies pour la construction de la courbe des taux zéro-coupons. Le pricing zéro-coupon d'une obligation hors échantillon n'est donc pas uniquement un problème quantitatif mais requiert de la part du trader ou du gérant de l'expérience et du jugement pour prendre en compte les facteurs qualitatifs hors modèle.

Enfin, les stratégies présentées dans dans les sous-paragraphes 3.3.2.2 et 3.3.2.3 ne sont pas directement utilisables car **les titres zéro-coupon Etats n'existent pas dans le marché** (ce qui interdit la construction de synthétiques zéro-coupon). En pratique, comme nous le verrons au Chapitre 4, on va arbitrer le titre considéré (bullet) contre un synthétique actuariel (barbell). Le passage d'une couverture zéro-coupon à une couverture actuarielle n'est sependant pas neutre en terme de risques. Si dans le cas d'un synthétique zéro-coupon, la couverture est parfaite par construction, ce n'est plus le cas avec un barbell (couverture actuarielle).

Chapitre 4

Barbells : Concepts et Stratégies

Nous commençons par analyser qualitativement une position obligataire long et short en fonction du delta (sensibilité actuarielle), gamma (convexité actuarielle) et theta (portage). Ces compléments d'informations sur les obligations nous seront utiles dans la construction et l'analyse des positions de Butterfly et des stratégies associées. On appelle butterfly une position obligataire dans laquelle on est simultanément long d'une obligation de maturité quelconque (bullet) et short de deux obligations sur des maturités adjacentes (barbell). Il existe deux types de butterfly (ou de barbell) selon les contraintes de couvertures utilisées pour construire le barbell en fonction de la taille (montant nominal) sur le bullet. Un butterfly « Duration/Cash-Neutral » est construit de telle sorte que les market values et les durations soient identiques sur le barbell et le bullet. Un butterfly « Shift/Twist-neutral » est construit de telle sorte que la position globale est insensible au risque de shift et de twist (actuariels). On étudie ces deux types de butterfly en précisant les contraintes de couvertures, les montants nominaux pour le barbell, le spread de convexité, l'analyse du P/L et les contextes d'utilisation.

4.1 Analyse des Positions Obligataires

On poursuit dans cette section l'étude des obligations à taux fixe « in fine » commencée au Chapitre 3. Une position obligataire peut, à l'instar de ce que l'on fait usuellement sur le marchés des options, s'analyser en terme de « greeks ». Nous allons donner les formules des trois principaux « greeks » à prendre en compte pour analyser une position obligataire simple et montrer comment ces formules peuvent êtres étendues au cas d'un portefeuille obligataire. Ces compléments d'informations sur les obligations à taux fixe « in fine » nous seront utiles dans la construction et l'analyse des barbells obligataires à la section 4.2.

4.1.1 Calcul des « greeks » d'une Position Obligataire

Considérons un titre obligataire distribuant les cashflows $\mathrm{F_i}$ aux dates $\mathrm{t_i}$ (i=1. . . N). Le prix de ce titre est fonction de son taux actuariel $\mathrm{R_{act}}$ et du temps t :

$$P\left(R_{act};\, t\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{F_i}{\left(1+R_{act}\right)^{t_i - t}}$$

avec les notations classiques suivantes :

- $\mathrm{t_i}$: i+1-$\mathrm{f_{cc}}$$(1 \leq \mathrm{i} < \mathrm{N})$

– $\mathrm{F_i}$: Cashflow à la date $\mathrm{t_i}$ $(1 \leq \mathrm{i} < \mathrm{N})$

La variation de valeur instantannée de cette position obligataire peut être résumée par les éléments suivants :

– Delta : Sensibilité actuarielle
– Gamma : Convexité actuarielle
– Theta : Passage du temps (Portage – financement inclus)

Donnons les formules du delta, du gamma et du theta de notre position obligataire.

Le **delta** correspond à la dérivée première de $P\,(R_{act};\,t)$ par rapport au taux actuariel $\mathrm{R_{act}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial R_{act}} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{-F_i \times (t-t_i) \times (1+R_{act})^{t_i-t-1}}{(1+R_{act})^{2\times(t_i-t)}} \\
&= \frac{1}{(1+R_{act})} \sum_{i=1}^{N} \frac{-F_i \times (t-t_i)}{(1+R_{act})^{t_i-t}} \\
&= \frac{P}{(1+R_{act})} \left[\frac{1}{P} \sum_{i=1}^{N} \frac{-F_i \times (t-t_i)}{(1+R_{act})^{t_i-t}} \right]
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial R_{act}} = -\frac{D}{(1+R_{act})} \times P$$

On constate que le delta (ou sensibilité actuarielle) d'une position obligataire est négatif, les prix évoluent en sens inverse des taux.

Le **gamma** correspond à la dérivée seconde de $P\,(R_{act};\,t)$ par rapport au taux actuariel $\mathrm{R_{act}}$.

Partons de l'expression suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial R_{act}} = \frac{1}{(1+R_{act})} \sum_{i=1}^{N} \frac{-F_i \times (t-t_i)}{(1+R_{act})^{t_i-t}}$$

En dérivant cette expression par rapport à $\mathrm{R_{act}}$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial R_{act}^2} = \frac{1}{(1+R_{act})^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{F_i \times (t-t_i) \times (t-t_i+1)}{(1+R_{act})^{t_i-t}}$$

On constate que la convexité d'un titre obligataire est une quantité positive quel que soit le taux actuariel $\mathrm{R_{act}}$. En conséquence :

– A la baisse du taux actuariel : le prix monte plus que prévu par son approximation linéaire
– A la hausse du taux actuariel : le prix baisse moins que prévu par son approximation linéaire

Le graphique 4.1 ci-dessous permet de comprendre l'erreur réalisée lorsque l'on calcule la variation du prix d'une obligation à partir d'une approximation linéaire (delta).

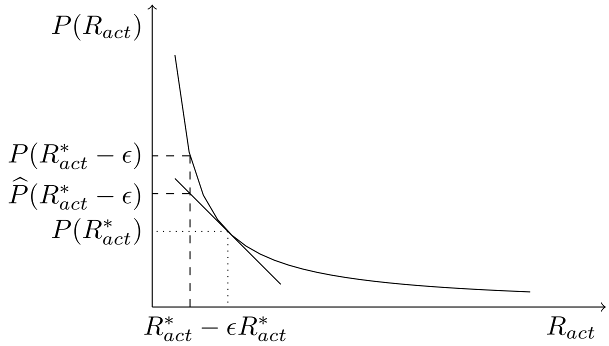

FIG. 4.1 – *Convexité de la Relation Prix-Taux*

Notons que la prise en compte de la convexité permet de réduire sensiblement cette erreur mais en aucun cas de l'annuler [1].

La convexité d'une obligation est très liée à la façon dont les cashflows sont distribués autour de la duration de l'obligation en terme de montants et de distance.

Pour le montrer, il faut introduire le concept de dispersion.

La dispersion d'un échéancier de cashflows mesure la façon dont les cashflows de cet échéancier sont répartis autour de la duration de cet échéancier. La dispersion M est définie par la formule :

$$M = \sqrt{\frac{1}{P} \times \sum_{i=1}^{N} (t_i - D)^2 \times V_i} \qquad avec \qquad V_i = \frac{F_i}{(1 + R_{act})^{t_i}}$$

En réarrangeant les termes dans la définition de la convexité donnée précédemment, on obtient une expression de la convexité en fonction de la dispersion et de la duration [2] :

$$C = \frac{M^2 + D^2 + D}{(1 + R_{act})^2}$$

On a en effet :

$$\begin{aligned}
(1 + R_{act})^2 \times C &= \frac{1}{P} \times \sum_{i=1}^{N} (t_i + 1) \times t_i \times V_i \\
&= \frac{1}{P} \times \sum_{i=1}^{N} \left[(t_i - D)^2 + 2 \times t_i \times D - D^2 + t_i \right] \times V_i \\
&= \frac{1}{P} \times \sum_{i=1}^{N} (t_i - D)^2 \times V_i + \frac{2 \times D}{P} \times \sum_{i=1}^{N} t_i \times V_i \\
&\quad - \frac{D^2}{P} \times \sum_{i=1}^{N} V_i + \frac{1}{P} \times \sum_{i=1}^{N} t_i \times V_i
\end{aligned}$$

1. Pour celà il faudrait prendre en compte les termes d'ordres supérieurs dans le développement limité de $P(R_{act})$ au voisinage de R^*_{act}

2. Cf. Valtonen E. (1998), Barbells - A Nordic perspective, Research Paper Handelsbanken

Donc au final, on a bien :

$$(1 + R_{act})^2 \times C = M^2 + D^2 + D$$

Ce qui termine la démonstration.

On constate donc qu'à duration et taux actuariel donnés, la convexité est une fonction croissante de la dispersion[3].

Le **theta** correspond à la dérivée première de $P\left(R_{act}; t\right)$ par rapport au temps t.

On a :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{F_i}{(1 + R_{act})^{t_i - t}}\right] \times \frac{\partial (1 + R_{act})^t}{\partial t}$$

Ecrivons $(1 + R_{act})^t$ sous la forme $e^{t \times Log(1+R_{act})}$, on obtient :

$$\frac{\partial (1 + R_{act})^t}{\partial t} = e^{t \times Log(1+R_{act})} \times Log\left(1 + R_{act}\right) = (1 + R_{act})^t \times Log\left(1 + R_{act}\right)$$

Comme $Log\left(1 + R_{act}\right)$ est équivalent à $\mathrm{R}_{\mathrm{act}}$ pour $\mathrm{R}_{\mathrm{act}}$ petit devant 1, on a finalement :

$$\frac{\partial P}{\partial t} \simeq R_{act} \times P$$

Le theta de l'obligation, aussi appelé portage, mesure l'appréciation de la valeur de l'obligation liée au passage du temps.

A titre d'exemple, le tableau 4.1 ci-dessous donne les « greeks » ainsi que la duration modifiée de trois obligations « au pair » de maturités respectives 5A, 7A et 10A.

	5A	7A	10A
Coupon	3%	3.25%	3.5%
Delta	-4.579	-6.171	-8.316
Gamma	0.261	0.462	0.838
Theta	3	3.25	3.5
Duration Modifiée	4.759	6.172	8.316

TAB. 4.1 – Exemple - Calcul des « Greeks »

Les calculs intermédiaires (applications directes des formules précédentes) ne sont pas reproduits ici.

3. Ce résultat nous sera utile lors du paragraphe 4.2.3

4.1.2 Calcul des « greeks » d'un Portefeuille Obligataire

Considérons maintenant le cas d'un portefeuille obligataire constitué de K obligations distinctes T_k (k=1...K) investies pour des montants nominaux respectifs N_k (k=1...K) que l'on suppose positifs.

La valeur V du portefeuille est donnée par la formule :

$$V = \sum_{k=1}^{K} V_k\left(R_{act,k}\right) \qquad avec \qquad V_k\left(R_{act,k}\right) = N_k \times P_k\left(R_{act,k}\right)$$

avec les notations suivantes :

- V_k: Contribution du titre T_k à la valeur du portefeuille
- P_k: Prix du titre T_k en %
- N_k: Montant nominal du titre T_k
- $R_{act,k}$: Taux actuariel du titre T_k

Le calcul des « greeks » de notre portefeuille obligataire est envisageable de deux façon différentes :

1. De façon exacte (non-linéaire) en raisonnant au niveau des cashflows (échéancier)
2. De façon approchée (linéaire) en raisonnant au niveau des obligations (portefeuille)

4.1.2.1 Calculs Non-Linéaires/Exacts

Si l'on raisonne à partir des cashflows individuels, on retrouve la situation décrite dans le paragraphe 4.1.1 précédente puisque nous n'avons fait aucune hypothèse particulière sur la fréquence et les montants des cashflows $\{F_i\}_{i=1...N}$ dans les formules données dans ce paragraphe. Il est néanmoins nécessaire de définir un taux de rendement actuariel unique R_{act} pour cet échéancier de cashflows dont on connait la valeur actuelle V.

On calcule le taux actuariel R_{act} de cet échéancier comme si il s'agissait d'une obligation classique en « inversant » la relation prix-taux suivante :

$$V\left(R_{act}\right) = \sum_{k=1}^{K} V_k\left(R_{act,k}\right)$$

Les expressions de part et d'autre du signe égal sont des sommes des cashflows actualisés avec :

- Dans la partie à gauche de l'égalité chaque cashflow est actualisé au taux actuariel unique R_{act}
- Dans la partie à droite de l'égalité chaque cashflow est actualisé au taux actuariel correspondant à l'obligation à laquelle ce cashflow appartient

Mathématiquement, cette expression définie implicitement le taux actuariel R_{act} de l'échancier de cashflows comme une fonction ϕ des taux actuariels $\{R_{act,k}\}_{k=1...K}$ des obligations constituants notre portefeuille obligataire :

$$R_{act} = \phi\left(R_{act,1}, R_{act,2}, \ldots, R_{act,K}\right)$$

On est dans le cadre d'application du théorème des fonctions implicites[4] et on montre qu'une telle fonction ϕ existe bien compte tenu des « bonnes » propriétés des fonctions V et V_k (k=1...K). En pratique, le taux actuariel R_{act} est calculé numériquement comme dans le cas d'une obligation à taux fixe « in fine » classique.

Ayant posé le problème de cette façon, les formules données dans la sous-section 4.1.1 s'appliquent directement à notre portefeuille obligataire.

4.1.2.2 Calculs Linéaires/Approchés

Une autre façon de procéder consiste à raisonner au niveau des obligations constitutives du portefeuille obligataire et à postuler que les « greeks » du portefeuille (pour EUR100 de nominal) peuvent êtres calculées comme des moyennes des « greeks » des obligations individuelles pondérées par les montants nominaux.

Plus précisément, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\delta &= \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \times \delta_k \\ \gamma &= \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \times \gamma_k \\ \theta &= \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \times \theta_k\end{aligned}$$

avec :

$$\alpha_k = \frac{N_k}{N} \ (k = 1 \ldots K) \qquad et \qquad N = \sum_{k=1}^{K} N_k$$

Il s'agit ici de formules approchées et en aucun cas de formules exactes sauf dans le cas trés spécifique où la courbe des taux est plate, auquel cas on a :

$$R_{act} = R_{act,1} = R_{act,2} = \ldots = R_{act,K}$$

Ces formules sont souvent accompagnées dans la littérature par deux approximations du même type pour le taux actuariel R_{act} du portefeuille :

1. Simple Weighting Yield (SWY)
2. Duration Weighting Yield (DWY)

La formule la plus simple consiste à calculer le taux actuariel du portefeuille comme la moyenne des taux actuariels des obligations individuelles pondérées par les market values (SWY) :

$$R_{act} = \sum_{k=1}^{K} \beta_k \times R_{act,k}$$

4. Le théorème des fonctions implicites est un résultat classique de l'étude des fonctions vectorielles que l'on trouvera par exemple dans le livre de A. Doneddu, *Nouveau Cours de Mathématiques - Tome 5 : Fonctions Vectorielles, Séries et Equations différentielles*, Editions Vuibert

avec :

$$\beta_k = \frac{V_k}{V} \ (k = 1 \ldots K) \qquad et \qquad V = \sum_{k=1}^{K} V_k$$

Une autre approche consiste à calculer $\mathrm{R_{act}}$ comme la moyenne des taux actuariels des obligations individuelles pondérés par le produit des market values par les durations (DWY) :

$$R_{act} = \frac{\sum_{k=1}^{K} V_k \times D_k \times R_{act,k}}{\sum_{k=1}^{K} V_k \times D_k}$$

Notons que si, par analogie avec le calcul de la duration d'une obligation, on considère de plus que la duration du portefeuille peut être calculée comme la moyenne des durations des obligations individuelles pondérées par leurs market values :

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{K} V_k \times D_k}{\sum_{k=1}^{K} V_k}$$

la formule précédente de $\mathrm{R_{act}}$ peut alors être reformulée de la façon suivante (formule « courante » du DWY) :

$$R_{act} = \sum_{k=1}^{K} \beta_k \times \frac{D_k}{D} \times R_{act,k}$$

La première formule (SWY) a le mérite, en plus de sa simplicité, d'être cohérente avec la formule de calcul du portage du portefeuille obligataire. Par contre, elle est (empiriquement) moins précise que la seconde formule (DWY) en tant que valeur approchée du taux de rendement actuariel du portefeuille.

Les formules données ci-dessus sont des approximations couramment mentionnées dans la littérature professionnelle [5] et utilisées sur les marchés, elles n'ont donc pas à être démontrées. La valeur de ces formules notamment pour les professionnels résulte d'un compromis entre précision numérique, expressivité formelle et simplicité computationnelle.

4.1.3 Analyse d'une Position Obligataire

On considère une position obligataire quelconque qui, comme nous venons de le voir, peut être une obligation unique (sous-section 4.1.1) ou un portefeuille obligataire normalisé (sous-section 4.1.2).

Deux approches sont envisageables pour analyser le P/L de cette position obligataire (financement inclus) sur une période donnée [t, t+Δt] :

1. L'approche **analytique** qui consiste à décomposer le P/L de notre position obligataire sur les différents « facteurs » (au sens général du terme) que sont le delta, le gamma et le theta
2. L'approche **synthétique** qui consiste à calculer le « point mort » de la position obligataire à l'horizon d'investissement (t+Δt) qui n'est autre que le taux forward de la position obligataire à cet horizon

Ces deux approches sont complémentaires.

5. Voir par exemple, Paul Fage, *Yield Calculations*, CSFB Research, October 1986

4.1.3.1 Approche Analytique (« Greeks »)

En différençiant le prix P(R_{act},t) de cette position obligataire au deuxième ordre par rapport à R_{act} et au premier ordre par rapport à t, on obtient :

$$dP \simeq \frac{\partial P}{\partial R_{act}} \times dR_{act} + \frac{1}{2} \times \frac{\partial^2 P}{\partial R_{act}^2} \times dR_{act}^2 + \frac{\partial P}{\partial t} \times dt$$

Expression qu'il est possible de réécrire en utilisant les « greeks » unitaires calculés précédemment à savoir le delta (sensibilité), le gamma (convexité) et le theta (portage) :

$$\triangle P \simeq \delta \times \triangle R_{act} + \frac{1}{2} \times \gamma \times \triangle R_{act}^2 + \theta \times \triangle t$$

Ainsi, une position obligataire peut s'analyser en terme de « greeks » de la même façon qu'une position optionnelle. Le tableau suivant donne les profils de risque en delta, gamma et theta d'une position obligataire simple (long et short), hors financement.

	Position Obligataire	
	Long	Short
Delta	Négatif (-) « Les prix montent lorsque les taux baissent »	Positif (+)« Les prix baissent lorsque les taux montent »
Gamma	Positif (+) « ils montent d'autant plus que la convexité est importante »	Négatif (-) « Ils baissent d'autant moins que la convexité est importante »
Theta	Positif (+) « Acheter un titre obligataire c'est prêter de l'argent avec intérêt »	Négatif (-) « Vendre un titre obligataire c'est emprunter de l'argent avec intérêt »

TAB. 4.2 – Analyse d'une Position Obligataire

Supposons que l'on finance l'achat du titre obligataire au taux repo r sur la période de portage Δt de la position, le portage total (obligation + financement) s'écrit alors :

$$Portage\,Total = P \times (R_{act} - r) \times \triangle t$$

On constate que le portage total (financement inclus) dépend de la pente de la courbe des taux :

1. Lorsque la courbe des taux est croissante (« normale »), les taux LT sont supérieurs aux taux CT donc le portage total positif
2. Lorsque la courbe des taux est décroissante (« inversée »), les taux LT sont inférieurs aux taux CT donc le portage total négatif

C'est évidemment le constat inverse qui prévaut si la position est vendeuse sur l'obligation.

L'analyse réalisée dans cette section sur les « greeks » d'une position obligataire est importante sur le plan pratique car ces « greeks » servent à structurer des portefeuilles obligataires (long/short) de façon à obtenir un profil « rendement-risques » souhaité par l'arbitragiste. **Il faut néanmoins garder à l'esprit que l'estimation de la variation de valeur du portefeuille à partir des « greeks » n'est qu'une approximation.** Cette approximation peut être suffisante pour des positions détenues sur des durées relativement courtes (quelques semaines) et/ou pour des objectifs en terme de variation de spread relativement faibles (quelques points de base).

4.1.3.2 Approche Synthétique (« Taux Forward »)

On sait (cf. Chapitre 2 et Exercice 3) que le taux forward d'une obligation calculé en t à l'horizon t+Δt n'est autre que le taux de cette obligation à cet horizon pour lequel la position obligataire à un P/L nul sur la période [t, t+Δt].

Ce taux forward correspond donc au « point mort » de la position obligataire, calculons-le.

Notre position obligataire consiste à être :

- Long de l'obligation (en cash) acheté au prix P (taux R)
- Short de l'obligation (en repo) au taux repo r

Cette position peut aussi s'interpréter comme un achat « forward » de l'obligation au prix « forward » :

$$P^{fwd} = P \times (1 + r \times \triangle t)$$

Si l'on note R_{act}^{fwd} le taux actuariel « forward » de cette obligation calculé en t pour un horizon t+Δt, par définition du taux de rendement actuariel, on peut alors écrire :

$$P^{fwd} = \sum_{k=1}^{K} \frac{F_k}{\left(1 + R_{act}^{fwd}\right)^{k - \triangle t}}$$

En combinant ces deux dernières expressions, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{F_k}{\left(1 + R_{act}^{fwd}\right)^{k - \triangle t}} = P \times (1 + r \times \triangle t)$$

Contrairement au cas d'un zéro-coupon, il n'y a pas de formule simple du taux actuariel « forward » R_{act}^{fwd} d'une obligation en fonction de son taux actuariel « spot » R_{act} et du taux repo r. Il doit être calculé numériquement à partir de l'équation précédente.

On peut néanmoins donner une formule approchée du taux forward en « regardant » notre position obligataire comme un zéro-coupon de maturité égale à sa duration :

$$R_{act}^{fwd} \simeq \left[\frac{(1 + R_{act})^D}{(1 + r \times \triangle t)} \right]^{1/D - \triangle t} - 1$$

Dans cette dernière formule, D est la duration de la position obligataire calculée en t.

4.2 Généralités sur les Barbells Obligataires

Considérons une obligation à taux fixe « in fine » quelconque dont on souhaite évaluer la « cherté » relative vis-à-vis des autres obligations de même nature. La solution proposée au Chapitre 3, consistant à construire un synthétique zéro-coupon de cette obligation, est théoriquement la meilleure possible puisque la couverture du titre obligataire est parfaite. Cependant en l'absence de marché des zéro-coupon il n'est pas possible de la mettre en œuvre en pratique.

Dans cette section, nous allons introduire le concept de barbell obligataire comme alternative concrète au synthétique zéro-coupon. La solution consiste à construire un synthétique actuariel de l'obligation à partir d'un portefeuille constitué de deux titres adjacents. L'objectif est donc d'obtenir un équivalent-actuariel d'une couverture théorique zéro-coupon de cette obligation en utilisant des instruments de même nature négociables sur le marché.

4.2.1 Barbell vs Bullet Obligataire (Butterfly)

On note MT (Moyen Terme), l'obligation à pricer/couvrir (bullet).

Un barbell pour cette obligation MT est une couverture actuarielle de cette obligation créée à partir de deux autres obligations CT (Court Terme) et LT (Long Terme) dont les maturités respectives encadrent la maturité de l'obligation à couvrir. Si $\mathrm{D_{CT}}$, $\mathrm{D_{MT}}$ et $\mathrm{D_{LT}}$ sont les durations respectives des obligations CT, MT et LT, on a :

$$\boxed{\mathrm{D_{CT}} < \mathrm{D_{MT}} < \mathrm{D_{LT}}}$$

Dans ce cadre, **l'obligation d'origine est appelée bullet tandis que le portefeuille constitué des deux obligations de couverture est appelé barbell.** La position globale, (long vs short) du barbell et (short vs long) du bullet est appelée (long vs short) butterfly.

$$\boxed{\text{(Long/Short) Butterfly} = \text{(Long/Short) Barbell} + \text{(Short/Long) Bullet}}$$

Le graphique ci-dessous illustre une position de (long) butterfly dans une courbe des taux « normale » (les flêches représentent les sensibilités actuarielles des positions obligataires).

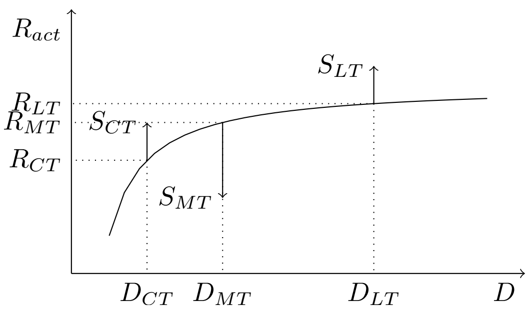

FIG. 4.2 – *Position de Butterfly*

Comment reconstituer un synthétique « actuariel » du titre MT à partir des titres adjacents de maturités CT et LT ? On se donne deux contraintes de couvertures permettant le calcul des montants nominaux $\mathrm{N_{CT}}$ et $\mathrm{N_{LT}}$ des titres CT et LT pour un montant nominal $\mathrm{N_{MT}}$ du titre MT donné.

Pour fixer les idées, considérons un barbell construit à partir des contraintes suivantes [6] :

1. Le butterfly est couvert en sensibilité (« shift-neutral »)

6. Les différentes structures de barbell et leurs propriétés respectives seront décrites à la section 4.3

2. Le butterfly a une market value nulle (« cash-neutral »)

En utilisant les notations précédentes, ces deux contraintes peuvent s'écrire de façon formelle[7] :

$$N_{MT} \times S_{MT} - N^*_{MT} \times S^*_{MT} = 0 \qquad (shift - neutral)$$

et

$$N_{MT} \times P_{MT} - N^*_{MT} \times P^*_{MT} = 0 \qquad (cash - neutral)$$

Notons qu'une conséquence triviale des contraintes de couverture précédentes est l'égalité entre les durations modifiées du bullet et du barbell :

$$D^{mod*}_{MT} = D^{mod}_{MT}$$

A ce stade, on suppose que l'on a calculé les montants nominaux $\mathrm{N_{CT}}$ et $\mathrm{N_{LT}}$ des obligations CT et MT du barbell à partir des contraintes de couverture propres à la structure de barbell choisie et en fonction du montant nominal $\mathrm{N_{MT}}$ du bullet.

Si V^*_{MT} est la market value du barbell, on a alors par construction :

$$V^*_{MT} = V_{CT} + V_{LT}$$

avec :

$$V_{CT} = N_{CT} \times P_{CT} \qquad et \qquad V_{LT} = N_{LT} \times P_{LT}$$

Comment calculer les propriétés actuarielles du barbell en fonction des propriétés individuelles des titres CT et LT et des montants nominaux $\mathbf{N_{CT}}$ et $\mathbf{N_{LT}}$?

On va simplement appliquer les résultats du paragraphe 4.1.2 et regarder notre barbell obligataire comme si il s'agissait d'une unique obligation. On commence par postuler que le montant nominal N^*_{MT} du barbell s'écrit comme la somme des montants nominaux $\mathrm{N_{CT}}$ et $\mathrm{N_{LT}}$ des obligations CT et LT qui le constituent :

$$N^*_{MT} = N_{CT} + N_{LT}$$

Les formules de calcul des principales propriétés unitaires du barbell sont regroupées dans le tableau 4.3[8].

7. En pratique, comme nous le verrons à la section 4.3, on calcule directement les montants nominaux des obligations N_{CT} et N_{LT} constitutives du barbell en fonction du montant nominal N_{MT} du bullet

8. D'une façon générale, on désigne par X_{MT} et X^*_{MT} les valeurs de la propriété X pour le bullet et le barbell respectivement. Les formules données dans le tableau 4.3 découlent du postulat précédent et des formules données au paragraphe 4.1.2

Propriété	Notation	Formule
Prix (%)	P^*_{MT}	$\frac{N_{CT}\times P_{CT}+N_{LT}\times P_{LT}}{N^*_{MT}}$
Duration	D^*_{MT}	$\frac{V_{CT}\times D_{CT}+V_{LT}\times D_{LT}}{V^*_{MT}}$
Sensibilité	S^*_{MT}	$\frac{N_{CT}\times S_{CT}+N_{LT}\times S_{LT}}{N^*_{MT}}$
Convexité	Γ^*_{MT}	$\frac{N_{CT}\times \Gamma_{CT}+N_{LT}\times \Gamma_{LT}}{N^*_{MT}}$
Portage	$P^*_{MT}\times R^*_{MT}$	$\frac{N_{CT}\times P_{CT}\times R_{CT}+N_{LT}\times P_{LT}\times R_{LT}}{N^*_{MT}}$
SWY	R^*_{MT}	$\frac{V_{CT}\times R_{CT}+V_{LT}\times R_{LT}}{V_{CT}+V_{LT}}$
DWY	R^*_{MT}	$\frac{V_{CT}\times D_{CT}\times R_{CT}+V_{LT}\times D_{LT}\times R_{LT}}{V_{CT}\times D_{CT}+V_{LT}\times D_{LT}}$
Taux Repo	r^*_{MT}	$\frac{V_{CT}\times r_{CT}+V_{LT}\times r_{LT}}{V_{CT}+V_{LT}}$
DWY$^{\text{fwd}}$	R^{fwd*}_{MT}	$\frac{V_{CT}\times D_{CT}\times R^{fwd}_{CT}+V_{LT}\times D_{LT}\times R^{fwd}_{LT}}{V_{CT}\times D_{CT}+V_{LT}\times D_{LT}}$

Tab. 4.3 – Calcul des Propriétés Unitaires du Barbell

Comment interpréter le spread forward ?

Le spread forward correspond à la différence entre le taux actuariel forward du bullet et le taux actuariel forward du barbell :

$$Spread^{fwd}_{DWY} = R^{fwd*}_{MT} - R^{fwd}_{MT}$$

Par analogie avec le taux forward, le spread forward calculé en t à l'horizon t+Δt est le niveau du spread actuariel en t+Δt pour lequel le P/L de la position sur la période [t, t+Δt] de butterfly est nul.

C'est donc le « point mort » de la position de butterfly à l'horizon t+Δt.

Quels sont les principales variables de décision ?

A l'instar de l'analyse réalisée au Chapitre 3, les deux variables de décision principales pour une stratégie de butterfly sont le spread (entre les taux actuariels du barbell et du bullet) et le portage total (obligataire et financement repo).

Le spread de taux actuariel est la différence entre le taux actuariel du bullet et le taux actuariel du barbell :

$$Spread_{DWY} = R^*_{MT} - R_{MT}$$

Le portage total est la différence entre le spread (représentatif du portage obligataire) et la prime repo (représentatif du financement) :

$$Portage = Spread_{SWY} - Prime$$

La prime repo est la différence entre le taux repo du bullet et le taux repo du barbell :

$$Prime = r^*_{MT} - r_{MT}$$

Notons que pour les raisons données au paragraphe 4.1.2, le calcul du spread en tant que variable de trading est (généralement) réalisée en utilisant le DWY tandis que le calcul du spread en tant que mesure du portage obligataire est (toujours) réalisée en utilisant le SWY.

4.2.2 Analyse du P/L d'une Stratégie de Butterfly

Au Chapitre 3, nous avons présenté les stratégies de « relative value trading » et de « repo trades » de façon séparée pour la clareté de l'exposé. Dans ce paragraphe, nous allons calculer le P/L ex-ante d'une position de butterfly dans le cas général, c'est-à-dire sans faire d'hypothèse a priori ni sur la cherté relative du bullet vis-à-vis du barbell en cash ou en repo, ni sur la dynamique supposée du spread de taux entre le barbell et le bullet.

Supposons que le timing des opérations est le suivant :

- Date t : $\mathrm{Spread}_{\mathrm{t}}$ (Entrée)
- Date t+Δt : $\mathrm{Spread}_{\mathrm{t}+\Delta \mathrm{t}}$ (Sortie)

Les opérations à réaliser dans le marché aux dates t et t+Δt sont décrites dans le tableau 4.4 ci-dessous.

Branches	Marchés	t	t+Δt
Bullet	Cash	Vente de N_{MT} du bullet au prix $P_{MT,t}$	Rachat de N_{MT} du bullet au prix $P_{MT,t+\Delta t}$
	Repo	Emprunt de N_{MT} du bullet au taux repo $r_{t,t+\triangle t}$ sur la période [t, t+Δt]	$n.a.$
Barbell	Cash	Achat de N^*_{MT} du barbell au prix $P^*_{MT,t}$	Rachat de N^*_{MT} du barbell au prix $P^*_{MT,t+\Delta t}$
	Repo	Prêt de N^*_{MT} du barbell au taux repo $r^*_{t,t+\triangle t}$ sur la période [t, t+Δt]	$n.a.$

TAB. 4.4 – Tableau des Opérations en t et t+Δt

Conformément à l'analyse faite au sous-paragraphe 4.1.3.1, le P/L de notre position de butterfly peut être décomposée en trois parties :

1. Le P/L lié à la variation du spread (Delta)
2. Le P/L lié au portage total (Portage)
3. Le P/L lié à la convexité de la position (Convexité)

Le P/L total n'est autre que la somme de ces trois composantes :

$$\boxed{P/L_{t,t+\triangle t} \simeq P/L^{DELTA}_{t,t+\triangle t} + P/L^{PORTAGE}_{t,t+\triangle t} + P/L^{CONVEXITE}_{t,t+\triangle t}}$$

Le P/L lié à la variation du spread (Delta) s'écrit de façon évidente comme la différence des P/L de même nature sur la partie longue (barbell) et la partie short (bullet) :

$$P/L^{DELTA}_{t,t+\triangle t} = N^*_{MT} \times S^*_{MT} \times \triangle_{t,t+\triangle t} R^*_{MT} - N_{MT} \times S_{MT} \times \triangle_{t,t+\triangle t} R_{MT}$$

En tenant compte de la contrainte de couverture en sensibilité (shift-neutral), ce P/L peut finalement être réécrit de la façon suivante :

$$\boxed{P/L^{DELTA}_{t,t+\triangle t} = V_{MT} \times D^{mod}_{MT} \times \triangle_{t,t+\triangle t} Spread}$$

Pour le calcul du P/L lié au portage total de la position de butterfly (Portage), il suffit d'appliquer la formule de calcul du portage total (position obligataire + financement en repo) à notre position de butterfly (long barbell / short bullet), on trouve :

$$P/L^{PORTAGE}_{t,t+\triangle t} = V^*_{MT} \times \left(R^*_{MT} - r^*_{t,t+\triangle t}\right) \times \triangle t - V_{MT} \times \left(R_{MT} - r_{t,t+\triangle t}\right) \times \triangle t$$

En tenant compte de la contrainte sur la market value du butterfly (cash-neutral), on trouve :

$$\boxed{P/L^{PORTAGE}_{t,t+\triangle t} = V_{MT} \times Portage \times \triangle t}$$

En appliquant la même logique au calcul du P/L lié à la convexité de la position (Convexité), on trouve :

$$P/L^{CONVEXITE}_{t,t+\triangle t} = N^*_{MT} \times \frac{\Gamma^*_{MT}}{2} \times \left[\triangle_{t,t+\triangle t} R^*_{MT}\right]^2 - N_{MT} \times \frac{\Gamma_{MT}}{2} \times \left[\triangle_{t,t+\triangle t} R_{MT}\right]^2$$

Plaçons-nous dans le cadre d'un déplacement parallèle uniforme (shift) des taux actuariels R_{MT} et R^*_{MT} de sorte que :

$$\triangle R_{MT} = \triangle R^*_{MT} = \triangle R \qquad (Shift)$$

On trouve finalement :

$$\boxed{P/L^{CONVEXITE}_{t,t+\triangle t} = \frac{1}{2} \times \left(N^*_{MT} \times \Gamma^*_{MT} - N_{MT} \times \Gamma_{MT}\right) \times \left[\triangle_{t,t+\triangle t} R\right]^2}$$

On notera dans cette dernière formule que le facteur d'exposition à un mouvement parallèle uniforme des taux actuariels (shift) est construit comme la différence entre les convexités du barbell et du bullet pondérées par les montants nominaux :

$$\Gamma_{BUT} = N^*_{MT} \times \Gamma^*_{MT} - N_{MT} \times \Gamma_{MT}$$

En tant que différence entre deux quantités ayant le même ordre de grandeur, la convexité d'un butterfly est a priori un facteur de second ordre qui ne peut être significatif (en terme de P/L) qu'en cas de crise ou de choc non anticipés impliquant un déplacement très important à la hausse ou la baisse de la courbe des taux.

Au final, cette décomposition (dont on rappelle qu'il s'agit d'une approximation) est très utile pour comprendre comment ces différents facteurs (au sens général du terme) contribuent au P/L total de la position de butterfly.

4.2.3 Biais de Convexité

Il existe un biais irréductible entre le taux actuariel du bullet et celui du barbell qui résulte de la différence de convexité entre le bullet et le barbell.

Un barbell est de fait généralement plus convexe que son bullet associé de sorte qu'une position longue sur un butterfly est convexe-positive.

$$\boxed{\Gamma_{BUT} > 0}$$

Cette propriété des barbells peut se justifier par le fait qu'un barbell a de toute évidence une dispersion plus grande que le bullet du fait de sa structure de cashflows qui intègre deux cashflows principaux sur les maturités CT et LT pour un seul pour le bullet sur la maturité MT. Toutes choses égales par ailleurs (en particulier, duration et taux actuariel), un barbell a donc une convexité (unitaire) plus grande que le bullet en vertu du résultat donné au paragraphe 4.1.1. Bien que la convexité de la position globale (butterfly) résulte de contraintes de couverture non parfaitement compatibles avec le raisonnement précédent, on constate empiriquement que la position globale (butterfly) consistant à être long du barbell et short du bullet est en général convexe-positive [9].

Cette propriété remarquable des barbells a pour corollaire que le spread de taux actuariel d'équilibre entre le bullet et le barbell est non nul du fait de la **prime de convexité** que le détenteur du barbell doit payer pour bénéficier de ce surcroît de convexité (par rapport au bullet).

Pour le prouver, calculons la variation de valeur du butterfly en utilisant l'approximation donnée au paragraphe 4.1.3.1 pour le calcul de la variation de valeur du bullet et du barbell.

On a :

$$\triangle P_{MT} \simeq S_{MT} \times \triangle R_{MT} + \frac{1}{2} \times \Gamma_{MT} \times [\triangle R_{MT}]^2 + R_{MT} \times P_{MT} \times \triangle t$$

et

$$\triangle P^*_{MT} \simeq S^*_{MT} \times \triangle R^*_{MT} + \frac{1}{2} \times \Gamma^*_{MT} \times [\triangle R^*_{MT}]^2 + R^*_{MT} \times P^*_{MT} \times \triangle t$$

Partons de la valeur de marché du butterfly :

$$V_{BUT} = N^*_{MT} \times P^*_{MT} - N_{MT} \times P_{MT}$$

En différençiant cette expression à l'ordre 2 par rapport à R et à l'ordre 1 par rapport au temps t et en se plaçant dans le cas d'un déplacement parallèle uniforme (shift) des taux actuariels R_{MT} et R^*_{MT} de sorte que :

$$\triangle R_{MT} = \triangle R^*_{MT} = \triangle R$$

On trouve :

$$\begin{aligned} \triangle V_{BUT} \quad \simeq & \quad \frac{1}{2} \times (N^*_{MT} \times \Gamma^*_{MT} - N_{MT} \times \Gamma_{MT}) \times [\triangle R]^2 \\ + & \quad (V^*_{MT} \times R^*_{MT} - V_{MT} \times R_{MT}) \times \triangle t \end{aligned}$$

Calculons maintenant l'espérance mathématique de $\Delta \mathrm{V}_{\mathrm{BUT}}$ en tenant compte de la contrainte de construction portant sur la market value du butterfly :

$$V^*_{MT} - V_{MT} = 0$$

On trouve :

$$E[\triangle V_{BUT}] \simeq \frac{1}{2} \times (N^*_{MT} \times \Gamma^*_{MT} - N_{MT} \times \Gamma_{MT}) \times \sigma^2_{\triangle R} \times \triangle t + V_{MT} \times \overline{Spread} \times \triangle t$$

avec :

$$\sigma^2_{\triangle R} = E\left[\triangle R^2\right] \qquad et \qquad \overline{Spread} = E\left[R^*_{MT} - R_{MT}\right]$$

9. Le barbell et le bullet n'ont pas forcément la même duration ni le même taux actuariel mais les différences sont en général suffisamment faibles pour que la propriété soit vérifiée empiriquement

Supposons de plus que la position a une convexité positive :

$$N^*_{MT} \times \Gamma^*_{MT} - N_{MT} \times \Gamma_{MT} > 0$$

L'espérance mathématique de ΔV doit être nulle sous hypothèse d'AOA et on doit donc finalement avoir :

$$\overline{Spread} \simeq -\frac{(N^*_{MT} \times \Gamma^*_{MT} - N_{MT} \times \Gamma_{MT}) \times \sigma^2_{\triangle R}}{2 \times N_{MT} \times P_{MT}}$$

Ce résultat montre que le taux actuariel d'un barbell doit être inférieur à celui du bullet pour compenser le surcroît de convexité du barbell par rapport au bullet et la volatilité anticipée du facteur de déplacement parallèle des taux actuariels[10].

4.3 Les Barbells Obligataires en Pratique

Il existe plusieurs façons de construire un barbell selon les contraintes de couverture choisies, le barbell « shift/cash-neutral » n'étant qu'une structure possible parmi d'autres[11].

On dinstingue généralement deux types de barbells :

- Les barbells « cash-neutral » qui n'ont pas d'impact en trésorerie
- Les barbells « twist-neutral » qui sont couverts contre le risque de twist

Pour chaque structure de barbell, nous allons expliciter les points suivants :

- Contraintes de couverture/structure
- Montants nominaux des obligations CT et MT du barbell
- Taux de rendement actuariel « approché » du barbell

La différence essentielle entre ces deux types de structures est liée aux facteurs actuariels pour lesquels la position est couverte ou pas. Le tableau 4.5 résume la situation :

	Facteurs			
Couverture	Type	Shift	Twist	Butterfly
« zéro-coupon »	ZC	Oui	Oui	Oui
Barbells « twist-neutral »	ACT	Oui	Oui	Non
Barbells « cash-neutral »	ACT	Oui	Non	Non

TAB. 4.5 – Couverture des Risques Factoriels

On notera que les couvertures de type « barbell » sont des couvertures imparfaites par construction du fait qu'elles ne couvrent pas la totalité des facteurs de déformation de la courbe des taux zéro-coupons. Cette remarque a des conséquences importantes en terme de trading qui feront l'objet du dernier paragraphe de cette section.

10. Il est parfois mentionné dans la littérature que ce caractère gamma-positif des positions (long) butterfly implique qu'il est préférable d'être long du butterfly plutôt que short du butterfly. En réalité, si le biais de convexité est correctement pricé, il n'y a aucun avantage à être long du butterfly puisque le caractère gamma-positif de la position se paye par un portage moindre

11. Pour une présentation complémentaire des différentes structures de butterfly, le lecteur pourra se référer à Martellini L., Priaulet P. & Priaulet S. (2002), « Understanding the Butterfly Strategy », RI Note n°2002-01 (Crédit Commercial de France)

4.3.1 Barbells de type « Cash-neutral »

Les barbells de type « cash-neutral » sont principalement utilisés dans un contexte de gestion pour compte de tiers. En particulier, l'activité de « bond switching » permet au gérant de contribuer à l'alpha du fond tout en respectant les contraintes de conservation de la market value et de la duration. Le gérant va remplacer un titre « cher » (bullet) par deux titres adjacents « moins chers » (barbell) sans que cette substitution n'ai d'impact sur la market value et la duration du fond.

La première contrainte consiste à imposer l'égalité des market values du barbell et du bullet ce qui formellement s'écrit :

$$N_{CT} \times P_{CT} + N_{LT} \times P_{LT} = N_{MT} \times P_{MT}$$

La seconde contrainte porte sur la conservation de la duration et consiste à imposer l'égalité des durations du barbell et du bullet. La duration est interprétée ici au sens général du terme qui, dans la littérature anglo-saxonne, peut se décliner en :

1. « Macauley-Duration » qui correspond à la duration classique
2. « $-Duration » qui correspond à la sensibilité

Les contraintes de couverture correspondantes s'écrivent respectivement :

$$V_{CT} \times D_{CT} + V_{LT} \times D_{LT} = V_{MT} \times D_{MT} \qquad (''duration - neutral'')$$

et

$$N_{CT} \times S_{CT} + N_{LT} \times S_{LT} = N_{MT} \times S_{MT} \qquad (''shift - neutral'')$$

Dans chacun des deux cas, les contraintes de structure/couverture constituent un système linéaire de deux équations à deux inconnues. Le tableau 4.6 donne les formules de calcul des montants nominaux $\mathrm{N_{CT}}$ et $\mathrm{N_{LT}}$ des titres CT et LT pour un montant nominal $\mathrm{N_{MT}}$ du titre MT donné.

	N_{CT}	N_{LT}
cash/duration-neutral	$N_{MT} \times \frac{P_{MT}}{P_{CT}} \times \lambda_{CT}$	$N_{MT} \times \frac{P_{MT}}{P_{LT}} \times \lambda_{LT}$
cash/shift-neutral	$N_{MT} \times \frac{P_{MT}}{P_{CT}} \times \lambda_{CT}^{mod}$	$N_{MT} \times \frac{P_{MT}}{P_{LT}} \times \lambda_{LT}^{mod}$

TAB. 4.6 – Calcul des Montants Nominaux des Barbells « Cash-Neutral »

avec :

$$\lambda_{CT} = \frac{D_{LT} - D_{MT}}{D_{LT} - D_{CT}} \qquad et \qquad \lambda_{LT} = \frac{D_{MT} - D_{CT}}{D_{LT} - D_{CT}}$$

et

$$\lambda_{CT}^{mod} = \frac{D_{LT}^{mod} - D_{MT}^{mod}}{D_{LT}^{mod} - D_{CT}^{mod}} \qquad et \qquad \lambda_{LT}^{mod} = \frac{D_{MT}^{mod} - D_{CT}^{mod}}{D_{LT}^{mod} - D_{CT}^{mod}}$$

Pour chaque barbell, il est possible de calculer le taux actuariel « approché » R^*_{MT} en partant de la formule de calcul du P/L « approché » du butterfly au premier ordre par rapport aux taux actuariels des trois obligations CT, MT et LT :

$$\triangle V_{BUT} = N_{MT} \times S_{MT} \times \triangle R_{MT} - N_{CT} \times S_{CT} \times \triangle R_{CT} - N_{LT} \times S_{LT} \times \triangle R_{LT}$$

En remplaçant dans cette dernière expression les montants nominaux $\mathrm{N_{CT}}$ et $\mathrm{N_{LT}}$ des titres CT et LT par les formules données plus haut, on trouve les expressions suivantes du taux actuariel R^*_{MT} du barbell :

$$R^*_{MT} = \frac{D^{mod}_{CT}}{D^{mod}_{MT}} \times \lambda_{CT} \times R_{CT} + \frac{D^{mod}_{LT}}{D^{mod}_{MT}} \times \lambda_{LT} \times R_{LT} \qquad (\text{"}duration - neutral\text{"})$$

et

$$R^{mod*}_{MT} = \frac{D^{mod}_{CT}}{D^{mod}_{MT}} \times \lambda^{mod}_{CT} \times R_{CT} + \frac{D^{mod}_{LT}}{D^{mod}_{MT}} \times \lambda^{mod}_{LT} \times R_{LT} \qquad (\text{"}shift - neutral\text{"})$$

On montre facilement que **ces formules de calcul du taux de rendement actuariel du barbell sont du même type que le « Duration weighting Yield » (DWY)**. Il n'y a cependant d'égalité formelle que dans le cas des barbells de type « shift-neutral » en calculant le « Duration Weighting Yield » à partir des durations modifiées :

$$R^{mod*}_{MT} = D^{mod}WY$$

En pratique (et on le devine en comparant les équations), ces deux structures de barbell donnent des résultats assez proches (montants nominaux des obligations CT et MT et taux de rendement actuariel approché du barbell).

A titre d'exemple, calculons la structure d'un barbell 5A/10A permettant de couvrir un bullet 7A pour un montant de EUR 10M[12].

Le barbell est de type « Cash/Shift-neutral ».

Par application directe des formules précédentes, on trouve :

$$\begin{cases} N_{5A} = & EUR\,10M \times \frac{100}{100} \times \frac{8.316-6.172}{8.316-4.579} = EUR\,5.74M \\ N_{10A} = & EUR\,10M \times \frac{100}{100} \times \frac{6.172-4.579}{8.316-4.579} = EUR\,4.26M \end{cases}$$

Enfin, le taux de rendement actuariel « approché » du barbell est[13] :

$$R^{mod*}_{7A} = \frac{4.579}{6.172} \times \frac{8.316 - 6.172}{8.316 - 4.579} \times 3\% + \frac{8.316}{6.172} \times \frac{6.172 - 4.579}{8.316 - 4.579} \times 3.5\% = 3.287\%$$

Ce calcul montre que nos données de marchés fictives ne pricent pas le biais de convexité puisque le taux de rendement actuariel « approché » du barbell (3.287%) est supérieur à celui du bullet (3.25%).

4.3.2 Barbells de Type « Twist-neutral »

Ce type de barbell est principalement utilisé dans un contexte de trading et/ou d'arbitrage pour compte propre. Les positions étant auto-financées (repo), la contrainte de conservation de la market value n'est pas nécessaire. On utilisera un butterfly couvert en Shift et en Twist qui permet (par construction) un ajustement plus fin au niveau des risques.

Les deux contraintes de couverture sur ce type de barbell sont des contraintes de risques consistant à couvrir le butterfly sur les deux premiers facteurs de déformation de la courbe des taux actuariels :

- Risque de Shift Actuariel (1er facteur)

12. Les données sont celles de l'exemple numérique du paragraphe 4.1.1

13. L'erreur d'approximation est très inférieure à 1bp puisque le taux actuariel exact du bullet est 3.289%

– Risque de Twist Actuariel (2nd facteur)

La première contrainte de couverture (1er facteur) a déjà été donnée précédemment (« shift-neutral »).

La seconde contrainte de couverture (2nd facteur) peut être formulée dans le cas général en considérant que lors d'un mouvement de pentification, à une variation de -1 de la partie « courte » de la courbe des taux (MT/CT) doit correspondre une variation de β de la partie « longue » de la courbe des taux (LT/MT).

On est alors en mesure de définir les scénarios théoriques de Shift, Twist et Butterfly dans la courbe des taux actuariels constituée par R_{CT}, R_{LT} et R_{MT} [14].

$$Shift = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Twist = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \qquad Butterfly = \begin{bmatrix} \frac{-\beta}{1+\beta} \\ 1 \\ \frac{-1}{1+\beta} \end{bmatrix}$$

Le graphique 4.3 permet de visualiser la forme des facteurs de déformation de la courbe des taux actuariels dans le cas où β est égal à 0.5.

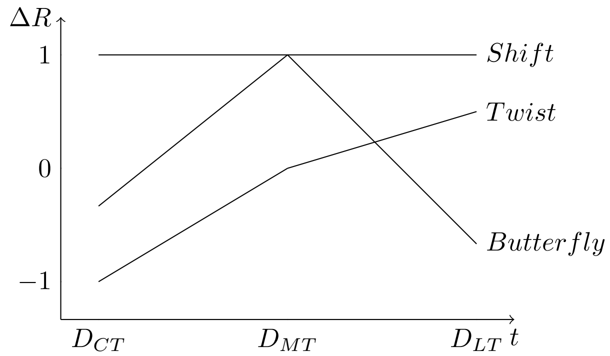

FIG. 4.3 – *Facteurs de Déformation de la Courbe des Taux ($\beta = 0.5$)*

Dans ce cadre, la seconde contrainte de couverture s'écrit :

$$-N_{CT} \times S_{CT} + \beta \times N_{LT} \times S_{LT} = 0 \qquad (\text{"}twist - neutral\text{"})$$

Comme précédemment, la résolution du système linéaire de deux équations à deux inconnues que constituent les contraintes de couvertures « shift-neutral » et « twist-neutral » permet de trouver les montants nominaux N_{CT} et N_{LT} des titres CT et LT pour un montant nominal N_{MT} du titre MT donné :

$$N_{CT} = N_{MT} \times \frac{\beta}{1+\beta} \times \frac{S_{MT}}{S_{CT}} \qquad et \qquad N_{LT} = N_{MT} \times \frac{1}{1+\beta} \times \frac{S_{MT}}{S_{LT}}$$

De même, on trouve facilement en procédant comme nous l'avons fait pour les barbells de type « cash-neutral » que le taux actuariel R^*_{MT} s'écrit :

$$R^*_{MT} = \frac{\beta}{1+\beta} \times R_{CT} + \frac{1}{1+\beta} \times R_{LT}$$

En pratique, deux approches sont couramment utilisées pour estimer β :

– La méthode « ad hoc »

14. Le facteur Butterfly est obtenu en imposant qu'il soit orthogonal aux facteurs Shift et Twist

– La méthode econométrique

La méthode « ad hoc » consiste à utiliser des valeurs spécifiques et remarquables du paramètre β dont les plus souvent citées et/ou utilisées sont :

– $\beta = 1$ (barbell « équi-pondéré »)
– $\beta = \frac{D_{MT}-D_{CT}}{D_{LT}-D_{MT}}$ (barbell « pondéré par les durations »)

Notons que le barbell « pondéré par les durations » a une variante consistant à remplacer les durations par les maturités[15].

La méthode économétrique consiste à estimer le paramètre β sur la base de données historiques des taux actuariels R_{CT}, R_{LT} et R_{MT}. En toute généralité, on peut décomposer le vecteur ΔR^{obs} des variations (observées) des taux actuariels R_{CT}, R_{LT} et R_{MT} sous la forme suivante :

$$\triangle R^{obs} = \underbrace{\triangle R^{th}}_{\in E^{\perp}_{Butterfly}} + \underbrace{\epsilon}_{\in D_{Butterfly}}$$

avec les notations suivantes :

– $E^{\perp}_{Butterfly}$ est le sous-espace vectoriel orthogonal au vecteur Butterfly
– $D_{Butterfly}$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur Butterfly

Par construction, $\triangle R^{obs}$ vérifie l'équation suivante :

$$\langle \triangle R^{obs} | Butterfly \rangle = \underbrace{\langle \triangle R^{th} | Butterfly \rangle}_{0} + \underbrace{\langle \epsilon | Butterfly \rangle}_{\epsilon \times \|Butterfly\|^2}$$

En développant cette équation et en réarrangeant les termes de façon à faire apparaître les spreads de taux MT/CT et LT/MT, on trouve :

$$\triangle \left(R_{MT} - R_{CT}\right)^{obs} = \beta \times \triangle \left(R_{LT} - R_{MT}\right)^{obs} + \epsilon$$

En raisonnant non plus sur les variations de taux mais sur les niveaux de taux absolus, on peut reformuler cette dernière équation sous la forme du modèle économétrique linéaire suivant[16]:

$$\left(R_{MT} - R_{CT}\right)^{obs} = \beta \times \left(R_{LT} - R_{MT}\right)^{obs} + \gamma + \epsilon$$

Le paramètre β peut donc être estimé par régression du modèle linéaire précédent sur les données historiques dont on dispose. Dans ce cas, la valeur de β utilisée pour construire le barbell est l'estimateur des MCO $\hat{\beta}$ de β. Une application numérique de cette approche à la courbe des taux Etat Française sur les maturités 2A, 10A et 30A est donnée par X. Baraton[17].

15. Cf. Leroy F. (1996), « Analyse Comparative Risques spécifiques BIP vs Risques Statistiques - Etude par Type de Stratégie », Note Interne du Département des Risques, Banque Internationale de Placement
16. Dans ce cadre, β et γ sont les paramètres (à estimer) du modèle tandis que ε est un terme d'erreur dont on suppose qu'il est gaussien de moyenne nulle
17. Baraton X. (1998), « OAT FRF 2/10-Year vs 10/30-Year Slop Arbitrage : Econometric Modeling ans return to the mean », Fixed Income Research, Forex & Debt Market Division, CA Indosuez

4.3.3 Les Stratégies de Butterfly en Pratique

Sur le fond[18], les approches zéro-coupon et actuarielles relèvent de la même logique consistant à identifier des titres sur- ou sous-évalués (en cash ou en repo) et à monter des positions dans le marché (« relative value trading » ou « repo trades ») permettant de profiter de ces mis-pricing (retour du spread sur sa valeur d'équilibre ou portage de la prime repo). Sur la forme, l'approche actuarielle se distingue de l'approche zéro-coupon principalement par la nature de la couverture qui n'est plus locale (au niveau des cashflows) mais globale (on cherche à reproduire certaines propriétés de l'obligation qui diffèrent selon le type de barbell choisi). Cette remarque vaut pour les barbells « cash-neutral » (couverture 1er facteur uniquement) comme pour les barbells « twist-neutral » (couverture 1er et 2nd facteur) car même pour ces derniers, il reste un facteur actuariel non couvert.

Le spread actuariel est-il un bon indicateur de mis-pricing?

Cette différence de structure entre une couverture zéro-coupon et une couverture actuarielle n'est pas sans conséquence en terme de risques et de trading. Contrairement au spread zéro-coupon qui reflète uniquement le mis-pricing de l'obligation dans la courbe des taux zéro-coupon, le spread actuariel intègre quatre composantes distinctes :

1. La pure composante de mis-pricing
2. La dynamique du ou des facteurs résiduels (Butterfly en particulier)
3. Le biais de convexité qui dépend de la volatilité anticipée du 1er facteur (Shift)
4. La prime repo anticipée

De façon pseudo-formelle, on peut donc écrire[19] :

$$\boxed{Spread_{ACT} \simeq Mispricing + Spread_{Butterfly} + Convexity\ Bias + Prime_{repo}}$$

Contrairement au spread zéro-coupon, **une divergence du spread actuariel par rapport à sa valeur d'équilibre n'est donc pas nécessairement une indication de mis-pricing**. Cette différence de structure explique que les quelques résultats empiriques publiés sur ce sujet[20] montrent que les spreads actuariels ont des dynamiques non conformes avec un processus avec « retour à la moyenne » de type Ornstein–Uhlenbeck. Cette remarque rend les stratégies de type « relative value trading » classiques difficilement applicables en pratique avec une structure de type butterfly.

Par contre, elle ne condamne pas les stratégies de butterfly mais modifie les critères de décision (E/S) ainsi que les objectifs visés.

Quelles sont les stratégies possibles en pratique?

La dynamique du spread actuariel n'ayant plus les bonnes propriétés recherchées en « relative value trading », on va plutôt chercher à **monter des stratégies à portage positif pour lesquels le down-side risque sur le spread actuariel est jugé négligeable et/ou gérable**.

18. L'exercice 4 permettra d'illustrer la discussion formelle qui suit via le traitement numérique complet d'une position de butterfly de type « shift/twist-neutral »

19. Notons qu'il possible d'estimer la composante du spread actuariel due au seul facteur Butterfly en « priçant » les trois autres composantes de la façon suivante :
- Le mis-pricing zéro-coupon par le spread « zéro-coupon » (cf. Chapitre 3)
- La prime repo par le spread d'asset-swap (cf. Chapitre 5)
- Le biais de convexité en utilisant la formule donnée au paragraphe 4.2.3

Dans ce dernier cas, on utilisera la volatilité implicite sur les options sur contrats Futures LT (cf. Chapitre 7) comme proxy pour la volatilité du premier facteur de déformation de la courbe des taux actuariels.

20. Cf. Valtonen E. (1998), Barbells - A Nordic perspective, Research Paper Handelsbanken

Ce type d'opportunité est en général plus rare mais peut néanmoins se produire, sur des marchés :

- Matures après un choc économique, monétaire ou budgétaire impliquant une déformation atypique de la courbe des taux
- Emergeants sur lesquels des anomalies dans la forme de la courbe des taux sont plus fréquentes du fait qu'ils sont généralement moins biens arbitrés que les marchés matures

De façon évidente, les deux situations pour lesquelles il est envisageable de monter ce type de stratégies sont celles où le spread actuariel est « exagérément » élevé (resp. « exagérément » faible) de sorte qu'il est possible de monter une position long butterfly (resp. short butterfly) à portage obligataire positif avec un down-side risque sur spread actuariel minimal.

Dans ce type de stratégie, on ne joue pas l'évolution « probable » du spread actuariel vers un niveau jugé plus « normal » mais on s'assure via une double analyse historique et prospective que le risque de divergence du spread actuariel est au moins « cappé ».

Quels sont les risques sur ce type de position et comment les gérer ?

Trois types de risque sont à prendre en compte :

- Repo
- Convexité
- Spread

Il faut en premier lieu prendre en compte la problématique « repo » lié au refinancement de la partie short du butterfly.

Le portage d'une position de butterfly ne pourra être « locké » que sur la durée des repos qui en général ne sont négociables que sur de courtes périodes. Cette situation nécessite de rouler les repos de la position de butterfly lorsqu'ils arrivent à échéance. **On a donc un risque de refinancement sur le repo de la position short du butterfly**. Par ailleurs, certains titres qui traitent régulièrement « special » peuvent donc apparaîtres « cher » sur le spread actuariel et au prix sur le repo (à « court terme ») sans que celà ne traduise une réelle opportunité d'arbitrage car la cherté sur le spread actuariel reflète la cherté moyenne anticipée sur le repo (à « long terme »).

Une position long butterfly est en général convexe-positive, nous l'avons montré au paragraphe 4.2.3.

Le risque résultant n'est pas symétrique mais dépend du sens du butterfly :

- <u>Long Butterfly :</u> Un choc inattendu et de forte amplitude (de l'ordre du %) sur le niveau général des taux (shift) aura un impact positif et « potentiellement illimité » en terme de P/L tandis qu'une variation plus faible qu'attendue (de l'ordre du bp) aura un impact (positif) négligeable sur le P/L. Dans les deux cas, on paye la prime de convexité.
- <u>Short Butterfly :</u> Un choc inattendu et de forte amplitude (de l'ordre du %) sur le niveau général des taux (shift) aura un impact négatif et « potentiellement illimité » en terme de P/L tandis qu'une variation plus faible qu'attendue (de l'ordre du bp) aura un impact (négatif) négligeable sur le P/L. Dans les deux cas, on reçoit la prime de convexité.

On retrouve ici le caractère « optionnel » des positions de taux gamma-positive (« long straddle ») ou gamma-negative (« short straddle ») que l'on retrouvera à plusieurs reprises dans la suite de ce cours.

Enfin, le dernier risque à prendre en compte est lié au « down-side » sur le spread de taux entre le barbell et le bullet. Les deux façons de gérer ce risque consistent soit à mettre un stop-loss (on inverse la position lorsque le niveau de stop-loss est atteint) soit à moyenner de façon à améliorer à la fois le portage et le point mort de la position.

Chapitre 5

Swap de Taux et Asset-Swap Gov/Corp

On commence par une présentation générale des swaps de taux fixe contre variable (Euribor) en insistant sur les spécificités de ses instruments à savoir, les structures de cashflows (hors bilan) et le mode de cotation (OTC). Les taux zéro-coupon swap s'obtiennent directement à partir des taux au pair cotés et permettent le pricing de structures « hors marchés » et la valorisation de positions en cours de vie. On présente les deux approches équivalentes de valorisation/pricing d'un swap de taux. La méthode par projection des taux forwards nous permettra de donner une interprétation d'un taux de swap (LT) en terme d'anticipations sur les taux Euribor (CT). La méthode par décomposition du swap en éléments simples (synthétique) nous permettra d'introduire les Floating Rate Notes (FRN). On s'intéressera ensuite au concept d'asset-swap (swap vs obligation) en présentant deux structures possibles, les asset-swaps structurés (mêmes structures de cashflows) et non structurés (mêmes sensibilités). On terminera par le pricing de la marge d'un asset-swap structuré au-dessus du taux Euribor et l'analyse (économique et financière) de cette marge d'asset swap (appelé aussi spread d'asset swap) pour une obligation d'Etat ou corporate.

5.1 Swap de Taux : Généralités

Dans cette section nous allons définir les swaps de taux sur le plan contractuel (principe et structure), expliquer les avantages théoriques et pratiques qu'ils apportent aux acteurs financiers (intérêt et utilisation) et décrire la façon dont ils sont cotés sur le marché (négociation et cotation).

5.1.1 Généralités sur les Swap

On considère généralement que le premier swap de taux au sens moderne du terme a été négocié en 1981 entre IBM et la Banque Mondiale par l'entremise de la banque d'affaire Salomon Brothers. Il s'agissait d'un « swap de devises » (cross-currency swap) c'est-à-dire d'un swap de taux dont les deux branches sont libellées dans des devises différentes. Le marché des swaps s'est ensuite considérablement développé au cours des deux décennies qui ont suivi ce premier contrat que ce soit en terme de volume traité (second marché juste derrière le marché des dettes d'Etat) que de structures de swaps répondants à des besoins spécifiques (notamment au sein même du marché interbancaire).

Ce chapitre est principalement dédié à l'études des swaps de taux et des asset-swaps. Une liste (non-exhaustive) de structures de swaps est donnée à titre indicatif dans le tableau 5.1 afin d'illustrer le caractère versatile du concept. Nous renvoyons le lecteur aux livres de Chazot & Claude (1999)[1] et Marteau & Dehache (2001)[2] pour l'étude détaillée des différentes structures de swap non traitées dans ce chapitre.

Type de Swap	Description
Swap de Taux	Un Swap de Taux standard ou « plain vanilla », est un swap (mono-devise) où les contractants échangent un flux d'intérêt à taux fixe contre un flux d'intérêt à taux variable
Swap de Base	Un Swap de Base est une variante du swap de taux standard, où les flux d'intérêts sont à taux variables mais portent sur des indices de taux différents
Swap de Devises	Les Swap de Devises (Cross Currency Swap) sont des swap de taux dont les flux sont libéllés dans deux devises différentes. A noter que les flux en capital sont échangés dans ce type de structure
Swap à Départ Différé	Un Swap à Départ Différé ou swap forward est un swap de taux dont la date de valeur (départ) se situe à une date future ($>$ J+2)
Swap Amortissable	Un Swap Amortissable est un swap dont le nominal est amortit progressivement au cours du temps. Il est principalement utilisé pour couvrir un actif dont le nominal est amortit de la même façon
Swap Zéro-Coupon	Un Swap Zéro-Coupon est un swap standard « fixe vs variable » dont on a regroupé les cashflows sur la branche fixe en un seul paiement (payé « in fine » ou « upfront »)
Asset-Swap	Un Asset-Swap est une structure synthétique constitué d'une obligation et d'un swap « hors marché » permettant de transformer l'obligation à taux fixe en une obligation à taux variable
Constant Maturity Swap (CMS)	Le Constant Maturity Swap est un swap de taux d'intérêts dans lequel le taux variable est indexé sur un taux à long terme (ex : taux du swap 3Y ou indice TEC10)
Total Return Swap	Un Total Return Swap permet d'échanger le flux en intérêt ainsi que les variations de mark-to-market d'une obligation de référence contre une indexation à taux variable (Euribor) augmentée d'une marge

TAB. 5.1 – Typologie (Non Exhaustive) des Structures de Swap

Deux facteurs principaux ont contribué au développement du marché des swaps :

– Les swaps sont par nature des instruments « hors bilan » dont le risque de crédit

1. Chazot C. & Claude P. (1999), « Les Swaps : Concepts et Applications », Economica (Collection Gestion)
2. Marteau D. et Dehache D. (2001), Les Produits Dérivés de Crédit, Editions ESKA

ne porte que sur le différentiel de valorisation entre les deux branches à une date donnée (valeur latente d'une transaction de swap en cours de vie). Ainsi un swap négocié entre deux banques de première catégorie (marché OTC interbancaire) peut être considéré comme exempt de risque de crédit en première approximation. Par ailleurs, des procédures de réduction du risque de crédit (accords de netting, appels de marges en cash ou en actifs, clauses d'annulation anticipée) permettent de réduire encore ce risque notamment pour les swaps à long terme [3]

– L'International Swaps and Derivatives Association (ISDA) est une structure professionnelle regroupant les différents intervenants du marché des swaps (initialement) et des autres marchés de produits dérivés OTC. L'ISDA a standardisé les contrats de swap à travers la création de contrats types (ISDA Master Agreement) reconnus et utilisés par tout les intervenants du marché. Cette standardisation des contrats de swap a permis d'accroitre la transparence et la liquidité du marché tout en réduisant le risque juridique

Avec un impact limité en terme de risque de crédit (pas d'échange de flux en capital) et de risque juridique (standardisation), les swaps sont devenus des instruments dérivés OTC les plus couramment utilisés notamment au sein du marché interbancaire.

5.1.2 Swap de Taux : Principe et Structure

Un swap de taux est un contrat d'échange de flux d'intérêts (fixe contre variable) entre deux contreparties A et B. Ces flux (appelés « branches » ou « jambes » du swap) sont calculés sur la base de positions obligataires sous-jacentes (fictives) en tous points identiques à l'exception du mode d'indexation :

1. Type de taux (fixe vs variable)
2. Périodicité des coupons [4]

Supposons que deux contreparties A et B s'engagent dans un contrat de swap de taux (fixe vs variable) pour :

– Une maturité T
– Un montant nominal N
– Un taux de swap C (sur la branche fixe)

Regardons les flux provenant des branches fixe et variable du point de vue de la contrepartie A [5].

Sur la branche fixe du swap, la contrepartie A va recevoir aux dates t_i (i=1...K) un montant d'intérêt Ff_i calculé à partir du taux fixe C :

$$Ff_i = N \times C \times f_{Fixe} \qquad avec \qquad Base_{Fixe} = \frac{30}{360}$$

3. Les problématiques de gestion du risque de crédit sur les swaps (et sur les produits dérivés OTC plus généralement) sortent du cadre de ce cours. Néanmoins, la crise des subprimes (2007-2009) puis celle des dettes d'Etat au sein de la zone Euro (2010-2012) montrent à quel point ces problématiques que l'on peut considérer comme secondaires en temps normal ne le sont plus lorsque la liquidité et la solvabilité du système bancaire est structurellement dégradée. La faillite de la banque Dexia en 2011 est à ce titre assez révélatrice. La conjonction de deux évènements a priori improbables (baisse des taux de swap en pleine crise de liquidité bancaire et dégradation, par les agences de notation, de plusieurs Etats au sein de la zone Euro) ont eu raison de cette banque. Déjà touchée par un énorme portefeuille de swaps de taux en mark-to-market négatif (du fait de la baisse des taux swaps), l'agence Moody's a définitivement condamné la banque Dexia en anonçant la mise sous revue (avec implication négative) de sa notation en Septembre 2011 (cf. interview de Pierre Mariani au quotidien lesoir.be du 20 Octobre 2011).

4. En général, cette périodicité est de 1A sur la branche fixe et de 3M à 6M sur la branche variable

5. Les flux sont identiques pour la contrepartie B mais de signes contraires

Le graphique 5.1 permet de visualiser le flux d'intérêt correspondant à la branche fixe du swap du point de vue de la contrepartie A.

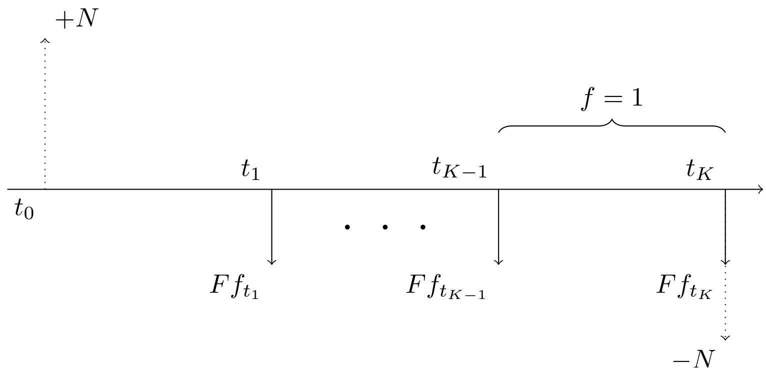

FIG. 5.1 – *Cashflows sur la Branche Fixe (1A) du Swap*

Sur la <u>branche variable du swap</u>, la contrepartie A va payer aux dates $t_j^{'}$ (j=1...M) un montant d'intérêt Fv_j indexé sur un taux variable Z_j (indice Euribor 6M) :

$$\widetilde{Fv}_i = N \times \tilde{Z}_j \times f_{Variable} \qquad avec \qquad Base_{Variable} = \frac{Exact}{360}$$

Le graphique 5.2 permet de visualiser le flux d'intérêt correspondant à la branche variable du swap du point de vue de la contrepartie A. Seul le premier cashflow Fv_1 est connu en date d'initialisation du swap, les autres cashflows Fv_j (j=2...M) ne seront connus qu'en date de fixing des taux Euribor correspondants.

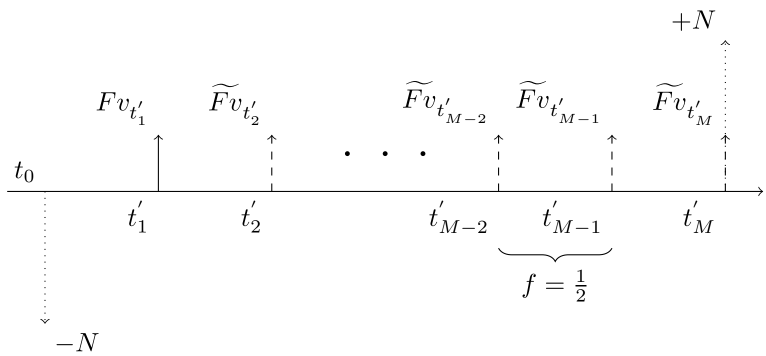

FIG. 5.2 – *Cashflows sur la Branche Variable (6M) du Swap*

La légende des graphiques 5.1 et 5.2 est la suivante :

——————→	Flux certains connus à l'initiation du swap (branches fixe et variable)
- - - - - - -→	Flux incertains dont le montant exact sera connu en début de période de coupon (branche variable)
··············→	Flux en capital non échangés dans le cadre d'un contrat de swap mais représentés à titre indicatif

Le montant nominal N qui sert au calcul des flux d'intérêts est le même sur chaque branche (mais n'est pas échangé) et les dates de départ et de fin sont les mêmes sur la branche fixe et la branche variable :

$$t_0 = t_0^{'} = 0 \qquad et \qquad t_K = t_M^{'} = T$$

Un swap est un instrument financier « hors bilan » car seuls les flux d'intérêt sont échangés et non les flux en capital. De surcroît, la valeur de marché d'une transaction de swap à l'initiation du swap est nulle (les branches fixe et variables se compensant parfaitement en terme de valorisation) :

$$\boxed{V_{Swap} \equiv 0 \qquad (\grave{a}\ l'initiation\ de\ la\ transaction)}$$

Par conséquent, une transaction de swap (standard) ne donne lieu à aucun paiement en date de valeur du swap (J+2) de la contrepartie « acheteuse » vers la contrepartie « vendeuse ».

Par convention, la branche fixe du swap sert de référence sur le marché des swaps et il est d'usage de dire que[6] :

- La contrepartie B « paye le fixe »
- La contrepartie A « reçoit le fixe »

Dans la suite de ce chapitre, nous allons uniquement nous intéresser aux swaps de taux fixe contre variable « plain vanilla ».

5.1.3 Swap de Taux : Intérêt et Utilisation

Sur un plan théorique, l'intérêt des swaps peut s'analyser dans le cadre de la théorie des avantages comparatifs de David Ricardo[7].

Considérons deux entreprises X et Y dont les conditions d'emprunts auprès de leurs banques respectives sont données dans le tableau 5.2 ci-dessous :

	Entreprise X	Entreprise Y
Notation	AAA	BBB
Taux Fixe	10%	11.2%
Taux Variable	Xibor + 20bp	Xibor + 75bp

TAB. 5.2 – Conditions d'Emprunts des Entreprises X et Y

Si l'entreprise X possède un avantage absolu par rapport à l'entreprise Y en terme de conditions d'emprunt à taux fixe et à taux variable (lié à sa meilleure notation), on constate néanmoins que :

- L'entreprise Y a un avantage relatif à emprunter à taux variable (+55bp) plutôt qu'à taux fixe (+120bp) par rapport aux conditions dont bénéficie l'entreprise X
- L'entreprise X a un avantage relatif à emprunter à taux fixe (-120bp) plutôt qu'à taux variable (-55bp) par rapport aux conditions dont bénéficie l'entreprise Y

6. On dit aussi que la contrepartie B « paye le swap », « est emprunteur du swap » ou « est vendeur du swap » et symétriquement que la contrepartie A « reçoit le swap », « est prêteur du swap » ou « est acheteur du swap »

7. David Ricardo (1772-1823) est un économiste anglais du XIX^e siècle considéré comme l'un des principaux représentants de l'école « classique »

Si l'entreprise X souhaite emprunter à taux variable tandis que l'entreprise Y souhaite emprunter à taux fixe, il est possible d'obtenir des conditions de taux améliorées pour les deux entreprises avec l'accord suivant :

- X emprunte à taux fixe et « swappe » (reçoit le fixe 10.1% contre Euribor)
- Y emprunte à taux variable et « swappe » (paye le fixe 10.2% contre Euribor)

Le contrat de swap entre les entreprises X et Y est intermédié par un courtier (broker) qui prend dans notre exemple 10bp de marge d'intermédiation (voir le graphique 5.3 ci-dessous).

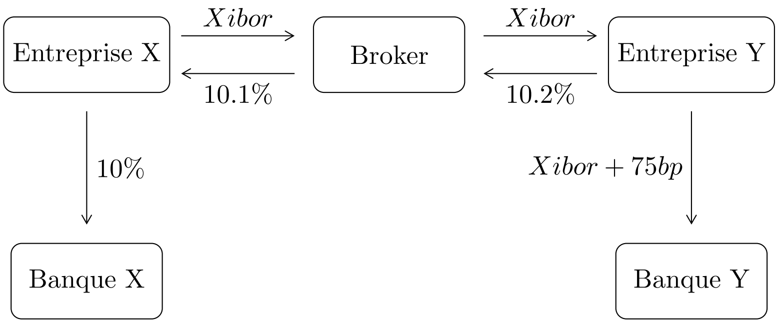

FIG. 5.3 – *Relations entre les Différents Intervenants*

Conformément à la théorie de Ricardo les deux entreprises ont donc intérêt à se « spécialiser » sur leurs avantages relatifs et à les échanger (swap) pour améliorer globalement leurs conditions d'emprunt là où elles ont un désavantage relatif. En s'échangeant ainsi leurs avantages comparatifs, les deux sociétés réalisent un gain (30bp pour X et 25bp pour Y) par rapport à leurs propres conditions d'emprunt.

Sur un plan pratique, les swaps permettent aux acteurs financiers (Etats, banques, assurances, sociétés de gestion, entreprises, etc.) de modifier le profil de risque (taux, crédit, change, etc.) de leur bilan sans rien changer au bilan lui-même. En d'autres termes, l'intérêt principal des swaps sur le plan pratique est de séparer la gestion des risques de la gestion de la liquidité (financement/investissement).

Swaps => Gestion séparée Risques / Liquidité

Les avantages que les acteurs financiers tirent de l'utilisation des swaps sont doubles :

1. Flexibilité : Ajuster le profil de risque d'un bilan via des swaps est plus simple, plus rapide et moins couteux que la solution classique consistant « restructurer » le bilan lui-même par la vente d'actifs (potentiellement illiquides) ou la modification du passif (fonds propres/dettes) qui nécessite l'accord des actionnaires et/ou créanciers
2. Opportunités : Le marché des swaps ouvre des perspectives en terme de profils de risque possibles (actifs/passifs) qui ne sont pas envisageables par l'approche classique pour des raisons principalement réglementaires (quelles soient externes ou internes)

Afin d'illustrer ces considérations générales, donnons trois exemples classiques de l'utilisation des swaps de taux :

- Une banque, qui prévoit d'emprunter à échéance pour respecter ses contraintes réglementaires en matière de liquidité (coefficient de liquidité), peut avoir intérêt à fixer dès aujourd'hui son taux d'emprunt via un swap « fixe vs variable » si elle anticipe une hausse des taux. Elle va donc monter une position de swap « payeur taux fixe vs receveur taux variable » dont la particularité est d'être à départ différé. Ce swap pourra être débouclé le jour où l'emprunt sera effectivement réalisé dans le marché

(interbancaire). Le pricing des swaps à départs différés ou swaps forwards est étudié au paragraphe 5.2.2.
- Une entreprise qui, pour des raisons de taille et/ou de rating, ne peut pas se financer à long terme à taux fixe peut transformer les emprunts successifs (roll-over) à court terme réalisés au prés du système bancaire en taux fixe à long terme via un swap de taux « fixe contre variable » (elle paye le fixe et reçoit le variable). Cette opération peut lui permettre d'accroître sa visibilité financière vis-à-vis des actionnaires (hausse de son cours de bourse). Notons cependant que si le profil de risque au passif a été modifié par le swap, le risque de liquidité lui reste inchangé (roll-over d'emprunts)
- Une société de gestion peut accroître le rendement d'un fond « court terme » en se portant acquéreur d'un « asset-swap » sur une signature corporate qui lui rapporte Euribor plus une marge. Cette opération lui permet de bénéficier d'une rémunération à taux variable plus élevée que les placements à court terme classiques (en particulier l'interbancaire qui rémunère à Euribor) liée au risque de signature (émetteur corporate) et à la maturité de l'obligation sous-jacente à l'asset-swap (long terme). Ce type de structure combinée « obligation + swap », appelée « asset swap », sera étudiée à la section 5.3

Dans les trois cas, ce sont bien des contraintes réglementaires qui motivent les agents économiques considérés à utiliser le marché des swaps [8]. Une fois encore, le lecteur pourra consulter l'ouvrage de référence de Chazot & Claude (1999) pour une présentation détaillée d'exemples concrets d'utilisation des swaps de taux.

5.1.4 Swap de Taux : Négociation et Cotation

Le marché des swaps est un marché de gré-à-gré (OTC) principalement inter-bancaire dans lequel les courtiers swap [9] centralisent les intérêts « emprunteur » et « prêteur » des intervenants tandis que plusieurs grandes banques internationales assurent la « liquidité » du marché via leurs desks de market making swap.

Les market-makers cotent les swaps de taux (fixe contre variable) « au pair » avec indéxation Euribor tous les jours sur les principales maturités standards du 2A au 15A.

Le taux C du swap (branche fixe) sert de variable de cotation

Les market-makers cotent un taux prêteur (P) et un taux emprunteur (E) pour chaque maturité. Les taux prêteurs sont supérieurs au taux emprunteurs, la différence tient compte :

- Du coût de couverture (« prix de revient »)
- Des coûts de structures (imputables à l'activité de market-making swaps)
- De la marge nette de l'activité de market-making

Dans ce chapitre et sauf mention contraire on utilisera des taux « milieu de fourchette » (Mid) dans les formules ainsi que dans les exemples numériques.

Pour un market-maker donné, l'ensemble des fourchettes [taux prêteur - taux emprunteur] sur les maturités allant du 1A au 15A constitue la courbe des taux swap « au pair » (Cf. tableau 5.3 ci-dessous dans lequel nous avons ajouté les taux « milieu de fourchette »).

8. La logique consistant à échapper à ses contraintes réglementaires voir même à tromper ses autorités de tutelles en utilisant le marché des swaps a atteint son paroxisme avec le swap de devise monté en 2001 par la banque Goldman Sachs pour l'Etat Grec. L'« astuce » utilisée par Goldman Sachs pour permettre à la Grèce de présenter un ratio dette sur PIB « conforme » aux critères de Maastricht a consisté à déguiser de la dette en un cross-currency swap (YEN/USD) dont le taux de change contractuel (YEN/USD) était sciemment abérant (hors marché). Il s'agit là d'un exemple « extrême » qui ne mérite probablement pas mieux qu'une note de bas de page mais qui illustre néanmoins le caractère « versatile » des swaps, notamment pour les régulateurs

9. Ex : Cantor Fitzgerald ou ICAP

Maturité	2A	3A	...	5A	...	15A
Taux Prêteur	$C_{P,2A}$	$C_{P,3A}$	...	$C_{P,5A}$	...	$C_{P,15A}$
Taux Emprunteur	$C_{E,2A}$	$C_{E,3A}$	...	$C_{E,5A}$	...	$C_{E,15A}$
Taux Mid-Market	$C_{Mid,2A}$	$C_{Mid,3A}$	...	$C_{Mid,5A}$	...	$C_{Mid,15A}$

TAB. 5.3 – Courbes de Taux Swap « Au Pair »

Les taux « milieu de fourchette » sont, sans surprise, calculés de la façon suivante :

$$C_{Mid,k} = \frac{C_{P,k} + C_{E,k}}{2} \qquad avec \qquad C_{P,k} > C_{E,k} \qquad (k = 1A \dots 15A)$$

Comme les taux de swap cotés sont des taux « au pair » (les branches fixes sont assimilables à des obligations « au pair »), il est donc possible de calculer les taux zéro-coupon swap à partir des taux de swap « au pair » en utilisant la méthode directe décrite au Chapitre 3.

En raisonnant sur les taux « milieu de fourchette », on obtient la courbe des taux zéro-coupon cherchée représentée par le tableau 5.4 ci-dessous.

Maturité	2A	3A	...	5A	...	15A
Taux ZC	$Z_{Mid,2A}$	$Z_{Mid,3A}$	...	$Z_{Mid,5A}$	...	$Z_{Mid,15A}$

TAB. 5.4 – Courbe des Taux Swap « Zéro-Coupon »

Cette courbe des taux zéro-coupon swap sera complétée sur sa partie CT par les taux de FRA (avec indexation Euribor) sur les maturités (3M-2A) et par les taux Euribor sur les maturités plus courtes (1S - 3M) ou encore par les taux des swaps OIS (à court terme).

Pour rappel, si Z_k est le taux zéro-coupon swap pour la maturité k exprimé en convention actuarielle, le facteur d'actualisation correspondant ρ_k s'écrit :

$$\rho_k = \frac{1}{(1 + Z_k)^{f_k}}$$

f_k est la fraction d'année correspondant à la maturité k.

Il est important de noter que si les taux zéro-coupon obligataires sont les taux des obligations (fictives) zéro-coupon correspondantes, les taux zéro-coupon swaps ne sont en aucun cas les taux des swap (fictifs) zéro-coupon correspondants.

Taux Zéro-Coupon Swap $\neq$ Taux du Swap Zéro-Coupon (correspondant)

Les courbes de taux zéro-coupon swap sont utilisées pour valoriser un swap en cours de vie (latent) et pricer un swap sur une maturité non cotée ou un swap « hors marché » comme nous allons le voir dans les sections 5.2 et 5.3 qui suivent.

A titre d'exemple, calculons la courbe des taux zéro-coupon swap à partir des taux de swap cotés du 1A au 5A (cf. Tableau 5.5).

Maturité	1A	2A	3A	4A	5A
Taux « Mid »	2.50	2.75	2.98	3.19	3.38

TAB. 5.5 – Exemple - Courbe des Taux Swap « Au Pair »

On complète ces données par le taux Euribor 6M à 2.25% (taux monétaire).

Le tableau 5.6 ci-dessous donne les taux zéro-coupon swap du 6M au 5A ainsi que les facteurs d'actualisation correspondants.

Maturité	Taux ZC	Facteur d'Actualisation
0.5A	2.250	0.98888
1.0A	2.500	0.97561
1.5A	2.627	0.96185
2.0A	2.753	0.94712
2.5A	2.871	0.93167
3.0A	2.989	0.91542
3.5A	3.099	0.89870
4.0A	3.208	0.88135
4.5A	3.308	0.86376
5A	3.409	0.84570

TAB. 5.6 – Exemple - Courbe des Taux Swap Zéro-Coupon

Méthodologie de calcul :

- Les taux zéro-coupon de maturités entières (x.0A) sont calculés à partir de taux « au pair » en utilisant la méthode directe
- Les taux zéro-coupon de maturités non entières (x.5A) sont calculés par interpolation linéaire

5.2 Swap de Taux : Valorisation et Pricing

Comme pour tous les intruments étudiés jusqu'à présent, « valoriser un swap » consiste essentiellement à calculer la valeur latente d'une position de swap de taux en cours de vie (swap négocié initialement à un taux C). De même, « pricer un swap » est en quelque sorte le problème inverse consistant trouver le taux de swap C (branche fixe) pour lequel la valorisation du swap est nulle.

5.2.1 Valorisation d'un Swap de Taux

La méthode consiste à valoriser séparemment la branche fixe et la branche variable du swap.

Seule la branche variable pose problème, deux méthodes (équivalentes) seront présentées à cet égard :

- Valorisation par projection des taux forwards
- Valorisation par arbitrage (AOA)

5.2.1.1 Méthode Générale de Valorisation

Une position de swap de taux standard (receveur) peut être analysée comme deux positions obligataires émises « au pair » le jour de négociation :

- Long obligation à taux fixe (le taux du swap C)
- Short obligation à taux variable dont la maturité du taux de référence (ex : 3M) est égale à la périodicité des fixings (ex : 3M)

En conséquence, la valeur du swap (du point de vue du prêteur) à une date quelconque t ($t_i^{'}$ < t < $t_{i+1}^{'}$), est égale à la différence entre la valeur de l'obligation à taux fixe et la valeur de l'obligation à taux variable :

$$\boxed{V_{Swap} = V_{Fixe} - V_{Variable}}$$

La valeur de l'obligation à taux fixe est obtenue par un pricing zéro-coupon, c'est-à-dire par la somme des cashflows certains actualisés dans la courbe des taux zéro-coupon swap :

$$V_{Fixe} = C \times \sum_{k=h+1}^{K} \rho_{t,t_k} + 100 \times \rho_{t,t_K}$$

h est la date de début de période du prochain coupon sur la branche fixe du swap.

Par contre, la valorisation de l'obligation à taux variable pose problème du fait de l'incertitude sur les cashflows futurs.

On peut néanmoins écrire en toute généralité[10] :

$$V_{Variable} = \sum_{j=i+1}^{M} \rho_{t_j^{'}} \times E_{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{Fv}_{t_j^{'}}\right] + 100 \times \rho_{t_M^{'}}$$

i est la date de début de période du prochain coupon sur la branche variable du swap.

5.2.1.2 Valorisation par Projection des Taux Forwards

Nous allons présenter ici la méthode dite de « valorisation par projection des taux forwards » décrite initialement par Chazot C. & Claude P. dans leur ouvrage de référence précédemment cité. Cette méthode consiste à supposer que les taux forwards se réalisent et donc à remplacer les E[.] par leurs équivalents « forwards ». Notons que la méthode de « valorisation par projection des taux forwards » se justifie simplement par les bonnes propriétés des taux forwards en tant qu'estimateurs non biaisés (ex-ante) des taux spots futurs correspondants comme nous l'avons montré au Chapitre 2.

On peut remplacer dans la formule de valorisation de la branche variable du swap $E_{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{Fv}_{t_i^{'}}\right]$ par son équivalent certain calculé à partir des taux forwards :

$$E_{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{Fv}_{t_i^{'}}\right] = 100 \times \frac{t_i^{'} - t_{i-1}^{'}}{360} \times R^{Fwd}_{t_i^{'},t_{i-1}^{'}}$$

$R^{Fwd}_{t_i^{'},t_{i-1}^{'}}$ est le taux forward (en convention monétaire) calculé dans la courbe des taux swap à la date t.

10. $E_{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{F}\right]$ est l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\widetilde{F}$ sous la probabilité $\mathbb{Q}$

Par définition du taux forward, on a :

$$\left(1+Z_{t'_{i-1}}\right)^{\frac{t'_{i-1}-t}{360}} = \left(1+\frac{t'_i - t'_{i-1}}{360} \times R^{Fwd}_{t'_i,t'_{i-1}}\right) \times \left(1+Z_{t'_i}\right)^{\frac{t'_i-t}{360}}$$

D'où on l'on tire :

$$R^{Fwd}_{t'_i,t'_{i-1}} = -\frac{360}{t'_i - t'_{i-1}} \times \left[\frac{\left(1+Z_{t'_{i-1}}\right)^{\frac{t'_{i-1}-t}{360}}}{\left(1+Z_{t'_i}\right)^{\frac{t'_i-t}{360}}} - 1\right]$$

soit :

$$R^{Fwd}_{t'_i,t'_{i-1}} = -\frac{360}{t'_i - t'_{i-1}} \times \left[\frac{\rho_{t'_i}}{\rho_{t'_{i-1}}} - 1\right]$$

Calculons maintenant $\mathrm{V_{Variable}}$ en partant de la formule générale donnée au sous-paragraphe 5.2.1.1 :

$$\begin{aligned}
V_{Variable} &= \sum_{j=i+1}^{M} \rho_{t'_j} \times E_{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{Fv}_{t'_j}\right] + 100 \times \rho_{t'_M} \\
&= \rho_{t'_{i+1}} \times Fv_{t'_{i+1}} + \sum_{i=i+2}^{M} \rho_{t'_j} \times E_{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{Fv}_{t'_j}\right] + 100 \times \rho_{t'_M} \\
&= \rho_{t'_{i+1}} \times Fv_{t'_{i+1}} + 100 \times \sum_{i=i+2}^{M} \rho_{t'_j} \times \left[\frac{\rho_{t'_{j-1}}}{\rho_{t'_j}} - 1\right] + 100 \times \rho_{t'_M} \\
&= \rho_{t'_{i+1}} \times \left[100 + Fv_{t'_{i+1}}\right]
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient la formule de valorisation recherchée pour la branche variable de la position de swap :

$$V_{Variable} = \left(100 + Fv_{t'_{i+1}}\right) \times \rho_{t'_{i+1}} \qquad avec \qquad Fv_{t'_{i+1}} = 100 \times R_{i,i+1} \times \frac{t'_{i+1} - t'_i}{360}$$

$\rho_{t'_{i+1}}$ est le facteur d'actualisation correspondant au taux zéro-coupon date de valeur t et date de maturité t'_{i+1}.

Au total, la market value à une date t quelconque ($t'_i <$ t $< t'_{i+1}$) d'une position de swap de taux standard (receveur) en cours de vie s'écrit (pour un nominal de EUR 100) :

$$V_{Swap} = \underbrace{C \times \sum_{k=h+1}^{K} \rho_{t_k} + 100 \times \rho_{t,t_K}}_{Branche\ Fixe} - \underbrace{\left(100 + Fv_{t'_{i+1}}\right) \times \rho_{t'_{i+1}}}_{Branche\ Variable}$$

Cette formule de valorisation nous sera aussi utile pour le pricing des swaps de taux comme nous le verrons au paragraphe 5.2.2.

5.2.1.3 Valorisation par Arbitrage (FRN)

On a vu au paragraphe 5.2.1 que la branche variable du swap pouvait s'analyser comme une obligation à taux variable dont la maturité du taux de référence (ex : 3M) est égale à la périodicité des fixings (ex : 3M).

Cette situation est décrite par le graphique 5.4 ci-dessous.

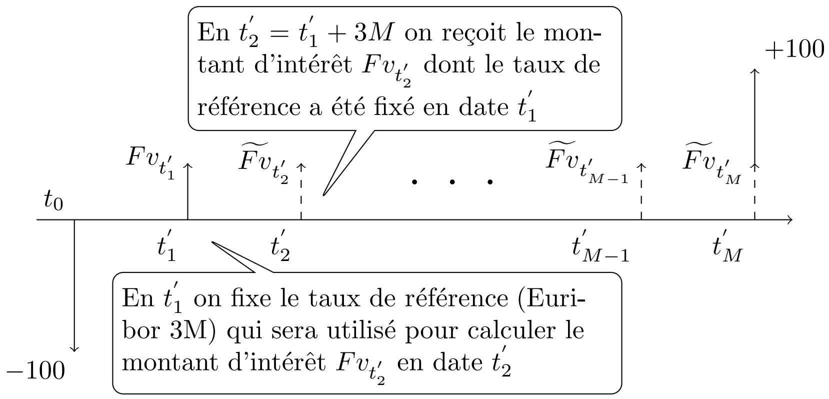

FIG. 5.4 – *Synthétique Obligataire de la Branche Variable d'un Swap*

Ce type d'instrument est appelé « Floating Rate Note » or plus simplement FRN.

Un FRN peut être analysé sous la forme d'un roll-over de prêt-emprunts c'est-à-dire par une succession de prêts (Long du FRN) ou d'emprunts (Short du FRN) de mêmes durées et négociés aux « fil de l'eau ».

Plus précisément, on a l'égalité suivante :

Long d'un FRN de maturité T qui verse un coupon $Fv_{t_i^{'}}$ aux dates $t_i^{'}$ ($t_i^{'} = t_0^{'} + \tau \times i \; et \; i > 0$) indexé sur un taux Euribor et tel que la périodicité des fixings est égale à la maturité τ du taux de référence
<==>
Un « roll-over » de prêts de maturités τ négociés aux taux du marché interbancaire (donc à ε-près aux taux des fixings Euribor). Seul le montant nominal du prêt (100) est « roulé », les intérêts $Fv^*_{t_i^{'}}$ sont conservés en trésorerie par le prêteur.
Le nombre total de prêts est $M = T/\tau$

Calculons les flux générés par les M prêts constitutifs du roll-over sur l'échancier constitué des dates $t_i^{'}$ (i=0...M).

Prêts	t'_0	t'_1	t'_2	$\cdots$	t'_{M-1}	t'_M
1	-100	$100 + Fv^*_{t'_1}$				
2		-100	$100 + Fv^*_{t'_2}$			
				$\ddots$		
M-1					$100 + Fv^*_{t'_{M-1}}$	
M					-100	$100 + Fv^*_{t'_M}$
Total	-100	$Fv^*_{t'_1}$	$Fv^*_{t'_2}$	$\cdots$	$Fv^*_{t'_{M-1}}$	$100 + Fv^*_{t'_M}$

TAB. 5.7 – Cashflows du Roll-Over de Prêts

Au total (dernière ligne du Tableau 5.7), on retrouve bien la structure de cashflows d'un FRN à ε-près[11]:

$$Fv^*_{t'_i} = Fv_{t'_i} \pm \epsilon$$

Sous hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), un FRN est donc bien équivalent à un « roll-over » de prêts tel que défini dans l'encadré précédent.

Nous pouvons maintenant utiliser ce résultat pour calculer $\mathbf{V_{Variable}}$.

Du fait de la relation d'arbitrage précédente, si on se place à une date t quelconque (t'_i < t < t'_{i+1}), un FRN est synthétisé par :

- Le prêt « en cours » négocié au taux $R_{i,i+1}$, date de valeur t'_i et date de maturité t'_{i+1}
- Les prêts « à venir » mais non encore négociés à cette date t

Comme les prêts « à venir » seront négociés aux dates futures t'_{i+1}, t'_{i+2}, ..., t'_{M-1}, ils n'ont donc aucune valeur aujourd'hui (t) et seul le prêt « en cours » doit être pris en compte.

En conséquence, la valeur du FRN (et donc de la branche variable du swap) à la date t est égale à la valeur du prêt « en cours » :

$$V_{Variable} = \left(100 + Fv_{t'_{i+1}}\right) \times \rho_{t'_{i+1}} \qquad avec \qquad Fv_{t'_{i+1}} = 100 \times R_{i,i+1} \times \frac{t'_{i+1} - t'_i}{360}$$

On retrouve bien la formule obtenue par la méthode de « projection des taux forwards » au sous-paragraphe 5.2.1.2.

5.2.2 Pricing des Swap de Taux (Spot et Forward)

On traite d'abord le cas des swaps de taux à date de départ standard (spot) puis le cas des swaps de taux à départ différé (forward).

11. Rappelons que ε est l'erreur sur les taux des prêt-emprunts effectivement négociés par des banques de « première catégorie » par rapport au fixing Euribor correspondant déjà évoqué au Chapitre 2 dans l'étude des FRA

5.2.2.1 Pricing des Swaps à Départ Spot

Pricer un swap de taux (standard) sur une maturité non cotée c'est trouver le taux de swap C^* qui annule la market value du swap :

$$\boxed{V_{Swap}\left(C^*\right) = 0}$$

Partons de la formule générale de valorisation d'un swap de taux (cf. Paragraphe 5.2.1) et plaçons-nous à une date t correspondant à la date de début de période du premier coupon sur la branche fixe du swap (h = 0). Comme cette date t est aussi une date de début de période du premier coupon sur la branche variable du swap, le taux du fixing Euribor et le taux zéro-coupon sont identiques.

Dans ce cas particulier, la formule générale de valorisation peut être reécrite sous la forme suivante :

$$V_{Swap} = C \times \sum_{k=1}^{K} \rho_{t_k} + 100 \times \rho_{t_K} - 100$$

Le taux de swap C^* qui annule la market value du swap s'écrit donc :

$$C^* = \frac{100 \times (1 - \rho_{t_K})}{\sum_{k=1}^{K} \rho_{t_k}}$$

C'est la formule usuelle de pricing d'un swap de taux « fixe vs variable » (plain vanilla).

Une autre formule (obtenue à partir de la formule générale donnée au paragraphe 5.2.1) permet d'**interpréter le taux de swap C^* comme une « moyenne » des taux anticipés sur la branche variable** (évident si la périodicité des paiements est la même sur les deux branches) :

$$C^* = \frac{\sum_{j=1}^{M} \rho_{t'_j} \times E_{\mathbb{Q}}\left[Fv_{t'_j}\right]}{\sum_{k=1}^{K} \rho_{t_k}}$$

On constate donc que les swaps de taux « plain vanilla » sont des instruments à long terme liés à des taux à court terme (ex : Euribor 3M). Les taux de swap sont donc sensibles à tout les facteurs prépondérants dans la dynamique du marché interbancaire, au premier rang desquels figure la politique monétaire menée par la banque centrale de la zone monétaire considérée (cf. Paragraphe 5.3.4 pour une discussion sur l'impact des politiques monétaires sur les taux de swap).

5.2.2.2 Pricing des Swaps à Départ Différé

Notons que les deux formules précédentes s'appliquent aussi bien pour un swap à départ spot (J+2) que pour un swap à départ différé (> J+2).

Dans le cas particulier du pricing d'un swap à départ différé t_1 et date de maturité t_2 pour lequel la date de valeur t_1 est de type xA+J+2 où x est un multiple entier d'années, il est possible de calculer le taux de ce swap en fonction des taux des swaps départ spot de maturité t_1 et t_2.

Pour fixer les idées notons :

- C_1 : Le taux de swap date de valeur spot et date de maturité t_1

– C_2 : Le taux de swap date de valeur spot et date de maturité t_2

En appliquant la formule générale de pricing ci-dessus à ces deux swaps de taux, on trouve :

$$C_1 = \frac{\sum_{j=1}^{M_1} \rho_{t_j'} \times E_{\mathbb{Q}}\left[Fv_{t_j'}\right]}{\sum_{k=1}^{K_1} \rho_{t_k}} \qquad et \qquad C_2 = \frac{\sum_{j=1}^{M_2} \rho_{t_j'} \times E_{\mathbb{Q}}\left[Fv_{t_j'}\right]}{\sum_{k=1}^{K_2} \rho_{t_k}}$$

avec :

$$t_1 = t_{M_1} = t_{K_1}^{'} < t_{M_2} = t_{K_2}^{'} = t_2 \qquad (t_1, t_2 \,\epsilon\, \mathbb{N})$$

La même formule générale de pricing s'applique à un swap de taux à départ différé t_1 et date de maturité t_2. Plus précisément, on a :

$$C_{1,2}^{Fwd} = \frac{\sum_{j=M_1+1}^{M_2} \rho_{t_j'} \times E_{\mathbb{Q}}\left[Fv_{t_j'}\right]}{\sum_{k=K_1+1}^{K_2} \rho_{t_k}}$$

Puisque de façon triviale, on a :

$$\sum_{j=1}^{M_2} \rho_{t_j'} \times E_{\mathbb{Q}}\left[Fv_{t_j'}\right] = \sum_{j=1}^{M_1} \rho_{t_j'} \times E_{\mathbb{Q}}\left[Fv_{t_j'}\right] + \sum_{j=M_1+1}^{M_2} \rho_{t_j'} \times E_{\mathbb{Q}}\left[Fv_{t_j'}\right]$$

On en déduit l'égalité suivante :

$$C_2 \times \sum_{k=1}^{K_2} \rho_{t_k} = C_1 \times \sum_{k=1}^{K_1} \rho_{t_k} + C_{1,2}^{Fwd} \times \sum_{k=K_1+1}^{K_2} \rho_{t_k}$$

On obtient finalement la formule du taux de swap forward $C_{1,2}^{Fwd}$ en fonction des taux de swap spot C_1 et C_2 :

$$C_{1,2}^{Fwd} = C_2 + (C_2 - C_1) \times \frac{\sum_{k=1}^{K_1} \rho_{t_k}}{\sum_{k=K_1+1}^{K_2} \rho_{t_k}}$$

En pratique, il est possible de reproduire un swap « payeur du fixe » de taux fixe $C_{1,2}^{Fwd}$ à départ différé t_1 et date de maturité t_2 par les trois opérations suivantes :

1. Swap « payeur du fixe » de taux fixe C_2 à départ spot (t_0) et date de maturité t_2
2. Swap « receveur du fixe » de taux fixe C_1 à départ spot (t_0) et date de maturité t_1
3. Transfert des différentiels de taux fixes ($C_2 - C_1$) de $[t_0, t_1]$ vers $[t_1, t_2]$ sous la forme d'un accroissement uniforme $\triangle C_{1,2}^{Fwd}$ des taux fixes C_2

On montre que l'accroissement uniforme $\triangle C_{1,2}^{Fwd}$ est précisément égal à :

$$\triangle C_{1,2}^{Fwd} = (C_2 - C_1) \times \frac{\sum_{k=1}^{K_1} \rho_{t_k}}{\sum_{k=K_1+1}^{K_2} \rho_{t_k}}$$

Les swaps à départs différés (ou swaps forwards) sont principalement utilisés pour fixer un taux de prêt ou d'emprunt à terme de façon ferme [12].

12. Pour information, la version conditionnelle des swaps à départs différés (options sur swap) est appelée swaptions

5.3 Asset-Swap Gov/Corp

Un asset-swap est une position dans laquelle l'investisseur est simultanément long d'une obligation à taux fixe « in fine » (asset) émise par un émetteur public ou privé et payeur d'un swap de taux (fixe contre variable). On distingue deux types d'asset-swap :

1. Les asset-swap « non structurés » (couverture en sensibilité)
2. Les asset-swap « structurés » (couverture zéro-coupon)

Ces derniers peuvent êtres analysés, pricés et valorisés comme des instruments homogènes à part entière.

Cette section se termine par une discussion sur la hiérarchie et la dynamique des trois différentes courbes de taux (Etat, swap et corporate) ainsi que sur l'impact des politiques monétaires sur ces trois courbes de taux.

5.3.1 Asset-Swap « Non Structuré »

Un Asset Swap « Non Structuré » est une position dans laquelle l'investisseur est :

- Long (vs Short) d'une Obligation à Taux Fixe (Etat ou Corporate)
- Emprunteur (vs Prêteur) du Swap Standard de « même » maturité

L'objectif de la position de swap est de couvrir le risque de taux sur la position obligataire.

La couverture de l'obligation par le swap se fait en sensibilité (actuarielle ou zéro-coupon) en considérant la branche fixe du swap comme l'obligation de couverture. Le calcul du montant nominal N_{Swap} de la position de swap en fonction du montant nominal N_{Oblig} de la position obligataire est réalisé de la même façon qu'au Chapitre 1 (couverture mono-factorielle), à savoir :

$$N_{Swap} = N_{Oblig} \times \frac{S_{Oblig}}{S_{Swap}}$$

Dans cette formule, S_{Swap} et S_{Oblig} désignent les sensibilités (actuarielles ou zéro-coupon) respectives de la branche fixe du swap (flux en capital inclus) et de l'obligation.

Ainsi construite (cf. Graphique 5.5), la position est couverte contre un mouvement uniforme et homogène des courbes de taux obligataires et swap. Il subsiste néanmoins un risque de décorrélation entre le taux actuariel de l'obligation et le taux de swap correspondant. En d'autres termes, la position est sensible au spread entre le taux actuariel de l'obligation et le taux du swap.

(Long) Obligation à Taux Fixe (Financée en Repo)

$\Updownarrow$

Long Obligation Taux Fixe — Roll-Over Repo 3/6 Mois

$\Updownarrow$ Couverture en Sensibilité

Short Obligation "Au Pair" — Roll-Over Prêts 3/6 Mois

$\Updownarrow$

(Payeur) Swap de Taux (standard)

FIG. 5.5 – *Asset-Swap « Non Structuré »*

On appele « spread apparent » la différence entre le taux actuariel de l'obligation R_{act} et le taux de swap C. Selon que le taux du swap C est calculé par simple interpolation dans la courbe des taux swap ou par un pricing dans la courbe des taux zéro-coupon swap sur la maturité de l'obligation, on parle de spread « apparent et interpolé » ou de spread « apparent et pricé ».

On a d'une manière générale :

$$\boxed{\text{Spread Apparent} = \text{Taux Actuariel Obligation} - \text{Taux Swap}}$$

Notons que dans le cas où l'obligation est « au pair » et le swap à la même maturité que l'obligation, le spread apparent s'écrit alors :

$$\begin{aligned} Spread &= R_{act} - C_{Swap} \\ &= R_{act} - \frac{100 \times \rho_{t_K} - 100}{\sum_{k=1}^{K} \rho_{t_k}} \\ &= \frac{R_{act} \times \sum_{k=1}^{K} \rho_{t_k} + 100 \times \rho_{t_K} - 100}{\sum_{k=1}^{K} \rho_{t_k}} \end{aligned}$$

soit :

$$Spread = \frac{P_{Swap}\left(R_{act}\right) - P_{Swap}\left(C_{Swap}\right)}{\sum_{k=1}^{K} \rho_{t_k}}$$

Les asset-swaps « non structurés » permettent de jouer le spread apparent c'est-à-dire les mouvements de convergence ou de divergence entre le taux actuariel de l'obligation et le taux de swap. Ces positions ont pour avantage d'êtres simples à monter dans le marché. Par contre, elles ont pour principal défaut d'êtres construites sur la base d'une couverture (imparfaite) en sensibilité actuarielle et non d'une couverture (parfaite) de type zéro-coupon.

C'est précisément l'objectif des asset-swap « structurés » que de permettre de palier à ce défaut des asset-swap « non structurés ».

5.3.2 Asset-Swap « Structuré »

Un asset-swap « structuré » transforme une obligation à taux fixe en une obligation à taux variable émise au « pair » via une couverture zéro-coupon de l'obligation par la branche fixe du swap.

Cette transformation nécessite de recourir à un swap « hors marché » structuré comme suit :

- La branche fixe du swap reproduit exactement les cashflows de l'obligation (hors nominal)
- La valeur du swap est égale au pair moins le prix de l'obligation

Cette valeur (non nulle) du swap donne lieu au versement d'une soulte à l'initialisation de l'opération.

On appelle spread ou marge d'asset-swap, la marge à appliquer au taux variable du swap pour permettre l'ajustement entre la branche fixe, la branche variable et la soulte.

Mathématiquement[13], le calcul du spread d'asset swap pour une obligation ayant les caractéristiques suivantes :

- Prix net : P
- Coupon couru : CC
- Taux de coupon : C
- Périodicité : Annuelle
- Date de négo : $t_0 = 0$
- Dates flux : $\{t_k\}_{k=1\ldots K}$

commence par le pricing du swap « hors marché ». On utilise ici la méthode de valorisation par projection des taux forwards. On obtient :

$$\boxed{V_{Swap} = \underbrace{M_{a-s} \times \sum_{j=1}^{J} \rho_{t'_j} \times \tau + 100 \times (1 - \rho_{t_K})}_{Branche\ Variable} - \underbrace{C \times \sum_{k=1}^{K} \rho_{t_k}}_{Branche\ Fixe}}$$

Avec les notations supplémentaires :

- Facteur d'actualisation : ρ_t
- Dates flux variables : $\left\{t'_j\right\}_{j=1\ldots J}$
- Fraction d'année : τ
- Marge d'asset-swap : $M_{a\text{-}s}$

Il ne reste plus qu'à imposer que la valeur du swap soit égale au pair moins le prix de l'obligation :

$$V_{Swap} = 100 - (P + CC)$$

On obtient finalement la marge de l'asset-swap « structuré » :

$$M_{a-s} = \frac{C \times \sum_{k=1}^{K} \rho_{t_k} + 100 \times \rho_{t_K} - (P + CC)}{\sum_{j=1}^{J} \rho_{t'_j} \times \tau}$$

Toutes choses égales par ailleurs, le spread d'asset swap dépend donc de la périodicité τ de la branche variable du swap ainsi que la forme de la courbe des taux swap[14].

A titre d'exemple, calculons la marge d'asset-swap d'une obligation d'Etat de maturité (résiduelle) 5A qui verse un coupon de 3.75% et vaut 102.75% dans le marché. La périodicité des flux sur la branche variable de l'asset-swap est de 6M.

En appliquant directement la formule précédente, on trouve :

13. Le calcul de la marge d'asset-swap qui suit est tiré de Chazot C. & Claude P. (1999)
14. Les marges contre Euribor 3M et Euribor 6M sont donc différentes

$$M_{a-s} = \frac{3.75\% \times 4.56520 + 100\% \times 0.84570 - 102.75\%}{9.21006 \times 0.5} = -0.23037\%$$

Les facteurs d'actualisation utilisés sont ceux déjà calculés dans l'exemple du paragraphe 5.1.4.

Notre obligation d'Etat traite donc à « Euribor - 23bp ».

Fin de l'exemple numérique.

Si le montant nominal N de l'asset-swap est financé par un roll-over d'emprunts négociés aux taux Euribor (cas des banques de première catégorie) selon une périodicité égale à la périodicité de la branche variable du swap alors cette position rapporte à son détenteur un flux de cashflows positifs tous égaux à :

$$CF_{t'_j} = N \times M_{a-s} \times \tau$$

Acheter un asset-swap « structuré » revient donc à acheter un titre à taux variable émis au « pair » qui paye Euribor plus une marge fixe M tout les 3/6 Mois (cf. Graphique 5.6).

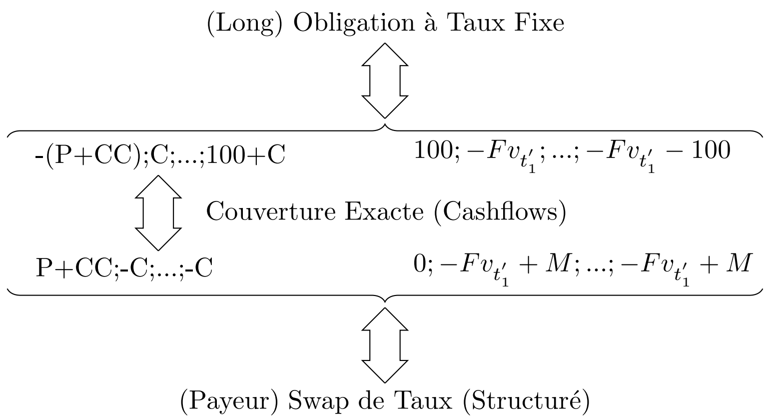

Fig. 5.6 – *Asset-Swap « Structuré »*

Dans le cas où l'obligation est financée par un roll-over de repos négociés aux taux Euribor plus une marge M_j^{Repo} pour le j-ième repo, il faut retrancher cette marge repo au cashflow trimestriel :

$$CF_{t'_j} = N \times \left(M_{a-s} - M_j^{Repo}\right) \times \tau$$

Un tel montage revient donc à « swapper » une marge fixe (celle de l'asset-swap) contre une marge variable (cette du roll-over de repos). Par abus de language, on peut dire qu'il s'agit d'un « swap de marges » plain vanilla (fixe contre variable).

Asset-Swap Financé en Repo <==> Swap de Marges (Fixe vs Variable)

Par analogie avec le cas d'un swap de taux plain vanilla (fixe contre variable), on en déduit que la marge d'un asset-swap peut s'interpréter comme une « moyenne » des marges repos anticipées sur le roll-over de repos. Puisque la marge repo est négative, la marge d'asset-swap d'un titre d'Etat AAA est aussi négative.

Par contre, les marges sur les titres corporates sont généralement positives du fait du risque de crédit [15]

5.3.3 Valorisation, Risques et Financement

La **valorisation d'une position d'asset-swap** en cours de vie peut être réalisée de deux façons :

1. La valorisation d'un asset-swap qu'il soit structuré ou pas peut être obtenue simplement à partir des valorisations des éléments qui le composent :
   (a) La partie obligataire
   (b) La partie swap
2. Un asset-swap structuré peut être valorisé par inversion (fictive) de la position et valorisation du flux de différentiels de marges (connu et certain) qui résulte de cette inversion

La première méthode ne pose pas de problème particulier puisque nous savons comment valoriser une obligation (cf. Chapitre 3) et un swap (cf. Section 5.2 du présent chapitre). Nous allons nous contenter de décrire la seconde méthode qui consiste à considérer un asset-swap comme un instrument financier autonome sans faire référence aux instruments utilisés pour sa création.

Supposons que l'on est long d'un asset-swap, pour un montant nominal N, négocié à une marge M_0 en t_0 et plaçons-nous à une date $t_i^{'}$ de début de période de coupon (variable). On note M_i la marge de l'asset-swap cotée dans le marché à la date $t_i^{'}$.

On va donc inverser notre position (fictivement) via une position « vendeuse » sur l'asset-swap négociée à ce niveau de marge M_i.

Notre situation (latent) est maintenant la suivante :

- Les parties « Euribor » des cashflows de la position « acheteuse » initiale et de la position « vendeuse » (couverture) s'annulent mutuellement
- Seules subsistent les parties « marges » des cashflows des positions « acheteuse » et « vendeuse »

15. La marge d'asset-swap d'une obligation corporate mesure la prime de risque de crédit sur le cette obligation « au dessus » de la courbe des taux swaps. Une autre approche couramment utilisée consiste à calculer le spread de crédit de cette obligation par rapport à la courbe des taux zéro-coupon Etat. Considérons une obligation à taux fixe « in fine » émise par un émetteur corporate à un taux facial C et pour une maturité N (en années). On appelle « valorisation en spread » de cette obligation, la relation entre le prix de l'obligation et le spread « actuariel » à appliquer à la courbe des taux zéro-coupon Etat dans le pricing de l'obligation :

$$P = \sum_{n=1}^{N} \frac{C}{(1 + Z_n^{Etat} + Spread)^n} + \sum_{n=1}^{N} \frac{100}{(1 + Z_n^{Etat} + Spread)^N}$$

Cette formule de pricing est couramment utilisée dans les deux sens :
- Calcul du spread de crédit à partir du prix de l'obligation coté dans le marché (cas des titres les plus liquides)
- Calcul du prix de l'obligation à partir du spread de crédit (cas des titres illiquides)

Le spread de crédit représente le surcroît de rémunération demandé par le marché pour rémunérer le risque de crédit sous-jacent. Notons que pour un émetteur donné, la connaissance de ces spreads de crédit sur différentes maturités permet de calculer les probabilités de défaut « implicites » pour un taux de recouvrement en cas de défaut donné (cf. Chapitre 9).

Au total, la valorisation du latent de notre position d'asset-swap s'écrit donc[16] :

$$V_{asset-swap} = N \times (M_0 - M_i) \times \tau \times \sum_{j=i}^{J} \rho_{t'_j}$$

On constate que, toutes choses égales par ailleurs, la valorisation de notre position d'asset-swap est directement proportionnelle au différentiel de marges. Dans le cas particulier où les marges sont identiques, la valorisation de la position (latent) est nulle.

Enfin, la valorisation d'une position d'asset-swap dans les deux cas particuliers où la date de valorisation correspond à la date de négociation ou à la date de maturité est explicitée dans le tableau 5.8 ci-dessous.

	Hors financement	Financement en Repo
Date de Négociation	100% de la valeur nominale de la position	0
Date de Maturité	Somme des intérêts reçus (Euribor 6M + marge négociée au départ) capitalisés au JJ (par exemple)	Somme des marges reçues capitalisées au JJ (par exemple) si l'asset-swap est financée par un roll-over d'emprunt à 6M (pour un investisseur empruntant au taux interbancaire)

TAB. 5.8 – Valorisation d'un Asset-Swap en Date de Négociation/Maturité

Décrivons maintenant les risques attachés à une position (longue) d'asset-swap.

Le détenteur de cette position supporte deux types de risques :

- Un risque de défaut de l'émetteur pendant la durée de vie de l'asset-swap
- Un risque de marge lié aux fluctuations de la marge de l'asset-swap au cours du temps

Ces deux risques n'ont pas le même impact selon que la position est prise dans une perspective de court terme (trading) ou dans une perspective de long terme (investissement) :

- Si l'horizon d'investissement est (très) inférieur à la maturité de l'asset-swap, l'investisseur est principalement soumis au risque de marge qui dépend essentiellement de l'évolution de la confiance accordée par le marché dans la capacité de l'émetteur à rembourser sa dette pour des émetteurs corporate ainsi qu'à d'autres facteurs techniques. La formule de valorisation d'un asset-swap donnée ci-dessus montre qu'un tel comportement s'assimile à du trading de marge (l'opérateur fait un pari sur la marge).
- Si l'horizon d'investissement est égal à la maturité de l'asset-swap[17], Le principal risque pour un investisseur « long terme » est lié une dégradation de la solvabilité de l'émetteur de l'obligation pouvant éventuellement déboucher sur un défaut (partiel ou total, provisoire ou définitif). Les positions d'asset-swap conservées jusqu'à échéance sont en général construites sur la base d'obligations corporate notées « Investment Grade »

16. Notons qu'en pratique, lorsque la position est réellement inversée dans le marché, l'investisseur peut négocier avec le market-maker le paiement d'une soulte permettant de solder la position d'asset-swap en cash

17. Dans ce cas, il n'y a pas d'intérêt particulier à monter ce type de position sur des emprunts d'Etat puisque l'espérance de gain est nul à long terme (en vertu de notre analyse d'un asset-swap Etat financé en repo, du paragraphe 5.3.2)

par les grandes agences de notation[18] qui offrent des marges d'asset-swap positives[19] tout en bénéficiant d'une signature de « bonne qualité » et donc un risque de défaut « modéré » (au contraire des obligations corporate notées « Speculative Grade »).

5.3.4 Hiérarchie et Dynamique des Courbes de Taux

En plus des taux swaps et des taux Etat, un troisième type de courbe de taux doit être pris en compte : les taux corporate. Ces trois courbes de taux peuvent être classées en fonction du risque « sous-jacent » (par ordre croissant du risque) :

– Etat : « sans risque » (pour les Etats notés AAA)
– Swap : représentatif du risque bancaire
– Corporate : risque des sociétés industrielles et commerciales non bancaires

Notons qu'en pratique, il n'y a pas une seule courbe des taux corporate mais autant de courbes de taux corporate qu'il y a d'émetteurs d'obligations corporate.

En règle générale, ces trois types de taux sont hiérarchisés de la façon suivante (à notations identiques) :

$$\boxed{\text{Taux Etat} < \text{Taux Swap} < \text{Taux Corporate}}$$

Il s'agit d'une hiérarchie « normale » des primes de risques qui tient compte du fait que :

– L'Etat dispose du droit (régalien) de lever l'impôt sur le territoire sur lequel il exerce son autorité
– La liquidité des banques commerciales est garantie par la Banque Centrale ce qui réduit le risque de défaut (mais ne l'élimine pas totalement)
– Les sociétés industrielles et commerciales n'ont aucune garantie d'être refinancées par le secteur bancaire, le risque de défaut constitue donc une issue plus ou moins probable pour ces sociétés en fonction de la qualité de leurs structures financières et de leurs perspectives de résultats[20]

Bien que cette hiérarchie des courbes de taux soit en général respectée, **les écarts de taux eux ne sont pas statiques mais varient au cours du cycle économique et plus spécifiquement en cas de crise.** Que ce soit dans la phase de ralentissement du cycle économique ou dans les crises plus ponctuelles, les investisseurs arbitrent entre les différents investissements possibles en faveur des actifs et/ou des instruments moins risqués et plus liquides.

De façon non exhaustive on observe les mouvements inter-classes suivants :

Actions $\rightarrow$ Obligations
Marchés émergeants $\rightarrow$ Marchés développés
Actifs non cotés $\rightarrow$ Actifs cotés

Les mouvements inter-classes sont les plus visibles mais les mouvements intra-classes sont aussi observables :

18. Il existe de nombreuses agences de notation financières mais les plus « écoutées » pour des raisons historiques sont indiscutablement Moody's et Standard and Poor's
19. Du fait de taux de rendement actuariels plus élevés que les obligation d'Etat de mêmes caractéristiques exigés par le marché pour rémunérer le risque de défaut (rappel)
20. En pratique cependant les sociétés dites « too big to fail » disposent d'une garantie implicite des pouvoirs publics

Small & mid caps → Blue ships Valeurs de croissances → Valeurs défensives Dettes corporates → Dettes Etat « Off-the-run » Treasuries → « On-the-run » treasuries Dettes longues → Dettes courtes Dettes d'Etat des pays « périphériques » → Dettes d'Etats des pays « core »

L'impact d'une telle réallocation d'actifs[21] sur les marchés de dette entraîne généralement une baisse des taux Etat, une hausse des taux des obligations corporates et des taux de swap.

↓ Taux Etat (AAA) & ↑ Taux Swap & ↑ Taux Corporate

En cas de crise sur la liquidité bancaire[22] les Banques Centrales peuvent intervenir de trois façons différentes selon la gravité de la crise :

1. Elles peuvent baisser le prix de la liquidité en baissant le ou les taux d'intérêts consentis aux banques commerciales
2. Elles peuvent garantir l'offre de liquidité en se portant prêteurs en dernier ressort au près des banques commerciales
3. Elles peuvent baisser leurs exigences en matières de collatéraux (créances sur l'économie) demandés en garanti des prêts consentis aux banques commerciales

Si le premier levier de la politique monétaire est le plus souvent utilisé, il peut s'avérer insuffisant en cas de crise grave et/ou prolongée. Il peut même devenir inopérant après plusieurs utilisations successives (cycle de baisses des taux) sans que cela n'ai d'impact positif sur la crise. Dans cette situation où les taux sont proches de zéro, les autres leviers doivent êtres utilisés pour palier à des problèmes de crise de confiance interbancaire (second levier) et/ou à la dégradation des bilans (actifs) des banques (troisième levier).

En terme de politique de taux, les banques centrales ont deux façons d'agir sur les taux d'intérêts « interbancaires »[23] :

1. Elles influent directement sur les taux interbancaires à court terme via le niveau de leurs taux d'intervention
2. Elles influent indirectement sur les taux de swap (avec indexation interbancaire) via les indications qu'elles donnent aux marchés et les anticipations qui en résultent sur leurs politiques de taux « à venir » (cf. formule de pricing d'un swap départ spot au sous-paragraphe 5.2.2.1)

Ce second canal de la politique monétaire permet un contrôle (indirect et décalé) sur les taux pratiqués par les banques commerciales vis-à-vis des entreprises (taux corporate). Par contre, ce canal n'est efficace que si la Banque Centrale concernée est jugée crédible par les acteurs du marché car ce sont ces derniers qui « fixent » les taux long terme (swap) via leurs anticipations et les prises de positions qui en résultent.

21. On parle de « fly-to-quality » lorsque le mouvement est durable et de forte amplitude et de marché en mode « risk off » (vs « risk on ») lorsque le mouvement est ponctuel et de faible amplitude

22. Comme en 1997 (Asie), 1998 (Russie/LTCM), 2007 (Subprime), 2008 (Lehman Brothers) ou plus récemment en 2011 (Euro/PIGS)

23. Bien que le marché interbancaire n'ait pas vocation à constituer une ressource importante et/ou structurelle pour les banques commerciales, les taux qui s'y forment sont « directeurs » pour l'ensemble du secteur bancaire (coût de la ressource) et par extension pour l'ensemble de l'économie (crédits aux entreprises et aux ménages)

Chapitre 6

Contrats Futures CT vs FRAs

On commence par introduire les contrats futures sur taux d'intérêts à court terme de façon générale puis dans le cadre du contrat Euribor 3M du Liffe. On insistera sur les spécificités de ce type de contrats (standardisation, mode de cotation, mécanisme d'appels de marges) propres aux marchés organisés. L'utilisation classique des contrats Futures CT pour fixer un taux de prêt ou d'emprunt à terme sera étudiée dans le cas où le P/E à couvrir et le sous-jacent du contrat coïncident (couverture parfaite) et dans le cas où ils ne coïncident pas (couverture imparfaite). Après un comparatif général entre les contrats Futures CT et les contrats de FRAs en insistant sur l'interdépendance des deux contrats d'un point de vue économique, nous analyserons dans la deuxième section le profil risque-P/L d'une position sur contrats de FRA couverte par des contrats Futures CT de mêmes caractéristiques (périodes et indice de référence). Cette section nous permetra de mettre en évidence les raisons pour lesquelles les taux forwards doivent êtres inférieurs aux taux Futures équivalents (biais de convexité). La dernière section est consacrée à l'analyse qualitave du biais de convexité en fonction de la volatilité des taux CT et du passage du temps puis à son pricing empirique (formule de calcul approchée et/ou barbell d'options sur FRAs). On termine par une application au pricing des swaps de taux par le biais des contrats Futures CT.

6.1 Contrats Futures Court Terme

Dans cette section, nous allons décrire les contrats Futures CT de façon générale et introduire certains concepts et mécanismes propres à ce type de produits financiers négociés sur des marchés organisés. Nous étudierons ensuite le risque de corrélation existant lorsque les caractéristiques du sous-jacent du contrat et les caractéristiques du prêt (ou de l'emprunt) à couvrir par des contrats Futures CT diffèrent. On terminera cette section par une description du contrat Futures Euribor 3M du Liffe qui est le marché Futures de référence sur la partie CT de la courbe des taux en Euros.

6.1.1 Description

Les contrats Futures CT sont des instruments financiers hors bilan négociés sur des marchés organisés. Un contrat Futures CT peut être interprété comme une **garantie de taux d'intérêt pour un prêt ou un emprunt sous-jacent dont le montant, la date de départ et la durée sont prédéterminés et standardisés**.

Les caractéristiques les plus importantes d'un contrat Futures CT sont :

1. Le montant nominal N_1 du sous-jacent (pour 1 contrat)

2. La durée f du prêt-emprunt sous-jacent
3. Le taux ou indice de référence $\mathrm{R_{REF}}$
4. L'échelon minimal de cotation (Tick)

Sur un même marché se traitent généralement plusieurs contrats simultanément qui portent sur le même indice de référence mais diffèrent par la date d'échéance. Les mois d'échéances des contrats Futures CT sont standardisés et au nombre de quatre par an :

- Mars (H)
- Juin (M)
- Septembre (U)
- Décembre (Z)

Des contrats sont généralement ouverts pour l'année en cours et sur les années suivantes en fonction de la demande des intervenants. Lorsqu'un contrat arrive à échéance, un autre est ouvert (on parle de cycle des contrats).

Les contrats Futures sont négociés en prix et non en taux.

Pour des raisons de simplicité[1], le prix d'un contrat Futures court terme est (par construction) égal à 100 moins le taux Futures (implicite).

$$P_{FUT} = 100 - R_{FUT}$$

La valeur de l'échelon minimal de cotation (tick value) est constante et identique à la hausse (+ 1 tick) et à la baisse (-1 tick). Le prix d'un contrat Futures, et donc le taux Futures implicite, est un multiple de la tick value du contrat.

Plus précisément, la valeur d'un tick s'écrit :

$$Tick\,Value\,(Euros) = N\ \ (Euros) \times Tick\ \ (\%) \times f\,(fraction\,d'année)$$

Cette valeur correspond au gain latent (resp. perte latente) réalisé par une position longue (resp. short) d'1 contrat lorsque le prix du contrat Futures augmente d'un tick.

Les intervenants[2] sur un contrat Futures CT peuvent être acheteurs (long) ou vendeurs (short) :

1. L'acheteur d'un contrat Futures voit sa position se valoriser lorsque le prix du contrat monte, donc lorsque le taux Futures implicite du contrat baisse. L'acheteur d'un contrat future cherche donc implicitement à se couvrir contre une baisse du taux à terme (il est donc implicitement prêteur à terme)
2. Le vendeur d'un contrat Futures voit sa position se valoriser lorsque le prix du contrat baisse, donc lorsque le taux Futures implicite du contrat monte. Le vendeur d'un contrat future cherche donc implicitement à se couvrir contre une hausse du taux à terme (il est donc implicitement emprunteur à terme)

1. Certains auteurs justifient la linéarité du prix d'un contrat Futures CT par rapport au taux Futures en considérant que le P/E sous-jacent au contrat est à intérêts pré-comptés. Bien que séduisante sur le plan formel, cette analyse se heurte néanmoins à une réalité qui veut que les indices de références des contrats futures correspondent à des P/E à intérêts post-comptés

2. On distingue généralement trois types d'intervenants différents sur les marchés de Futures :
- Les « hedgeurs » qui prennent des positions de couvertures
- Les spéculateurs qui prennent des positions directionnelles
- Les arbitrageurs qui prennent des positions de spreads inter-contrats

Ces trois types d'intervenants contribuent à la liquidité du marché (profondeur et fourchettes bid-ask) et plus généralement à son efficience (capacité à intégrer sans délai toutes les informations pertinentes disponibles) de sorte que les taux qui s'y forment sont en général « directeurs » pour (au moins) la partie court terme de la courbe des taux interbancaires

Les contrats Futures CT sont négociés sur des marchés organisés qui s'interposent entres les acheteurs et les vendeurs[3].

L'un des rôles essentiels du marché organisé consiste à garantir la sécurité du réglement des transactions en limitant l'impact d'un défaut (non systémique) via deux mécanismes principaux :

1. Les intervenants doivent déposer un dépôt de garantie calculé sur la base du nombre de contrats ouverts. Ce dépôt rémunéré au taux Euribor est neutre pour une banque de « première catégorie » qui peut le financer au même taux (à $\pm\varepsilon$ près)
2. Des appels de marges sont réalisés quotidiennement (après la clôture du marché) sur la base du cours de compensation (settlement price) du jour afin de limiter le risque de contrepartie sur les contrats en cours de vie. Ces contrats sont donc « réalisés » par le paiement d'appels de marges de la contrepartie « perdante » (Valo <0) vers la contrepartie gagnante (Valo >0) mais toujours par l'entremise du marché organisé

Considérons la situation à la date t d'une banque détentrice d'une position longue sur K contrats achetés en date t_0 et qui expirent en date t_1 :

$$t_0\ (date\ d'achat) < t\ (date\ de\ valorisation) < t_1\ (date\ de\ maturit\acute{e})$$

Si elle conserve ses contrats jusqu'à leur date d'échéance, elle devra faire face aux appels de marges suivants :

$$\begin{cases} K \times Tick\,Value \times \frac{P_{FUT,t_0} - P^{Fixing}_{FUT,t_0}}{Tick} & (en\ t_0) \\ K \times Tick\,Value \times \frac{P^{Fixing}_{FUT,t} - P^{Fixing}_{FUT,t-1}}{Tick} & (en\ t) \\ K \times Tick\,Value \times \frac{P^{Fixing}_{FUT,t_1} - P^{Fixing}_{FUT,t_1-1}}{Tick} & (en\ t_1) \end{cases}$$

Dans ces formules, tous les prix sont des prix de compensation (fixing) à l'exception de P_{FUT,t_0} qui est le prix auquel les contrats ont été acheté en date t_0.

Le montant total de ces appels de marges (hors financement) s'écrit :

$$Total = K \times Tick\,Value \times \frac{P_{FUT,t_1} - P_{FUT,t_0}}{Tick} \qquad (de\ t_0\ \grave{a}\ t_1)$$

Le mécanisme des appels de marge n'a pas d'impact sur la valorisation des positions (hors financement des appels de marges) mais permet simplement de transformer les plus-ou-moins values latentes constatées en fin de journée en plus-ou-moins values réalisées.

Cette situation est illustrée par le graphique 6.1 ci-dessous.

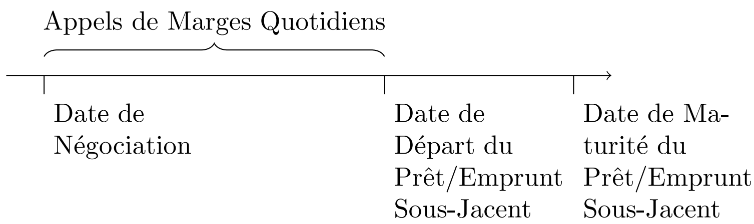

FIG. 6.1 – *Appels de Marges Quotidiens*

3. Il s'agit là d'une différence fondamentale avec les marchés OTC dans lesquels les transactions ont lieu directement (de gré-à-gré) entre acheteurs et vendeurs (même dans le cas où un tier entremetteur - courtier/broker - est partie prenante du deal)

Notons enfin que le cours de compensation (settlement price) est publié par le marché organisé en charge de la gestion du contrat Futures considéré chaque soir après la fermeture (clôture) du marché [4].

A l'échéance d'un contrat Futures CT (dernier jour de trading), il n'y a pas d'obligation de prêt ou d'emprunt [5]. Les intervenants qui ont conservés des positions ouvertes sur ce contrat payent ou reçoivent leurs derniers appels de marge calculés sur la base du nombre de contrats ouverts, du cours de conpensation de la veille et du dernier cours de compensation du contrat. Par construction, le dernier cours de compensation est égal à 100 moins le taux de référence du jour.

Dernier Cours de Compensation = 100 - Taux de Référence (Fixing) du Jour

Supposons que notre banque détentrice de K contrats Futures conserve ses contrats jusqu'à l'échéance en t_1.

A cette date, le cours de compensation est donc défini par :

$$P_{FUT,t_1} = 100 - R_{REF,t_1}$$

où R_{REF,t_1} est le taux de référence (fixing) du jour c'est-à-dire en t_1.

Le total des appels de marges sur la période peut être reformulé sous la forme suivante :

$$Total = N_K \times (R_{FUT,t_0} - R_{REF,t_1}) \times f \qquad avec \qquad N_K = K \times N_1$$

où R_{FUT,t_0} est le taux implicite du contrat en t_0.

Si la banque était prêteuse à terme sur une durée f pour un montant nominal N_K, cette opération lui garantie implicitement un taux de prêt R_{FUT,t_0} alors que le taux spot en t_1 est R_{REF,t_1}. La perte implicite (resp. le gain implicite) qu'elle constate en prêtant à R_{REF,t_1} au lieu de R_{FUT,t_0} lorsque R_{REF,t_1} est inférieur à R_{FUT,t_0} (resp. R_{REF,t_1} est supérieur à R_{FUT,t_0}) est « parfaitement » [6] compensée par le gain (resp. la perte) sur les contrats Futures.

Par contre, comme nous allons le voir dans le paragraphe qui suit, si les caractéristiques du P/E à terme dont on souhaite fixer le taux dés maintenant sont différentes des caractéristiques du P/E sous-jacent au contrat Futures alors la couverture n'est plus parfaite.

6.1.2 Analyse du Risque de Corrélation

Les contrats Futures CT sont des instruments financiers standardisés.

Cette standardisation introduit mécaniquement un risque de corrélation, lorsque le prêt ou l'emprunt (P/E) à terme dont on souhaite fixer le taux dés aujourd'hui a au moins l'une des deux propriétés suivantes :

1. La date de départ du P/E ne correspond pas à la date d'expiration du contrat Futures

4. Pour être précis, plusieurs « statistiques » sur la séance sont publiées chaque soir après la clôture du marché, à savoir :
   - Le cours d'ouverture (Open)
   - Le cours de fermeture (Close)
   - Le plus haut (High)
   - Le plus bas (Low)
   - Le cours de compensation (Fixing)

Le cours de compensation est aussi appelé fixing, il est calculé sur la base des cours des transactions réalisées peu avant la fermeture du marché

5. Les contrats Futures CT font (en général) l'objet d'un règlement en cash contrairement aux contrats Futures LT qui font (en général) l'objet d'une livraison physique du sous-jacent (cf. Chapitre 7)

6. Les deux flux sont identiques au signe près mais ont cependant des dates de valeur différentes

2. La maturité du P/E ne correspond pas à la maturité du sous-jacent du contrat Futures (3M)

Si c'est le cas la couverture n'est plus parfaite pour des raisons que nous allons maintenant exposer.

Considérons l'échéancier suivant :

- T_0 : Date de négociation
- T_1 : Date de départ du P/E
- T_2 : Date d'expiration du contrat Futures

Ces dates sont ordonnées comme suit :

$$\boxed{T_0 < T_1 < T_2}$$

Introduisons de plus les notations suivantes :

- $N_{P/E}$: Nominal du P/E
- N_{FUT} : Nominal de la position sur contrats Futures
- $f_{P/E}$: Fraction d'année du P/E
- f_{FUT} : Fraction d'année du sous-jacent du contrat Futures (3M)
- $\Delta R^{P/E}$: Variation du taux Forward sur le P/E entre T_0 et T_1
- ΔR^{FUT} : Variation du taux Futures sur le contrat entre T_0 et T_1

avec les précisions suivantes concernant les variations de taux[7] :

$$\triangle R^{P/E}_{T_0 \to T_1} = R^{P/E}_{T_0,T_1} - R^{P/E}_{T_1,T_1} \qquad et \qquad \triangle R^{FUT}_{T_0 \to T_1} = R^{FUT}_{T_0,T_2} - R^{FUT}_{T_1,T_2}$$

Les opérations réalisées en T_0 et en T_1 sont résumées dans le tableau 6.1 ci-dessous.

	T_0	T_1
P/E	rien	Prêt (ou emprunt) départ T_1 et maturité T_1+ $f_{P/E}$
Contrats Futures	Achat (ou vente) de contrats Futures d'échéance T_2	Revente (ou rachat) des contrats Futures

TAB. 6.1 – Couverture « imparfaite » d'un P/E par des Contrats Futures

Plaçons-nous maintenant à la date T_1 et regardons les « P/L » sur le P/E et les contrats Futures.

Le « manque à gagner sur le P/E » (valeur T_1+ $f_{P/E}$) s'écrit :

$$N_{P/E} \times \triangle R^{P/E}_{T_0 \to T_1} \times f_{P/E}$$

Le « gain ou la perte sur les Futures » (valeur T_1) s'écrit :

$$N_{FUT} \times \triangle R^{FUT}_{T_0 \to T_1} \times f_{FUT}$$

7. $R^k_{i,j}$ désigne le taux (Forward) calculé à la date i de date de départ j et de date de maturité j+f_k

Ayant posé le problème, il nous reste à déterminer le nombre de contrats Futures à acheter (resp. vendre) pour couvrir notre prêt (resp. emprunt) à terme[8].

Une première approche déterministe consiste à faire l'hypothèse que les variations de taux respectives sur le P/E et sur les contrats Futures sont identiques :

$$\triangle R_{T_0 \to T_1}^{P/E} \equiv \triangle R_{T_0 \to T_1}^{FUT} \; (\textit{hypothèse de couverture})$$

Dans ce cas, le montant nominal de la position de couverture sur les Futures est égal au montant nominal de la position à couvrir (P/E) ajusté du ratio des fractions d'années (hedge ratio) :

$$N_{FUT} = N_{P/E} \times \frac{f_{P/E}}{f_{FUT}}$$

On note que si la maturité du P/E à couvrir est égale à la maturité du sous-jacent du contrat futures, on retrouve le ratio de 1 utilisé au paragraphe précédent (couverture parfaite).

Une seconde approche non déterministe consiste à calculer le nombre de contrats Futures par minimisation de la variance du P/L de la position.

Le P/L de la position couverte s'écrit :

$$\triangle V \left(N_{FUT}\right) = N_{P/E} \times \triangle R_{T_0 \to T_1}^{P/E} \times f_{P/E} - N_{FUT} \times \triangle R_{T_0 \to T_1}^{FUT} \times f_{FUT}$$

Supposons que les variations de taux sont distribuées de la façon suivante[9] :

$$\triangle R_{T_0 \to T_1}^{P/E} \longmapsto \aleph \left(0,\sigma_{P/E}^2\right) \qquad et \qquad \triangle R_{T_0 \to T_1}^{FUT} \longmapsto \aleph \left(0,\sigma_{FUT}^2\right)$$

Le P/L de la position couverte est donc distribuée comme suit :

$$\triangle V \longmapsto \aleph \left(0,\sigma_{\triangle V}^2 \left[N_{FUT}\right]\right)$$

Le hedge ratio n'est autre que la valeur de $\mathrm{N_{FUT}}$ pour laquelle $\sigma_{\triangle V}^2 \left[N_{FUT}\right]$ est minimale, c'est-à-dire la valeur de $\mathrm{N_{FUT}}$ qui annule la dérivée première de $\sigma_{\triangle V}^2 \left[N_{FUT}\right]$ par rapport à $\mathrm{N_{FUT}}$.

On trouve :

$$N_{FUT} = N_{P/E} \times \rho_{P/E,FUT} \times \frac{\sigma_{P/E}}{\sigma_{FUT}} \times \frac{f_{P/E}}{f_{FUT}}$$

avec les notations supplémentaires :

- $\sigma_{\mathrm{P/E}}$: Ecart-type de $\Delta \mathrm{R}^{\mathrm{P/E}}$
- σ_{FUT} : Ecart-type de $\Delta \mathrm{R}^{FUT}$
- $\rho_{\mathrm{P/E,FUT}}$: Corrélation entre $\Delta \mathrm{R}^{\mathrm{P/E}}$ et $\Delta \mathrm{R}^{FUT}$

8. Dans la suite de ce paragraphe on raisonne en montant nominal et non en nombre de contrats mais le passage de l'un à l'autre est immédiat puisque le montant nominal d'une position de Futures CT n'est autre que le nombre de contrats fois le nominal d'1 contrat

9. $\aleph \left(0,\sigma^2\right)$ désigne la loi normale de moyenne nulle et de variance σ^2

En pratique, il peut être délicat d'estimer les paramètres précédents et il est de plus souvent « raisonnable » de postuler « a priori » que[10] :

$$\rho_{P/E,FUT} \backsimeq 1 \qquad et \qquad \sigma_{P/E} \backsimeq \sigma_{FUT}$$

en particulier lorsque les caractéristiques du P/E ne sont pas trop différentes des caractériques du sous-jacent du contrat Futures utilisé pour la couverture, de sorte que l'on retrouve le hedge ratio déterministe donné plus haut.

Il reste cependant un risque résiduel (risque de corrélation) lié au fait que si la variance est minimale, elle n'est cependant pas nulle.

L'expérience montre que les variations de taux sur la partie court terme de la courbe des taux interbancaires ont deux dynamiques indépendantes :

1. Les mouvements de taux liés aux « interventions » non anticipées de la banque centrale (actions concrètes ou déclarations d'intentions) qui peuvent s'analyser comme des chocs ponctuels uniformes (shift) et de « fortes » amplitudes
2. Les mouvements liés aux flux quotidiens des intervenants sur les marchés cash et dérivés en dehors de toute nouvelle sur la politique de la banque centrale qui peuvent s'analyser comme un « bruit » non uniforme (multi-factoriel) et de faible amplitude

Le risque que l'on va chercher à couvrir est clairement lié à la première composante de la dynamique des taux interbancaires. Or ce type de choc se répercute uniformément (au moins) sur la partie court terme de la courbe des taux de sorte que l'impact est sensiblement le même sur les deux taux (cf. notre analyse des variations du taux Forward/Futures en fonction des variations du taux spot du paragraphe 6.2.3).

6.1.3 Le Contrat Futures Euribor 3M (Liffe)

Le contrat Future Euribor 3 mois du Liffe (London International Futures Financial Exchange) a les caractéristiques suivantes[11] :

- Nominal : 1 Million (EUR)
- Durée de l'opération sous-jacente : 3 mois (90 jours sur 360)
- Taux de référence : Euribor 3M[12]
- Mode de cotation : 100 − taux à terme
- Echelon minimal de cotation : 0.005%
- Cycle des contrats : 2 mensuels + 20 trimestriels
- Dernier jours de trading : 3ème mercredi du mois − 2 jours ouvrés
- Tick Value : EUR 12.5

Par définition, la tick value est le montant d'intérêts non actualisé correspondant à une variation du taux Futures de 0.005% :

$$EUR\,12.5 = EUR\,1M \times 0.005\% \times \frac{90}{360}$$

10. Les deux raisons principales sont le manque de données historiques précises et exhaustives permettant d'estimer ces paramètres et les différences structurelles éventuelles entre la période d'estimation et la période d'application qui interdisent de les utiliser

11. Une description exhaustive du contrat « Three Month Euro (Euribor) Futures » est disponible sur le site web du Liffe

12. Rappelons (cf. Chapitre 2) que l'Euribor (EURopean InterBank Offered Rate) est l'indice des taux interbancaires libellés en Euros. C'est le taux moyen en Euro offert pour un dépôt à terme entre des banques de premières catégories ayant une activité significative sur le marché interbancaire en Euros. Il est publié par la Fédération des Banques Européennes (EBF) tout les jours à 11:00 am CET pour des taux valeur Spot (J+2)

Donnons un exemple concret pour fixer les idées[13]**.**

Le 08 Février 02 à 11H45 (date de négociation), une banque X achète 10 contrats M02 à 96.56. Il s'agit de l'achat d'un instrument hors bilan, cette opération ne génère donc pas de flux de trésorerie (hors paiement du dépôt de garantie qui est auto-financé). Notons que ce prix de 96.56 correspondant à un taux Futures implicite de 3.44% (100 - 96.56).

Le 08 Février 02 à 18H00, le cours de compensation du contrat M02 est 96.59. Comme le cours de compensation est supérieur au cours d'achat, la banque X va recevoir du Liffe des appels de marges pour un montant de 750 EUR.

$$EUR\,750 = 10\ (contrats) \times 6\ (ticks) \times 12.5\,(valeur\ d'1\,tick)$$

Plaçons-nous maintenant le 18 Juin 02 à 11H00 (dernier jour de trading) et donnons les informations supplémentaires suivantes :

- Fixing de l'Euribor 3 Mois: 3.17%
- Cours de compensation: 96.83 (100 - 3.17)
- Cours de compensation du 17 Juin 02 est 96.82

Les derniers appels de marges (toujours reçus par la banque X) sont donc de 250 EUR :

$$EUR\,250 = 10\ (contrats) \times 2\ (ticks) \times 12.5\,(valeur\ d'1\,tick)$$

Le total des appels de marges sur la période (hors financement) est de 6750 Euros, calculé comme suit :

$$EUR\,6750 = 10\ (contrats) \times 54\ (ticks) \times 12.5\,(valeur\ d'1\,tick)$$

Si la banque était prêteuse à terme sur 3M pour un montant de EUR10M, **cette opération lui garantie implicitement un taux de prêt de 3.44% alors que le taux spot du 18/06 est de 3.17%**. La moins value qu'elle va réaliser en prêtant à 3.17% au lieu de 3.44% est compensée par le gain sur les contrats Futures.

Il y a néanmoins une différence (dont nous allons largement reparler dans le suite de ce chapitre) entre le gain réalisé sur les contrats Futures et le flux d'intérêt sur le prêt :

- Le gain sur les contrats Futures est perçu en date de départ du prêt
- Le flux d'intérêt sur le prêt est reçu en date de maturité du prêt

La couverture du prêt n'est donc exacte qu'à un facteur d'actualisation près.

Ainsi, la valeur actuelle (valeur 18/06) du différentiel d'intérêts (manque à gagner) sur le prêt (perçu 3M plus tard) est de EUR 6697.93 :

$$6697.93 = \frac{EUR10M \times (3.44\% - 3.17\%) \times 0.25}{(1 + 3.17\% \times 0.25)}$$

La couverture est donc dans ce cas « gagnante » de EUR 52.07 soit moins de 1% du manque à gagner total.

Notons que le processus de fixing du contrat Futures le dernier jour de trading du contrat diffère des autres jours :

- Lors d'une journée de trading normale, le cours du fixing reflète les anticipations des participants au marché sur ce que sera le taux de l'indice Euribor 3M en date du 18 Juin 02

13. Les données de marchés utilisées dans cet exemple numérique sont fictives

– Lors du dernier jours de trading, le cours du fixing est défini contractuellement par le taux du fixing Euribor 3M du jour

Cette différence a une incidence pour la couverture de prêts/emprunts à terme sur des dates de départ du prêt/emprunt ne correspondants pas aux dates d'expiration des contrats Futures disponibles sur le marché comme nous l'avons vu au paragraphe 6.1.2.

Supposons que la position du 8 Février 02 serve à couvrir un prêt à terme (de maturité 3M) départ le 15 Mai 02 et non le 18 Juin 02. On donne les informations supplémentaires suivantes :

- Taux Forward Euribor 3M départ 15 Mai 02 calculé le 8 Février 02 : 3.50%
- Cours du contrat M02 le 15 Mai 02 à 9H00 : 96.75
- Fixing Euribor 3M du 15 Mai 02 : 3.28%

Dans ce cas, la banque devra le 15 Mai 02 réaliser les deux opérations suivantes à 9H00 :

1. Revendre ses 10 contrats Futures M02 à 96.75
2. Prêter EUR 10M à un taux que l'on suppose ègal à l'Euribor du jour : 3.28%

On constate donc que le gain de EUR 4750 sur les contrats Futures CT :

$$EUR\,4750 = 10\ (contrats) \times 38\ (ticks) \times 12.5\,(valeur\ d'1\,tick)$$

ne compense pas complètement le manque à gagner de sur les intérêts du prêt :

$$EUR\,5500 = EUR10M \times (3.50\% - 3.28\%) \times 0.25$$

même en actualisant le différentiel d'intérêts au 18 Mai 02.

Cet exemple illustre le risque de (dé-)corrélation qui se traduit ici par des taux :

- Futures 3M/départ 18/06
- Forward 3M/départ 15/05

qui n'évoluent pas de façon parfaitement homogène sur la période de couverture (baisse de 19bp pour le taux Futures implicite pour une baisse de 22bp pour le taux Forward entre le 08/02 et le 15/05).

6.2 Arbitrage Contrat Futures CT vs FRAs

Les contrats Futures CT et les FRAs ont de nombreux points communs mais aussi certaines différences qui seront décrites au paragraphe 6.2.1 au cours duquel nous montrerons aussi que ces deux instruments sont complémentaires et interdépendants d'un point de vue économique. Nous calculerons ensuite (paragraphe 6.2.2) le hedge ratio à appliquer pour couvrir une position de FRAs par des contrats Futures lorsque les deux contrats ont le même sous-jacent. Le dernier paragraphe (6.2.3) de cette section nous permettra d'analyser le P/L intraday de notre position d'arbitrage dans le cadre d'un déplacement parallèle de la courbe des taux (Euribor) et de mettre en évidence l'existence d'une prime de convexité entre le taux Futures et le taux Forward (équivalents).

6.2.1 Comparatif Contrat Futures CT vs FRAs

Les contrats de FRAs étudiés au Chapitre 2 et les contrats Futures CT sont des instruments semblables sur bien des aspects qui présentent néanmoins certaines différences dont une fondamentale liée au calcul des market values.

Ces deux types de contrats ont évidemment des similarités importantes sans lesquelles ni comparaison ni arbitrage ne seraient possibles :

- Garantie : taux de prêt ou d'emprunt garanti à terme
- Sous-Jacent : Prêt/Emprunt à CT
- Réglement : En cash, pas d'obligation de prêt ou d'emprunt à l'échéance
- Hors Bilan : Pas d'échange de flux en capital - Seuls les différentiels de flux d'intérêts sont échangés
- Indice de Référence : Euribor

Les principales différences sont données dans le tableau 6.2 mais la plus importante pour notre propos à venir est liée au calcul des market values.

	Futures CT	FRAs
Convention	L'achat d'un contrat Futures CT permet de se garantir un taux de prêt	L'achat d'un contrat de FRA permet de se garantir un taux d'emprunt
Standardisation	Les contrats Futures sont standardisés et négociables sur un marché organisé qui s'interpose entre acheteurs et vendeurs	Les contrats de FRA ne sont pas standardisés et sont négociables sur un marché de gré-à-gré (OTC)
Cash Settlement	Quotidien pour un contrat Futures CT (appels de marges)	Versés en totalité à l'échéance du contrat pour un FRA
Market Value	La market value d'un contrat Futures CT est linéaire	La market value d'un contrat de FRA est convexe

Tab. 6.2 – Contrats Futures CT vs FRAs : Différences

Avant de rentrer l'analyse purement financière des liens entre FRAs et contrats Futures CT donnons quelques éléments complémentaires d'analyse (économique) des marchés des FRAs et des Futures CT.

Le marché des FRAs et celui des contrats Futures CT sont des marchés complémentaires et interdépendants :

- Ils sont complémentaires car destinés à des acteurs différents en terme de surface et/ou d'activité . Les contrats Futures CT sont principalement utilisés par des acteurs financiers qui ont une taille (banques commerciales) ou une activité (hedge funds) significative tandis que les FRAs sont principalement utilisés par des acteurs non financiers (entreprises industrielles et commerciales) qui trouvent dans ces produits des réponses simples et adaptées à leurs besoins précis de couvertures du risque de taux

- Ils sont interdépendants car les banques commerciales utilisent les marchés de contrats Futures CT comme la « matière première » pour la création des produits OTC plus adaptés aux besoins des entreprises que sont les FRAs. D'une part, les engagements financiers (dépot de garantie et appels de marge) n'ont pas d'impact pour une banque commerciale de première catégorie se refinançant à un taux proche de l'Euribor. D'autre part, la liquidité intrinsèque aux marchés Futures (liée en partie à la standardisation des contrats) rend la « matière première » abondante (profondeur du marché) et « bon marché » (fourchettes bid-ask très étroites)

Comme illustré par le graphique 6.2 ci-dessous, les banques commerciales utilisent donc les contrats Futures CT pour pricer les structures de FRAs correspondants aux demandes de leurs clients corporates.

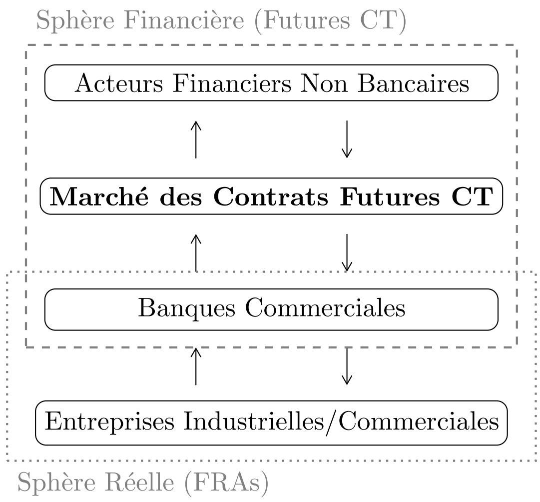

FIG. 6.2 – *Rôle Economique du Marché des Contrats Futures CT*

Dans cette perspective, la présence d'acteurs financiers non bancaires intervenants pour compte propre ou pour compte de tiers (spéculation et arbitrage) est essentielle pour la liquidité du marché des contrats Futures CT et donc in fine pour permettre aux entreprises industrielles et commerciales de se couvrir à moindre coût contre le risque de taux CT (FRAs).

Dans le processus de pricing des FRAs via les contrats Futures CT, les banques assument :

- Le risque de corrélation (mismatch)
- Le risque de convexité (volatilité)

et refacturent les « primes de risques » correspondantes à leurs clients via les marges qu'elles prennent sur les cotations de FRAs (spread bid-ask).

$$\boxed{\text{Marges FRA} = \text{Primes de Risques} + \text{Coûts de la Structure} + \text{Rémunération du Capital}}$$

Dans la suite de cette section, nous allons nous intéresser à l'arbitrage entre un FRA et un contrat Futures CT de mêmes caractéristiques (calcul du hedge ratio et analyse du P/L intraday de la position).

6.2.2 Calcul du Hedge Ratio

Etant donné une position prêteuse de FRAs, combien de contrats Futures CT (équivalents) faut-il vendre pour couvrir notre position de FRA ? Pour répondre à cette question[14] calculons les market values d'un contrat Futures CT et d'une position de FRA (équivalente) à une date T quelconque comprise entre la date de négociation T_{NEGO} et la date d'échéance des deux contrats T_1.

$$\boxed{T_{NEGO} < T = 0 < T_1 < T_2 = T_1 + 3M}$$

On suppose que le FRA et le contrat Futures de couverture ont le même sous-jacent à savoir un P/E (à terme) de maturité 3M et de date départ T_1 (date d'échéance du FRA et du contrat Futures CT) et ont bien sûr le même indice de référence (Euribor 3M).

Si l'on néglige le financement des appels de marges quotidiens[15] la **market value d'une position sur contrat Futures** avant l'échéance du contrat ($T < T_1$) pour un contrat négocié précédemment ($T_{NEGO} < T$) résulte alors directement de la définition du contrat donnée à la section 6.1 :

$$\begin{aligned} MV_{FUT} &= \frac{\left(P_{T_0}^{FUT} - P_{T_{NEGO}}^{FUT}\right) \times N}{100} \times \frac{90}{360} \\ &= \left(R_{T_{NEGO}}^{FUT} - R_{T_0}^{FUT}\right) \times N \times \frac{90}{360} \\ &= -\triangle R^{FUT} \times N \times \frac{90}{360} \end{aligned}$$

On constate que la market value MV_{FUT} est bien linéaire par rapport au cours de compensation du contrat Futures en T et donc par rapport au taux Futures implicite dans ce cours de compensation (puisque par définition le taux Futures implicite est égal à 100 moins le cours du Futures). Cette situation est décrite par le graphique 6.3 ci-dessous.

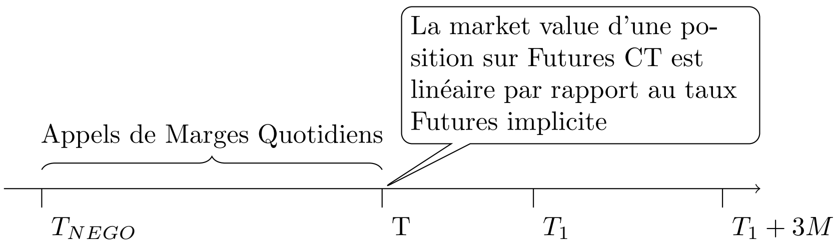

FIG. 6.3 – *Market Value d'une Position sur Futures CT*

La **market value de la position de FRA** (équivalente) a été donnée au Chapitre 2, elle consiste à actualiser le cash settlement de T_1 (date d'échéance) à T (date de valorisation) :

$$\begin{aligned} MV_{FRA} &= \left(R_{T_{NEGO}}^{FRA} - R_T^{FRA}\right) \times N \times \frac{90}{360} \times \frac{1}{(1 + Z_{T_1+3M})^{f_{T_1+3M}}} \\ &= -\triangle R^{FRA} \times N \times \frac{90}{360} \times \frac{1}{(1 + Z_{T_1+3M})^{f_{T_1+3M}}} \end{aligned}$$

Z_{T_1+3M} est le taux Euribor spot (valeur T) de date de maturité T_1+3M.

14. Cf. Kawaller I.G. (1994), « Comparing Eurodollar Strips to Interest Rate Swaps », The Journal of Derivatives (67) et Hoskins B. (1995), « A Question of Bias », Risk Magazine (Vol. 8, N° 3, March 1995)

15. On rappelle que le financement des appels de marge représente la somme capitalisées des intérêts quotidiens payés et/ou reçus entre la date de négociation et la date d'échéance du contrat et calculés chaque jour sur la base du solde net d'appels de marges

Rappelons que, contrairement aux contrats Futures CT qui font l'objet d'une « réalisation » au jour-le-jour des plus-ou-moins values latentes, le réglement d'une position de FRA est réalisé à l'échéance du contrat de FRA (cash settlement). La market value d'un contrat en cours de vie est donc bien obtenue par actualisation du cash settlement « anticipé » de la date d'échéance T_1 à la date de valorisation T (cf. Graphique 6.4).

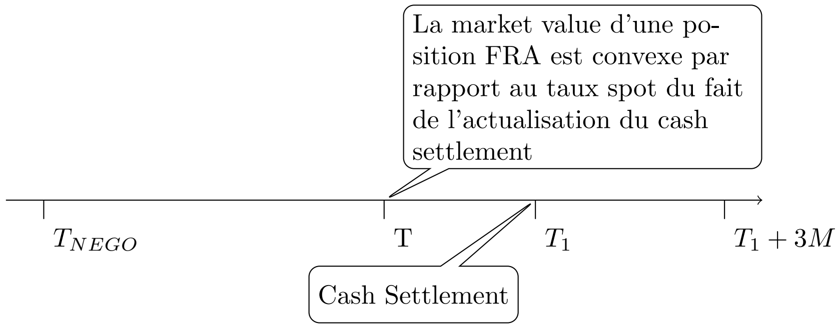

Fig. 6.4 – *Market Value d'une Position de FRA*

Notre **scénario de couverture** consiste à supposer que les variations du taux Futures et les variations du taux forward sont identiques, à savoir :

$$\boxed{\triangle R^{FRA} \equiv \triangle R^{FUT} \qquad (\textit{scénario de couverture})}$$

Sous cette hypothèse, on peut alors écrire :

$$MV_{FRA} = \frac{MV_{FUT}}{(1 + Z_{T_1+3M})^{f_{T_1+3M}}}$$

Cette dernière formule va nous permettre de calculer le hedge ratio à appliquer pour couvrir une position sur contrats de FRA par une position sur contrats Futures CT. Le Tableau 6.3 ci-dessous donne les sensibilités respectives d'1 contrat Futures CT (Nominal 1 MEUR) et d'une position de FRA équivalente pour une variation de 1bp des taux Futures et forward[16].

1MEUR	1 Contrat Futures CT	Position de FRA Equivalente
Sensibilité	25 EUR/bp	$\frac{25}{(1+Z_{T_1+3M})^{f_{T_1+3M}}}\ EUR/bp$

Tab. 6.3 – Calcul des Sensibilités

Le nombre de contrats Futures CT nécessaires pour couvrir une position de FRAs de EUR 1M en nominal est donc :

$$\boxed{\delta_{hedge} = \frac{1}{(1 + Z_{T_1+3M})^{f_{T_1+3M}}}}$$

Sur la base du hedge ratio δ_{hedge} calculé précédemment on peut donc construire l'arbitrage suivant[17] :

– Vend FRA 3M pour un nominal N_{FRA} à un taux forward R_{FRA}

16. $1\ MEUR \times \frac{90}{360} \times 1\ bp = 10^6 \times 25 \times 10^{-2} \times 10^{-4} = 25\ EUR/bp$

17. On rappelle que les conventions sont inversées sur ces deux marchés en conséquence être vendeur de FRAs revient à être prêteur implicite à terme tandis qu'être vendeur de contrats Futures CT revient à être emprunteur implicite à terme

– Vend $\delta_{hedge} \times N_{FRA}$ Futures CT à un prix P_{FUT} (P_{FUT} = 1 - R_{FUT})

On rappelle que le FRA et le contrat Futures CT ont le même P/E sous-jacent (date de départ T_1 et date de maturité de T_1+3M).

On constate donc que pour couvrir une position de FRAs de nominal N_{FRA} (en MEUR), il ne faut pas N_{FRA} contrats Futures CT (comme on pourrait le penser a priori) mais un nombre sensiblement moindre et qui (toutes choses égales par ailleurs) tend à décroître lorsque l'échéance des deux contrats T_1 est plus lointaine.

6.2.3 Analyse du P/L Intraday de la Position

Par construction, la position décrite au paragraphe 6.2.2 est parfaitement couverte contre une variation du taux Forward/Futures en considérant le taux zéro-coupon spot de maturité T_1+3M constant. En effet :

$$MV_{TOTAL} = MV_{FRA} - MV_{FUT}$$

soit :

$$MV_{TOTAL} = -\delta_{T+\triangle T} \times N_{FRA} \times \frac{90}{360} \times \triangle R_{FRA} + \delta_{Hedge} \times N_{FRA} \times \frac{90}{360} \times \triangle R_{FUT}$$

avec :

$$\delta_{T+\triangle T} = \frac{1}{(1 + Z_{T_1+3M} + \triangle Z_{T_1+3M})^{f_{T_1+3M}}}$$

Par conséquent, la market value de la position est nulle sous les deux hypothèses suivantes :

1. Les variations des taux Forwards sont identiques aux variations des taux Futures ($\Delta R_{FUT} = \Delta R_{FRA}$)
2. Le taux zéro-coupon spot de date de maturité T_1+3M reste constant ($\delta_{T+\triangle T} = \delta_{Hedge}$) et $0 < \Delta T < 1J$ (on raisonne en intraday)

Cependant, faire l'hypothèse que le taux zéro-coupon spot de date de maturité T_1+3M est constant n'est évidemment pas réaliste. Non seulement, les taux zéro-coupon spot bougent mais, ils doivent de plus bouger en « cohérence » par rapport aux taux Forward/Futures, ce que nous allons vérifier dès maintenant.

Analysons les variations du taux Forward/Futures en fonction des variations du taux Spot.

Regardons la variation du taux Forward/Futures R_{T_1,T_1+3M} lorsque la courbe des taux zéro-coupons spot dépend du seul 1er facteur (Shift - facteur de déplacement uniforme de la courbe des taux zéro-coupon qui explique la part la plus importante de la variance totale – cf. Chapitre 1).

Par définition du taux forward, on a :

$$\underbrace{(1 + Z_{T_1+3M})^{f_{T_1+3M}}}_{\alpha} = \underbrace{(1 + Z_{T_1})^{f_{T_1}}}_{\beta} \times \underbrace{(1 + R_{T_1,T_1+3M})^{f_{3M}}}_{\gamma}$$

Différentions cette expression :

$$d\alpha = \beta \times d\gamma + \gamma \times d\beta$$

Calculons dα, β×dγ et γ×dβ séparément.

Pour dα :

$$\begin{aligned} d\alpha &= (1+Z_{T_1+3M})^{f_{T_1+3M}} \times \frac{f_{T_1+3M}}{(1+Z_{T_1+3M})} \times dZ_{T_1+3M} \\ &= (1+Z_{T_1+3M})^{f_{T_1+3M}} \times D^{mod}_{T_1+3M} \times dZ_{T_1+3M} \end{aligned}$$

Pour β×dγ :

$$\begin{aligned} \beta \times d\gamma &= (1+Z_{T_1})^{f_{T_1}} \times \frac{f_{3M}}{(1+R_{T_1,T_1+3M})} \times (1+R_{T_1,T_1+3M})^{f_{3M}} \times dR_{T_1,T_1+3M} \\ &= (1+Z_{T_1})^{f_{T_1}} \times (1+R_{T_1,T_1+3M})^{f_{3M}} \times D^{mod}_{T_1,T_1+3M} \times dR_{T_1,T_1+3M} \\ &= (1+Z_{T_1+3M})^{T_1+3M} \times D^{mod}_{T_1,T_1+3M} \times dR_{T_1,T_1+3M} \end{aligned}$$

Pour γ×dβ :

$$\begin{aligned} \gamma \times d\beta &= (1+R_{T_1,T_1+3M})^{f_{3M}} \times \frac{f_{T_1}}{(1+Z_{T_1})} \times (1+Z_{T_1})^{f_{T_1}} \times dZ_{T_1} \\ &= (1+Z_{T_1})^{f_{T_1}} \times (1+R_{T_1,T_1+3M})^{f_{3M}} \times D^{mod}_{T_1} \times dZ_{T_1} \\ &= (1+Z_{T_1+3M})^{T_1+3M} \times D^{mod}_{T_1} \times dZ_{T_1} \end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$\triangle R_{T_1,T_1+3M} = \left[\frac{D^{mod}_{T_1+3M} - D^{mod}_{T_1}}{D^{mod}_{T_1,T_1+3M}}\right] \times \triangle Z_{T_1+3M} = (1 \pm \epsilon) \times \triangle Z_{T_1+3M}$$

Les taux Forwards/Futures varient donc exactement comme les taux zéro-coupon spots si la courbe des taux est plate ($\varepsilon = 0$) et dans le même sens et du même ordre de grandeur que les taux zéro-coupon spots si la courbe des taux n'est pas plate ($0 < |\varepsilon| << 1$).

Calculons le P/L de notre position en fonction du taux $\mathbf{Z_{T_1+3M}}$.

Reprenons la formule du P/L de notre position d'arbitrage et comparons les P/L des deux composantes en fonction du signe de $\triangle Z_{T_1+3M}$, on obtient :

$$\begin{cases} \triangle Z_{T_1+3M} < 0 & \Rightarrow \delta_{Hedge} < \delta_{T+\triangle T} \; et \; \triangle R_{T_1,T_1+3M} < 0 \\ \triangle Z_{T_1+3M} > 0 & \Rightarrow \delta_{Hedge} > \delta_{T+\triangle T} \; et \; \triangle R_{T_1,T_1+3M} > 0 \end{cases}$$

Dans les deux cas, on vérifie bien que :

$$\boxed{P/L_{FRA} > P/L_{FUT} \qquad \forall \, \triangle Z_{T_1+3M}}$$

Le P/L du FRA sur-performe donc celui du Futures à la hausse et à la baisse des taux en raison de la convexité de la market value du FRA (cf. Graphique 6.5).

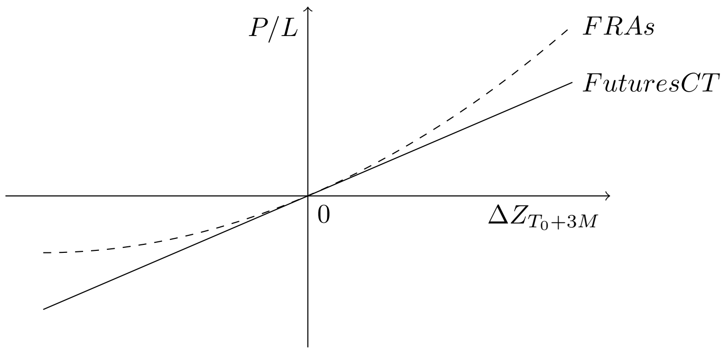

FIG. 6.5 – *P/L FRAs vs P/L Futures CT*

Au total, le P/L de la position d'arbitrage est positif à la hausse comme à la baisse des taux et nulle pour $\triangle Z_{T_1+3M} = 0$.

$$MV_{TOTAL} = \frac{90}{360} \times N_{FRA} \times [\delta_{T+\triangle T} - \delta_{Hedge}] \times \triangle R_{T_1,T_1+3M} \geq 0$$

Un contrat Futures CT a un désavantage significatif par rapport à un contrat de FRA équivalent, l'absence de convexité. Une telle situation est incompatible avec l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). Toutes choses égales par ailleurs, les contrats Futures doivent donc se négocier (en terme de prix et donc de taux Futures implicites) avec une décôte par rapport à leur équivalents FRA (en terme de taux de FRA, donc de taux Forward en vertu de l'arbitrage « FRA vs Forward-Forward » présenté au Chapitre 2). Par conséquent, **un taux Futures doit être plus élevé que le taux Forward équivalent pour rétablir l'AOA**. La différence entre les deux taux est appelée « prime ou spread de convexité ».

On peut donc écrire :

$$\boxed{R^{3M}_{FUT} = R^{3M}_{FRA} + \theta_{CVX} \qquad avec \qquad \theta_{CVX} \geq 0}$$

Dans la section suivante, nous allons étudier ce biais de convexité d'un point de vue qualitatif (dynamique et facteurs explicatifs) et quantitatif (pricing heuristique et empirique).

6.3 Biais de Convexité

Nous avons à la section 6.2 démontré l'existence d'un biais de convexité entre le taux Forward et le taux Futures (équivalent) lié à l'absence de convexité de la market value d'un contrat Futures CT comparée à celle d'un FRA (équivalent). Dans cette dernière section, nous allons analyser ce biais de convexité d'un point de vue qualitatif de façon à identifier ses facteurs explicatifs. Nous montrerons ensuite comment pricer (empiriquement) ce biais de convexité via une heuristique de calcul couramment utilisée sur les marchés puis via une position optionnelle (straddle) sur le marché des options sur contrats Futures CT. Enfin, nous terminerons par expliquer comment utiliser les contrats Futures CT pour pricer des swaps de taux LT.

6.3.1 Analyse du Biais de Convexité

L'Arbitrage FRA vs Futures CT décrit à la section précédente a les propriétés suivantes :

- La position a une valeur nulle en T_{NEGO} (date de négociation)

– $E(P/L_{T,T+\Delta T}) \geq 0$ sur $[T, T+\Delta T]$

Pour rétablir une situation de non arbitrage (AOA), il est donc nécessaire que le taux Futures soit supérieur au taux Forward (FRA).

La différence entre les deux taux est le spread de convexité :

$$R_{FUT}^{3M} = R_{FRA}^{3M} + \theta_{CVX}$$

Nous allons montrer que le spread de convexité θ_{CVX} est d'autant plus grand que :

1. La date d'échéance des contrats T_1 est éloignée
2. La volatilité des variations des taux zéro-coupon spots est grande

Par ailleurs, à l'échéance des contrats T_1 le spread de convexité est nul du fait de la convergence des taux Forward et Futures vers le taux spot :

$$R_{FRA} = R_{FUT} = R_{SPOT} \qquad (\grave{a}\ l'\acute{e}ch\acute{e}ance)$$

Ces propriétés sont illustrées par le graphique 6.6 ci-dessous.

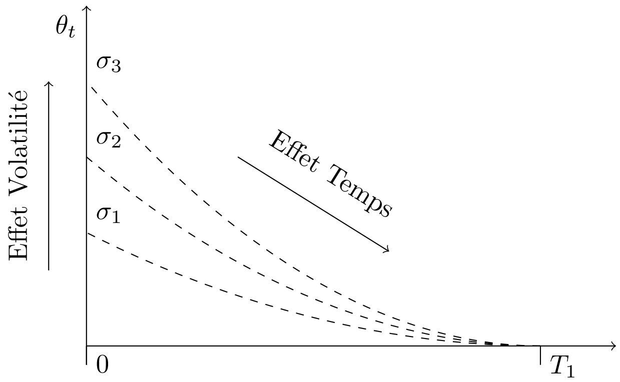

FIG. 6.6 – *Prime de Convexité : Effets Temps & Volatilité*

Calculons la variation du P/L de la position globale $\Delta P/L_{T,T+\Delta T}$ sur la période $[T,T+\Delta T]$ ($\Delta T > 0$ et ΔT petit).

On a :

$$\triangle P/L_{TOTAL} = 1M \times \frac{90}{360} \times \left(\underbrace{\delta_{T,T+\triangle T} \times \triangle R_{T,T+\triangle T}^{FRA}}_{\alpha} - \underbrace{\delta_{Hedge} \times \triangle R_{T,T+\triangle T}^{FUT}}_{\beta} \right)$$

<u>Calculons α et β séparemment.</u>

Pour α, remplaçons $\delta_{T,T+\Delta T}$ par son développement limité au deuxième ordre et ΔR_{FRA} par son approximation $(1+\varepsilon)\times\Delta Z$:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \delta_{T,T+\triangle T} \times \triangle R_{T,T+\triangle T}^{FRA} \\
&\simeq \left[\delta_{Hedge} + S_T \times \triangle Z_{T,T+\triangle T}^{T_1+3M} + \Gamma_T \times \left(\triangle Z_{T,T+\triangle T}^{T_1+3M}\right)^2\right] \times \triangle R_{T,T+\triangle T}^{FRA} \\
&\simeq \delta_{Hedge} \times \triangle R_{T,T+\triangle T}^{FRA} + \left[S_T \times \left(\triangle Z_{T,T+\triangle T}^{T_1+3M}\right)^2 + \Gamma_T \times \left(\triangle Z_{T,T+\triangle T}^{T_1+3M}\right)^3\right] \times (1 \pm \epsilon)
\end{aligned}$$

Pour β, remplaçons le taux Futures par le taux Forward plus le spread de convexité :

$$\begin{aligned}\beta &= \delta_{Hedge} \times \triangle R^{FUT}_{T,T+\triangle T} \\ &= \delta_{Hedge} \times \triangle \left[R^{FRA}_{T,T+\triangle T} + \theta_{T,T+\triangle T}\right] \\ &= \delta_{Hedge} \times \triangle R^{FRA}_{T,T+\triangle T} + \delta_{Hedge} \times \triangle \theta_{T,T+\triangle T}\end{aligned}$$

Au final on peut donc écrire :

$$\alpha - \beta \simeq \left[S_T \times \left(\triangle Z^{T_1+3M}_{T,T+\triangle T}\right)^2 + \Gamma_T \times \left(\triangle Z^{T_1+3M}_{T,T+\triangle T}\right)^3\right] \times (1 \pm \epsilon) - \delta_{Hedge} \times \triangle \theta_{T,T+\triangle T}$$

Si on impose de plus les hypothèses supplémentaires suivantes :

$$E\left[\triangle P/L_{TOTAL}\right] = 0 \ (AOA) \qquad et \qquad \triangle Z^{T_1+3M}_{T,T+\triangle T} \to \aleph\left(0, \sigma^2_{\triangle Z^{T_1+3M}_{T,T+\triangle T}}\right)$$

On trouve finalement :

$$\boxed{E\left[\triangle \theta_{T,T+\triangle T}\right] \simeq S_T \times \sigma^2_{\triangle Z^{T_1+3M}_{T,T+\triangle T}}}$$

avec :

- S_T : Sensibilité d'un ZC de maturité T_1+3M calculée en T
- $\sigma_{\triangle Z^{T_1+3M}_{T,T+\triangle T}}$: Volatilité sur l'intervalle [T,T+ΔT] du taux ZC de maturité T_1+3M

En extrapolant l'analyse intraday ci-dessus, on constate que la dynamique du biais de convexité dépend de deux facteurs principaux :

- Effet « temps » : Plus on se rapproche de l'échéance des contrats Futures plus les variations quotidiennes du biais de convexité sont faibles (T converge vers 0)
- Effet « volatilité » : Si il n'y avait pas de biais, l'espérance du P/L de notre stratégie serait une fonction croissante de la volatilité des variations du taux zéro-coupon donc la variation du biais de convexité est une fonction croissante de la volatilité (pour maintenir l'AOA)

Au final, notre position d'arbitrage « Futures CT vs FRA » a un profil de P/L similaire à une position optionnelle.

6.3.2 Pricing du Biais de Convexité

Nous allons présenter dans cette section deux approches que l'on peut qualifier d'empiriques pour estimer le biais de convexité :

- La première est une « heuristique » couramment utilisée par les professionnels qu'il est possible de retrouver formellement (au prix de quelques approximations) en prolongeant l'analyse faite au paragraphe 6.3.1
- La seconde consiste à remarquer que le profil de P/L de la position d'arbitrage FRA vs Futures CT est en première approximation équivalent au profil de P/L d'un straddle de sorte que la prime du straddle constitue un proxy de la prime de convexité

Ces deux approches sont détaillées ci-dessous.

6.3.2.1 Heuristique de Calcul du Biais de Convexité

Reprenons l'analyse faite au paragraphe 6.3.1 en raisonnant avec un pas de temps de ΔT de 1J et une volatilité des taux CT uniforme et constante dans le temps.

$$\triangle T = 1 \qquad et \qquad \sigma^2_{\triangle_{1D}Z} \equiv Cte$$

Plaçons-nous à une date t quelconque entre T=0 et T_1, on peut alors reécrire la formule obtenue au paragraphe 6.3.1 sous la forme suivante :

$$E\left[\triangle\theta_{t,t+1}\right] \simeq S_t \times \sigma^2_{\triangle_{1D}Z} \qquad avec \qquad 0 \leq t \leq T_1$$

Calculons la somme de cette expression de t=0 à t=T_1-1 :

$$\underbrace{\sum_{t=0}^{T_1-1} E\left[\triangle\theta_{t,t+1}\right]}_{\alpha} \simeq \underbrace{\sum_{t=0}^{T_1-1} S_t \times \sigma^2_{\triangle_{1D}Z}}_{\beta}$$

<u>Calculons α et β séparément.</u>

Pour α, en modifiant l'ordre de la sommation et en isolant θ_0 (la prime de convexité cherchée) ainsi que θ_{T_1} (qui est nul par construction), on a :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{t=0}^{T_1-1} E\left[\triangle\theta_{t,t+1}\right] \\
&= \sum_{t=0}^{T_1-1} E\left[\theta_{t+1} - \theta_t\right] \\
&= -\theta_0 + \underbrace{\sum_{t=1}^{T_1-1} E\left[\theta_t - \theta_t\right]}_{0} + \underbrace{E\left[\theta_{T_1-1}\right]}_{0} \\
&= -\theta_0
\end{aligned}$$

Pour β, en sortant $\sigma^2_{\triangle_{1D}Z}$ de la somme et en prenant la moyenne des sensibilités entre T=0 et T_1, on obtient :

$$\begin{aligned}
\beta &= \sum_{t=0}^{T_1-1} S_t \times \sigma^2_{\triangle_{1D}Z} \\
&= \left[\sum_{t=0}^{T_1-1} S_t\right] \times \sigma^2_{\triangle_{1D}Z} \\
&= T_1 \times \overline{S}_{T_0,T_1} \times \sigma^2_{\triangle_{1D}Z}
\end{aligned}$$

Au final, on a :

$$\boxed{\theta_0 \simeq -T_1 \times \overline{S}_{T_0,T_1} \times \sigma^2_{\triangle_{1D}Z} \qquad avec \qquad \overline{S}_{T_0,T_1} = \frac{1}{T_1} \times \sum_{t=0}^{T_1-1} S_t}$$

Notons qu'il est possible en ne « rechignant » pas sur les approximations de reécrire la formule précédente sous la forme usuelle suivante :

$$\theta_0 \simeq \frac{f_{T_1} \times f_{T_2} \times \sigma^2_{\triangle_{1Y}Z}}{2}$$

avec :

- $\sigma_{\triangle_{1Y}Z}$: Volatilité annualisée des variations des taux CT
- f_{T_1} : Durée entre T=0 et T_1 exprimée en années
- f_{T_2} : Durée entre T=0 et $T_2 = T_1 + 3M$ exprimée en années

Il s'agit d'une heuristique de calcul de la prime de convexité couramment utilisée sur les marchés [18] du fait de sa simplicité et de sa cohérence avec les propriétés du biais de convexité décrites au paragraphe 6.3.1.

6.3.2.2 Prime de Convexité = Prime d'un Straddle

Le profil de P/L de la position d'arbitrage FRA vs Futures CT est en première approximation équivalent au profil de P/L d'un straddle. Rappelons qu'un straddle est une position où l'on est simultanément long d'un Put et d'un Call de mêmes caractéristiques et en principe « à la monnaie » (ATM).

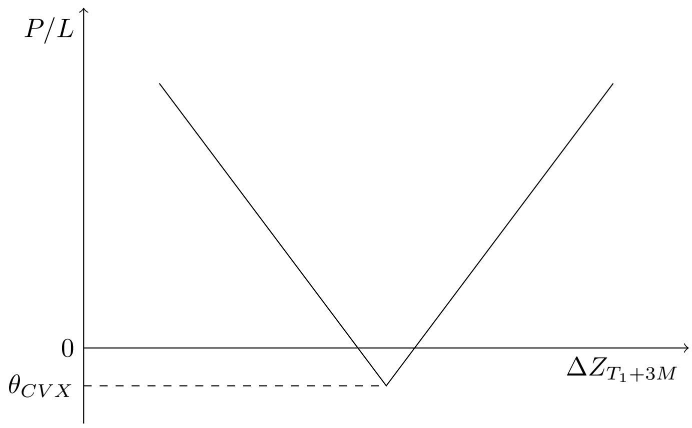

Fig. 6.7 – *Profil de Gain/Perte d'un Straddle à l'Echéance*

A priori, seul le marché des options sur FRA permet de monter ce type de position puisque les options sur FRAs peuvent être « pricées » par un market-maker pour n'importe quel niveau de strike. Cependant, il est préférable d'utiliser le marchés des options sur contrats Futures CT du fait des bonnes propriétés des prix de ces contrats (efficience et liquidité notamment). Dans ce cas, on construira un straddle « théorique » en ayant au préalable pricée un Put et un Call « à la monnaie » à l'aide des volatilités implicites des options négociables sur le marché au moment du pricing (dont il est peu probable qu'elles soient « à la monnaie »).

Comme le P/L de notre position d'arbitrage FRA vs Futures CT n'est pas parfaitement symétrique à la baisse et à la hausse des taux, nous allons nous donner deux scénarios de

18. Cette formule figure notamment dans la notice introductive au contrat Futures Euribor 3M du Chicago Mercantile Exchange qui est un contrat concurrent de celui de Liffe (cf. Frederick Sturm & Peter Barker, « Three-Month Euribor Futures: The Basics », CME Group, September 2011)

variation du taux zéro-coupon spot et calculer le P/L instantané ou intraday de la position dans les deux cas :

- Hausse du taux zéro-coupon spot de X bp : P/L^{+}
- Baisse du taux zéro-coupon spot de X bp : P/L^{-}

On suppose ensuite que notre straddle est constitué de N_{PUT} options de vente (Put) et N_{CALL} options d'achats (Call) sur contrats Futures CT (les deux options sont « à la monnaie »).

$$\left.\begin{array}{ll} Short & N_{FRA}\,FRA \\ Short & \delta_{Hedge} \times N_{FRA}\,FUT \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} Long & N_{CALL}\,FUT\ (ATM) \\ Long & N_{PUT}\,FUT\ (ATM) \end{array}\right.$$

On calcule ensuite le P/L de chacune des deux options pour les deux scénarios de variation du taux zéro-coupon spot décrits précédemment.

Taux ZC Spot	Put	Call
Hausse de X bp	P/L^{+}_{PUT}	P/L^{+}_{CALL}
Baisse de X bp	P/L^{-}_{PUT}	P/L^{-}_{CALL}

Tab. 6.4 – Calcul des Sensibilités du Put et du Call

Le hedge (N_{PUT}, N_{CALL}) de notre position d'arbitrage est ensuite obtenu en imposant que le P/L du straddle soit égal au P/L de notre position d'arbitrage et ce pour les deux scénarios de variation du taux zéro-coupon spot :

$$\left\{\begin{array}{ll} P/L^{+} & = N_{PUT} \times P/L^{+}_{PUT} + N_{CALL} \times P/L^{+}_{CALL} \\ P/L^{-} & = N_{PUT} \times P/L^{-}_{PUT} + N_{CALL} \times P/L^{-}_{CALL} \end{array}\right.$$

On en déduit N_{PUT} et N_{CALL} :

$$\left\{\begin{array}{ll} N_{CALL} & = \frac{P/L^{-}_{PUT} \times P/L^{+} - P/L^{+}_{PUT} \times P/L^{-}}{P/L^{-}_{PUT} \times P/L^{+}_{CALL} - P/L^{+}_{PUT} \times P/L^{-}_{CALL}} \\ N_{PUT} & = \frac{P/L^{-}_{CALL} \times P/L^{+} - P/L^{+}_{CALL} \times P/L^{-}}{P/L^{+}_{PUT} \times P/L^{-}_{CALL} - P/L^{-}_{PUT} \times P/L^{+}_{CALL}} \end{array}\right.$$

Le spread de convexité est finalement estimé à partir de la prime du straddle :

$$\boxed{\theta_{CVX} = N_{PUT} \times p_{PUT} + N_{CALL} \times p_{CALL}}$$

où p_{PUT} et p_{CALL} sont les primes unitaires des options d'achat et de vente sur contrats Futures CT pricées précédemment.

6.3.3 Application - Pricing des Swaps de Taux

Le pricing des swaps de taux a été expliqué à la section 2 du Chapitre 5.

Les techniques décrites permettent de pricer des structures de swaps non cotées à partir des taux de swap cotés (en fait à partir des courbes de taux zéro-coupon issues des courbes de taux swap « au pair »).

Mais comment pricer une structure de swap donnée sans utiliser les taux des swaps cotés ?

On pourrait a priori utiliser les taux de FRA qui sont homogènes à des taux de swap[19] et permettent en théorie de pricer toutes les structures de swaps. Cependant, le marché des FRA est, comme le marché des swaps, un marché de « gré-à-gré » qui n'offre aucune garantie de liquidité, d'unicité et d'accessibilité des taux de FRA et sur lequel les FRAs sont rarement cotés sur des échéances longues.

La solution consiste donc à utiliser les contrats Futures CT qui permettent de pricer toutes les structures de swaps. En général les marchés organisés (Futures) sont plus liquides que les marchés OTC (FRAs) et des contrats sont disponibles pour des échéances lointaines (cas des contrats Futures Eurodollar). Par contre les taux à terme implicites dans les prix des Futures devront être corrigés du biais de convexité pour reconstituer les taux forwards.

Sur un plan pratique, la procédure à suivre est la suivante.

Partons des prix des contrats Futures CT cotés sur les différentes échéances contiguës et calculons les taux Futures implicites correspondants par la formule générique :

$$R^{FUT}_{T_1+k\times 3M} = 100 - P^{FUT}_{T_1+k\times 3M}$$

T_1 est l'échéance du premier contrat (contrat « front »).

Le tableau 6.5 ci-dessous regroupe les données initiales nécessaires au calcul.

Echéance	T_1	T_1+3M	...	T_1+k×3M	...	T_1+K×3M
Prix	$P^{FUT}_{T_1}$	$P^{FUT}_{T_1+3M}$	...	$P^{FUT}_{T_1+k\times 3M}$	...	$P^{FUT}_{T_1+K\times 3M}$
Taux	$R^{FUT}_{T_1}$	$R^{FUT}_{T_1+3M}$	...	$R^{FUT}_{T_1+k\times 3M}$	...	$R^{FUT}_{T_1+K\times 3M}$

TAB. 6.5 – Prix et Taux Implicites des Contrats Futures par Echéance

L'étape suivante consiste à calculer les taux de FRA (Forward) à partir des taux Futures correspondants en corrigeant les taux Futures du biais de convexité. Pour simplifier, on considère une volatilité des taux CT uniforme sur toutes les maturités et on corrige les taux Futures via l'heuristique donnée au sous-paragraphe 6.3.2.1 :

$$R^{FRA}_{T_1+k\times 3M} = R^{FUT}_{T_1+k\times 3M} - \frac{f_{T_1+k\times 3M} \times f_{T_1+(k+1)\times 3M} \times \sigma^2_{\triangle_{1Y}Z}}{2}$$

Les taux de FRA sont regroupés dans le tableau 6.6 ci-dessous pour les périodes contiguës correspondants aux périodes des contrats Futures CT.

Echéance	T_1	T_1+3M	...	T_1+k×3M	...	T_1+K×3M
Taux	$R^{FRA}_{T_1}$	$R^{FRA}_{T_1+3M}$	...	$R^{FRA}_{T_1+k\times 3M}$	...	$R^{FRA}_{T_1+K\times 3M}$

TAB. 6.6 – Taux des Contrats de FRA Implicites

Le taux générique $R^{FRA}_{T_1+k\times 3M}$ est le taux Forward de date de départ T_1+k×3M et de date de maturité T_1+(k+1)×3M.

19. Même référence Euribor et même méthode de valorisation

La dernière étape consiste à transformer cette courbe des taux Forwards en une courbe des taux Spot en « empilant » les taux Forwards via la formule générique :

$$R_{T_k}^{SPOT} = \left[\left(1 + R_{T_1}^{SPOT}\right)^{f_{T_1}} \times \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 + R_{T_i,T_i+3M}^{FRA}\right)^{f_{3M}} \right]^{1/f_{T_k}} - 1$$

Le premier taux Spot $R_{T_1}^{SPOT}$ est donné par le taux Euribor de maturité T_1.

Au final, la courbe des taux ZC FRA/Swap Spot est donnée par le tableau 6.7 ci-dessous :

Echéance	T_1	T_1+3M	...	T_1+k×3M	...	T_1+K×3M
Taux	$R_{T_1}^{SPOT}$	$R_{T_1+3M}^{SPOT}$	...	$R_{T_1+k\times 3M}^{SPOT}$	...	$R_{T_1+K\times 3M}^{SPOT}$

TAB. 6.7 – Taux ZC FRA/Swap départ Spot

Chapitre 7

Contrats Futures LT vs Cash

L'objet de ce chapitre est de présenter les contrats Futures sur obligations d'Etat dont l'archétype est le Tbond Futures du CBOT (Chicago Board of Trade) crée en 1973. Parmi les contrats du même type, nous avons choisi le contrat Euro-Bund de l'Eurex qui est l'un des contrat Futures (tout types de sous-jacents confondus) le plus actif au monde. La relation cash-Futures est assez simple lorsque le sous-jacent théorique du contrat (obligation notionnelle) est livrable à l'échéance du contrat ou sert de référence pour un cash settlement. Il en va tout autrement pour les contrats Futures de type « Tbond Futures » en raison de la possibilité, pour le vendeur, de choisir, à l'échéance, les titres les « moins chers à livrer » dans un panier de titres livrables appelé gisement (obligations de l'Etat Allemand pour le contrat Euro-Bund) dont la règle contractuelle de mise en équivalence (facteur de concordance) n'est qu'approximative (règle de trois). Ce particularisme (historique) implique que le vendeur de contrats Futures est simultanément acheteur d'une option implicite de livraison. La compréhension de ces mécanismes et des techniques de pricing associées est indispensable à l'arbitragiste taux et au market-maker obligataire (trading de base) mais aussi au gérant obligataire (couverture du risque de taux).

7.1 Contrats Futures Long Terme

Nous allons, dans cette première section, décrire les contrats Futures LT de façon générale (7.1.1) et introduire les concepts propres à ce type de marchés. Contrairement aux contrats Futures CT, les contrats Futures LT donnent lieu à livraison physique du sous-jacent à l'échéance du contrat. Le paragraphe 7.1.2 nous permettra de décrire précisément ce mécanisme de livraison pour en comprendre à la fois les raisons (historiques) et les conséquences en terme de pricing. On détaillera enfin le contrat Futures Euro-Bund de l'Eurex (7.1.3) qui est le marché Futures de référence sur la partie LT de la courbe des taux Etats dans la zone Euro.

7.1.1 Généralités

Les contrats Futures LT sont des instruments financiers hors bilan négociés sur des marchés organisés. Un contrat Futures LT peut être interprété comme une garantie de prix (à terme) pour l'achat ou la vente d'obligations d'Etat pour un montant nominal et une date de livraison pré-déterminés et standardisés.

Les caractéristiques les plus importantes d'un contrat Futures LT sont :

1. Le montant nominal N_1 du sous-jacent (pour 1 contrat)

2. Les caractéristiques de l'obligation de référence (sous-jacent fictif du contrat)
3. Le gisement du contrat (titres obligataires livrables à l'échéance)
4. L'échelon minimal de cotation (tick)

Comme pour les contrats Futures CT, plusieurs contrats sont cotés simultanément qui portent sur le même sous-jacent fictif mais diffèrent par la date d'échéance[1].

Les contrats Futures LT sont négociés en prix. Ce prix n'est autre que le prix Futures pour lequel les intervenants sont prêts à acheter ou vendre l'obligation (fictive) de référence à la date d'échéance du contrat.

La valeur de l'échelon minimal de cotation (tick value) est constante et identique à la hausse (+ 1 tick) et à la baisse (-1 tick). Le prix d'un contrat Futures LT est un multiple de la tick value du contrat.

Plus précisément, la valeur d'un tick s'écrit :

$$Tick\,Value\,(Euros) = N_1\ \ (Euros) \times Tick\ \ (\%)$$

Cette valeur correspond au gain latent (resp. perte latente) réalisé par une position longue (resp. short) d'1 contrat lorsque le prix du contrat Futures LT augmente d'un tick.

Les intervenants[2] sur un contrat Futures LT peuvent être acheteurs (long) ou vendeurs (short) :

1. L'acheteur d'un contrat Futures LT voit sa position se valoriser lorsque le prix du contrat monte. L'acheteur d'un contrat Futures LT cherche donc implicitement à se couvrir contre une hausse du prix des obligations sous-jacentes ou, de façon équivalente, à une baisse des taux d'intérêt LT
2. Le vendeur d'un contrat Futures LT voit sa position se valoriser lorsque le prix du contrat baisse. L'acheteur d'un contrat Futures LT cherche donc implicitement à se couvrir contre une baisse du prix des obligations sous-jacentes ou, de façon équivalente, à une hausse des taux d'intérêt LT

Les contrats Futures LT, comme les contrats Futures CT, sont négociés sur des marchés organisés qui s'interposent entres les acheteurs et les vendeurs. Rappelons que l'un des rôles essentiels du marché organisé consiste à garantir la sécurité du réglement des transactions en limitant l'impact d'un défaut (non systémique) via deux mécanismes principaux, le dépôt de garantie et les appels de marges[3].

Considérons la situation à la date t d'une banque détentrice d'une position longue sur K contrats achetés en date t_0 et qui expirent en date t_1 :

$$t_0\ \ (date\ d'achat) < t\ \ (date\ de\ valorisation) < t_1\,(date\ de\ maturit\acute{e})$$

Si elle conserve ses contrats jusqu'à leur date d'échéance, elle devra faire face aux appels de marges suivants :

$$\begin{cases} K \times Tick\,Value \times \frac{P_{FUT,t_0} - P^{Fixing}_{FUT,t_0}}{Tick} & (en\ t_0) \\ K \times Tick\,Value \times \frac{P^{Fixing}_{FUT,t} - P^{Fixing}_{FUT,t-1}}{Tick} & (en\ t) \\ K \times Tick\,Value \times \frac{P^{Fixing}_{FUT,t_1} - P^{Fixing}_{FUT,t_1-1}}{Tick} & (en\ t_1) \end{cases}$$

1. Pour rappel, les mois d'échéances des contrats Futures LT sont standardisés et au nombre de quatre par an : Mars (H), Juin (M), Septembre (U) et Décembre (Z). Des contrats Futures LT sont généralement ouverts pour l'année en cours et sur les années suivantes en fonction de la demande des intervenants. Lorsqu'un contrat arrive à échéance, un autre est ouvert

2. La typologie des intervenants sur les marchés Futures est toujours la même quel que soit le sous-jacent du contrat (cf. Chapitre 6)

3. Ces deux mécanismes ont déjà été défini dans le cadre des contrats Futures CT (cf. Chapitre 6)

Dans ces formules, tous les prix sont des prix de compensation (fixing) à l'exception de P_{FUT,t_0} qui est le prix auquel les contrats ont été acheté en date t_0.

Le montant total de ces appels de marges (hors financement) s'écrit :

$$Total = K \times Tick\,Value \times \frac{P^{Fixing}_{FUT,t_1} - P_{FUT,t_0}}{Tick} \qquad (de\ t_0\ à\ t_1)$$

Le mécanisme des appels de marge n'a pas d'impact sur la valorisation des positions (hors financement des appels de marges) mais permet simplement de transformer les plus-ou-moins values latentes constatées en fin de journée en plus-ou-moins values réalisées.

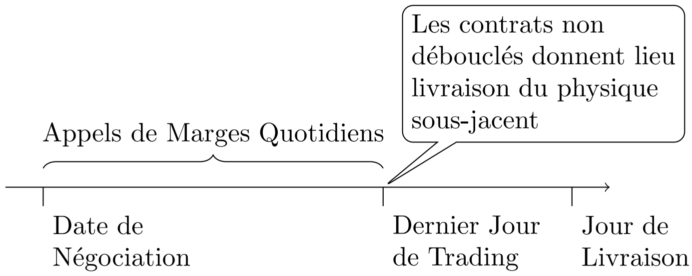

Fig. 7.1 – *Appels de Marge Quotidiens et Livraison du Sous-Jacent*

Notons enfin que le cours de compensation (settlement price) est publié par le marché organisé en charge de la gestion du contrat Futures considéré chaque soir après la fermeture (clôture) du marché[4].

A l'échéance d'un contrat Futures LT (dernier jour de trading), les contrats non débouclés dans le marché donnent lieu à une livraison « physique » du sous-jacent. Il s'agit d'une différence majeure par rapport aux contrats Futures CT dont le débouclement se fait uniquement via un dernier appel de marges sans obligation de prêt-emprunt[5].

7.1.2 Descriptif du Mécanisme de Livraison

Les contrats Futures LT (sur obligations d'Etat) donnent lieu à la livraison physique du « sous-jacent » (emprunts du gisement) des vendeurs vers les acheteurs. A l'échéance du contrat, le vendeur choisit le ou les titres à livrer dans le gisement (ou panier) du contrat qui défini précisément les titres livrables sur ce contrat. Les titres du gisement ayant des caractéristiques différentes (coupons et maturités résiduelles) de l'emprunt de référence, il est donc nécessaire de reconstituer des prix à terme (ou prix de livraison) pour chacun d'entre eux.

Le mécanisme de livraison des contrats Futures LT de type « Tbond Futures » permet de recréer des prix à termes pour les différents emprunts du gisement, il est entièrement défini par les deux concepts suivants :

- Prix de livraison
- Facteurs de concordance

4. Parmi d'autres statistiques complémentaires sur la séance (cf. Chapitre 6)

5. Le mécanisme de livraison « physique » sur les contrats Futures LT et le calcul du cours de compensation à partir du fixing Euribor lors du dernier jour de trading sur les contrats Futures CT jouent exactement le même rôle sur les deux types de contrats Futures à savoir garantir la convergence des « prix » Futures vers les « prix » Spots à l'échéance du contrat

Supposons que le gisement du contrat est constitué de I obligations.

Le **prix de livraison** (pied de coupon) de l'obligation n°i du gisement est défini contractuellement par :

$$\boxed{PL_i = \frac{FC_i}{100} \times PL_{Ref}}$$

avec

- PL_i : Prix (pied de coupon) de livraison de l'obligation n°i
- FC_i : Facteur de concordance de l'obligation n°i
- PL_{Ref} : Prix de liquidation du contrat Futures LT

Supposons que la banque X décide d'« aller à la livraison » et que les vendeurs choisissent de livrer l'obligation n°i du gisement. Dans ce cas, la procédure de livraison « physique » consiste pour la banque X a recevoir des obligations n°i du gisement pour un montant nominal $K \times N_1$ pour un prix (pied de coupon) unitaire PL_i.

Le montant total payé en contrepartie par la banque X est donc :

$$Montant\ Payé = K \times N_1 \times [PL_i + CC_i]$$

où CC_i est le coupon couru de l'obligation n°i du gisement en date d'échéance du contrat.

Par définition, on appelle **facteur de concordance** $\mathrm{FC_i}$ de l'obligation n°i du gisement son prix pied de coupon calculé à l'échéance du contrat Futures en actualisant les cashflows au taux de coupon $\mathrm{C_{Ref}}$ de l'obligation de référence :

$$\boxed{FC_i + CC_{i,1} = \sum_{n=1}^{N_i} \frac{100 \times C_i}{(1 + C_{Ref})^{f_n}} + \frac{100}{(1 + C_{Ref})^{f_{N_i}}}}$$

avec

- C_i : Taux de coupon de l'obligation n°i du gisement
- N_i : Nombre de cashflows résiduels pour l'obligation n°i en date d'échéance du contrat
- f_n : Fraction d'année pour le n-ième cashflow

On constate que la formule de calcul du prix de livraison permet donc un « pricing » de l'obligation n°i du gisement selon une simple règle de trois.

En notant $\mathrm{R_{Fut}}$ le taux actuariel de l'obligation de référence à l'échéance du contrat, on peut re-écrire le prix de livraison du titre n°i (pied de coupon) sous la forme suivante :

$$S_{i,1}(R_{Fut}) = \frac{S_{i,1}(C_{Ref})}{S_{Ref,1}(C_{Ref})} \times S_{Ref,1}(R_{Fut})$$

avec

$$S_{Ref,1}(R_{Fut}) = F_1 \qquad et \qquad S_{Ref,1}(C_{Ref}) = 100$$

En effet,

- Le prix de l'obligation de référence en date d'échéance du contrat calculé en actualisant les cashflows au taux $\mathrm{R_{Fut}}$ n'est autre que le prix de liquidation $\mathrm{F_1}$ du contrat (puisqu'à l'échéance le prix Futures converge vers le prix Spot)

- Le prix de l'obligation de référence en date d'échéance du contrat calculé en actualisant les cashflows au taux C_{Ref} qui n'est autre que le prix au pair (100) de l'obligation de référence

On a donc bien :

$$S_{i,1}\left(R_{Fut}\right) = \frac{S_{i,1}\left(C_{Ref}\right)}{100} \times F_1$$

Les formules du facteur de concordance et du prix de livraison ne tiennent donc compte :

- Ni de la non-linéarité de la relation prix-taux des obligations
- Ni de la forme de la courbe des taux zéro-coupons Etat
- Ni des différences de structures de cashflows des obligations du gisement par rapport à l'emprunt de référence

Il faut néanmoins se souvenir que le premier contrat du genre à été crée en 1973 (T-Bond Futures du CBOT) pour comprendre l'intérêt d'une règle de trois certe rustique mais adaptée aux moyens de calcul de l'époque[6].

La conséquence la plus importante du facteur de concordance est l'existence d'un emprunt du gisement **moins cher à livrer** (noté plus simplement CTD acronyme de l'anglicisme « cheapest-to-deliver ») à l'échéance du contrat Futures. En effet, à l'échéance du contrat, le vendeur compare, pour chaque titre du gisement :

- Le prix du titre n°i sur le marché spot : $S_{i,1} + CC_{i,1}$
- Le prix de livraison du titre n°i : $f_i \times F_1 + CC_{i,1}$

Il choisit donc le titre (CTD) qui réalise le minimum suivant :

$$CTD = \underset{i}{ArgMin}\left\{BN_{i,1}\right\} \qquad avec \qquad BN_{i,1} = S_{i,1} - \frac{FC_i}{100} \times F_1$$

Par définition, $BN_{i,1}$ désigne la base nette du titre livrable n°i à l'échéance (T_1) du contrat Futures[7].

On notera qu'à l'échéance du contrat Futures, il est trivialement possible d'arbitrer entre la CTD et le Futures si la base nette $BN_{CTD,1}$ de la CTD n'est pas nulle[8]. On a donc sous hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) :

$$BN_{CTD,1} = 0 \qquad et \qquad BN_{i,1} > 0 \ (i \neq CTD)$$

En conséquence, le prix du contrat Futures (à l'échéance) doit être égal à :

$$F_1 = \frac{S_{CTD,1}}{f_{CTD}} \qquad avec \qquad f_{CTD} = \frac{FC_{CTD}}{100}$$

On peut donc réinterpréter la CTD (à l'échéance) comme le titre du gisement qui a le prix « équivalent Futures » le plus petit :

$$CTD = \underset{i}{ArgMin}\left\{\frac{S_{i,1}}{f_i}\right\}$$

6. Sans ce « particularisme historique » notre présentation des contrats Futures LT pourrait pratiquement s'arrêter là car les notions de « cheapest-to-deliver » et d'options implicites de livraisons n'existent qu'en raison du facteur de concordance. Pour le dire autrement, une mise en cohérence parfaite des titres du gisement à l'échéance rendrait les vendeurs indifférents à livrer un titre plutôt qu'un autre (les titres seraient « equi-cheapest » à l'échéance)

7. Les concepts de base nette, base brute et portage sont détaillés dans la section 2 du présent chapitre

8. Un contrat Futures (ou forward) converge vers le contrat Spot lorsque la période future (ou forward) converge vers zéro (ici lorsque T_0 converge vers T_1)

Notons tout de même que la base nette de la CTD à l'échéance calculée à partir du prix de liquidation du contrat Futures peut ne pas être nulle du simple fait que le prix de liquidation du contrat Futures est publié après la clôture du marché de sorte qu'il n'est plus possible d'arbitrer entre le Futures et le Cash.

7.1.3 Le Contrat Euro-BUND (Eurex)

Le contrat phare pour la fixation des taux Etat LT dans la zone Euro est depuis la création de l'Euro[9] le contrat German Government Bond (Euro-Bund) de l'Eurex (Francfort) dont les caractéristiques sont :

- Nominal : 100000 Euros
- Obligation de référence : Bund 10A au « pair » à 6% (échéance du contrat)
- Mois de livraisons : Mars, Juin, Septembre, Décembre
- Jours de livraison : 10ème jours ouvré du mois de livraison
- Echelon minimal de cotation : 0.01%
- Dernier jours de trading : Jours de livraison– 2 jours ouvrés
- Dernière heure de trading : 12H30 (heure de Francfort)
- Tick Value : EUR 10

Par définition, la tick value est le montant à recevoir ou à verser sur un contrat pour une variation du prix du Futures de 0.01% :

$$EUR\,10 = EUR\,100000 \times 0.01\%$$

Comme nous l'avons vu précédemment, l'obligation de référence n'éxiste pas sur le marché obligataire et ne peut donc pas être livrée. Le vendeur va donc choisir les titres à livrer parmi un ensemble de titres (gisement) dont les caractéristiques sont :

- Obligations émises par l'Etat Allemand
- A taux fixe et remboursement « in fine »
- Entre $8\frac{1}{2}$ et $10\frac{1}{2}$ de maturité résiduelle (à l'échéance du contrat)
- Encours Minimal de 2 Milliard d'Euros

Donnons un exemple simple pour fixer les idées.

Cet exemple porte sur le contrat Mars 2002 de l'Euro-Bund donc le gisement (obligations livrables et facteurs de concordances associés) est décrit dans le tableau 7.1 ci-dessous.

Titre	Coupon	Date de Maturité	Facteur de Concordance
DE0001135168	5.25	4 Jan 2011	94.9546
DE0001135184	5.00	4 Jul 2011	92.9773
DE0001135192	5.00	4 Jan 2012	92.7170

TAB. 7.1 – Gisement du Contrat Euro-Bund Mars 2002

9. A ce titre, rappelons que des contrats Futures sur obligations de l'Etat Français ont existé en France de 1986 à 2000. Ces Futures étaient négociables par le MArché à Terme d'Instruments Financiers (MATIF) qui a disparu suite à son combat frontal avec le l'Euro-Bund (Eurex) lorsque l'Euro a été créé. Devenus « redondants » en terme de risques couverts dans le cadre de l'Euro (disparition des primes de risque de change) et du pacte de stabilité et de croissance (quasi-disparition des primes de risque de crédit), seul le plus liquide des deux Futures LT a survécu

Supposons que le 15 Février 02 à 10H38 (date de négociation), une banque X achète 10 contrats Mars 02 à 107.70. Il s'agit de l'achat d'un instrument hors bilan, cette opération ne génère donc pas de flux de trésorerie (hors paiement du dépôt de garantie qui est auto-financé).

Le 15 Février 02 à 18H00, le cours de compensation du contrat Mars 2002 est 107.92. Comme le cours de compensation est supérieur au cours d'achat, la banque X va recevoir de l'Eurex des appels de marges pour un montant de +2200 Euros :

$$EUR\,2200 = 10\ (contrats) \times 22\ (ticks) \times EUR\,10\,(valeur\ d'1\,tick)$$

Plaçons-nous maintenant le 8 Mars 02 à 12H30 (dernier jour de trading) et donnons les informations supplémentaires suivantes :

- Prix de Liquidation (Futures): 107.56
- Cours de compensation du 7 Mars 02 : 107.66

De la même façon on trouve que le montant des derniers appels de marges est de - 1000 Euros (baisse de 10 ticks) et le total des appels de marges (hors financement) est de - 400 Euros (baisse de 4 ticks) :

$$EUR\ -400 = 10\ (contrats) \times -4\ (ticks) \times EUR\,10\,(valeur\ d'1\,tick)$$

Puisque la banque X « va à la livraison », quel titre obligataire du gisement lui sera livrée en toute vraissemblance ?

Cherchons le titre le moins cher à livrer (à l'échéance) sur le contrat Mars 2002 du Bund connaissant les prix spots des titres livrables à la clôture du contrat Futures. Le tableau 7.2 résume les calculs nécessaires à la détermination de la CTD sur le contrat Mars 2002 sur l'Euro-Bund.

	Prix Spot (1)	Prix de Livraison (2)	Base Nette (1) - (2)
4 Jan 2011	102.45	102.1332	0.3168
4 Jul 2011	100.11	100.0064	0.1036
4 Jan 2012	99.73	99.7264	0.0036

TAB. 7.2 – Calcul de la CTD du contrat Euro-Bund Mars 2002

La CTD du contrat Euro-Bund Mars 2002 à l'échéance est donc la « 4 Jan 2012 ». Le prix de livraison (pied de coupon) que devra payer la banque X est de 99.726405 calculé comme suit :

$$99.726405 = \frac{92.7170}{100} \times 107.56$$

On notera que la convergence du prix Futures vers le prix Spot n'est réalisée qu'à ε-près du fait que le prix de liquidation du contrat Futures n'est réellement connu qu'après la clôture et peut différer (en général de façon maginale) du cours de clôture.

Cet exemple illustre le mécanisme de livraison décrit au paragraphe 7.1.2. Rappelons que la livraison ne concerne que les contrats non débouclés après la clôture du marché le dernier jour de trading. La banque X aurait pu, par exemple, revendre ses 10 contrats le 8 Mars 02 avant 12H30 à un prix de 107.56 ce qui ne change rien en terme d'appels de marges cumulés mais lui évite d'« aller à la livraison » si tel n'était pas son objectif.

7.2 Arbitrage Cash vs Futures LT

Il existe une relation d'arbitrage exacte et symétrique entre le Futures et le Cash (obligation de référence sous-jacente) lorsque cette obligation est livrable à l'échéance du contrat (7.2.1). Par contre, dans le cas des contrats Futures LT décrits dans la première section de ce chapitre (de type T-Bond Futures du CBOT), on montre que seul l'arbitrage de type « cash & carry » (Long Cash vs Short Futures = Long Base) est envisage lorsque le prix du Futures est supérieur à son prix théorique (7.2.2). L'arbitrage inverse « reverse cash & carry » (Short Cash vs Long Futures = Short Base) n'est pas à proprement parler un arbitrage puisque le « vendeur de base » prend le risque d'un changement de CTD entre l'initiation de la position et l'échéance du contrat (7.2.3). On terminera cette section (7.2.4) par une présentation du concept de Taux Repo Implicite et par un comparatif des deux façons (équivalentes) de « regarder » l'arbitrage « cash & carry » (arbitrage sur Futures vs arbitrage sur Repos). Pour alléger l'exposé, on raisonne pour un nominal du contrat future égal à 1 Euro.

7.2.1 Arbitrage « Cash & Carry » Simplifié

On considère dans ce paragraphe un contrat Futures simplifié portant uniquement sur une obligation de référence à taux fixe $\mathrm{C_{Ref}}$, de maturité résiduelle 10A (à l'échéance du contrat) et à remboursement « in fine » que l'on suppose livrable (à l'échéance du contrat). L'achat d'un contrat Futures au prix $\mathrm{F_0}$ en $\mathrm{T_0}$ permet d'acquérir l'obligation de référence à ce prix à l'échéance du contrat ($\mathrm{T_1}$). Pour ce contrat Futures simplifié, un raisonnement d'arbitrage permet de trouver son prix théorique $\mathrm{F_0}$ en $\mathrm{T_0}$.

Dans la suite, on utilise les notations suivantes :

- $S_{Ref,0}$: Prix spot (pied de coupon) de l'obligation de référence en $\mathrm{T_0}$
- F_k : Prix du Futures en $\mathrm{T_k}$ (k=0,1)
- $r_{0,1}$: Taux de repo pour l'obligation de référence sur $[\mathrm{T_0}, \mathrm{T_1}]$
- $CC_{Ref,0}$: Coupon couru de l'obligation de référence en $\mathrm{T_0}$
- $\triangle CC_{Ref}$: Différence de coupons courus entre les dates $\mathrm{T_0}$ et $\mathrm{T_1}$

L'arbitrage « cash & carry » simplifié consiste à réaliser les opérations suivantes en $\mathrm{T_0}$ et $\mathrm{T_1}$:

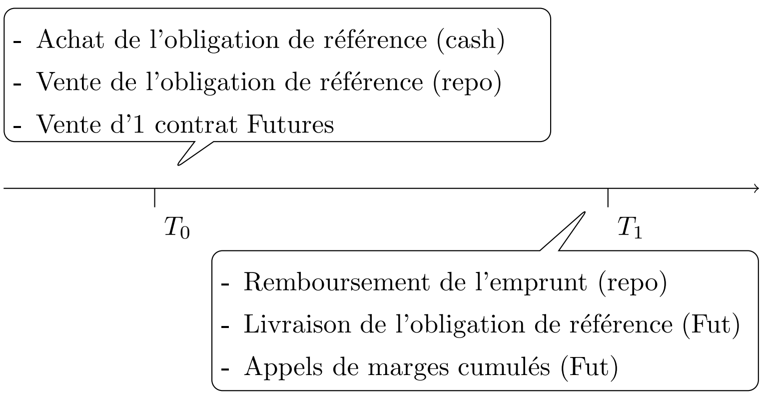

FIG. 7.2 – *Opérations à Réaliser en T_0 et T_1*

Les flux des différentes opérations réalisées en $\mathrm{T_0}$ sont donnés dans le tableau 7.3 ci-dessous :

Opérations	Flux (T_0)
Achat spot de l'obligation de référence	$-(S_{Ref,0} + CC_{Ref,0})$
Vente en repo de l'obligation de référence	$+(S_{Ref,0} + CC_{Ref,0})$
Vente d'1 contrat Futures	0
Total	0

TAB. 7.3 – Flux des Opérations en T_0

Le flux total en T_0 est donc nul.

A l'échéance du contrat Futures en T_1, les flux des différentes opérations sont donnés dans le tableau 7.4 :

Opérations	Flux (T_1)
Appels de marges (h.f.)	$F_0 - F_1$
Livraison de l'obligation de référence	$F_1 + CC_{Ref,1}$
Remboursement de l'emprunt (repo)	$-(S_{Ref,0} + CC_{Ref,0}) \times [1 + r_{0,1} \times f_{0,1}]$
Total	- Base Nette en T_0

TAB. 7.4 – Flux des Opérations en T_1

Le flux total en T_1 est égal à moins la base nette de l'obligation de référence calculée en T_0.

Par définition, la base nette $\mathrm{BN}_{\mathrm{Ref,0}}$ de l'obligation de référence en T_0 est la somme de sa base brute $\mathrm{BB}_{\mathrm{Ref,0}}$ et de son portage $\mathrm{PT}_{\mathrm{Ref,0}}$ en T_0 :

$$BN_{Ref,0} = BB_{Ref,0} + PT_{Ref,0} \qquad (\textit{base nette})$$

avec

$$\begin{cases} BB_{Ref,0} = & S_{Ref,0} - F_0 \qquad (\textit{base brute}) \\ PT_{Ref,0} = & r_{0,1} \times f_{0,1} \times (S_{Ref,0} + CC_{Ref,0}) - \triangle CC_{Ref} \qquad (\textit{portage}) \end{cases}$$

On constate donc que la base nette $\mathrm{BN}_{\mathrm{Ref,0}}$ est parfaitement connue en T_0 et doit donc être nulle pour garantir l'absence d'opportunité d'arbitrage :

$$BN_{Ref,0} = 0 \qquad \forall\, T_0 \leq T_1 \qquad (AOA)$$

De la contrainte précédente, on déduit le prix théorique du contrat Futures « simplifié » sur l'obligation de référence en T_0 :

$$\boxed{F_0 = S_{Ref,0} + [r_{0,1} \times f_{0,1} \times (S_{Ref,0} + CC_{Ref,0}) - \triangle CC_{Ref}]}$$

Cette analyse montre que le prix du Futures doit être égal au prix du cash (prix spot de l'obligation) augmenté du portage total (obligation et financement) pour garantir l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA).

En première approximation, on constate que si la courbe des taux est :

– « Normale » (les taux long terme sont supérieurs aux taux court terme) : Le prix Futures de l'obligation de référence est inférieur à son prix Spot
– « Inversée » (les taux long terme sont inférieurs aux taux court terme) : Le prix Futures de l'obligation de référence est supérieur à son prix Spot

On notera pour terminer ce paragraphe que la formule trouvée n'est autre que l'application au cas particulier des obligations de la relation d'arbitrage classique entre marché Futures et marché Spot qui veut que le prix Futures soit égal au prix Spot augmenté du coût de portage pour respecter l'AOA (cette relation générale s'applique quel que soit le sous-jacent du contrat Futures).

7.2.2 Arbitrage « Cash & Carry »

Le passage d'un contrat Futures « simplifié » à un contrat Futures standard de type T-Bond Futures (CBOT) introduit un « facteur de risque » supplémentaire puisque l'on ne sait pas a priori quel sera le titre CTD à l'échéance du contrat en T_1.

On peut néanmoins monter la position d'arbitrage en utilisant le titre le **moins cher à livrer (CTD) anticipé** à la date T_0. Par définition, on appelle CTD anticipée en T_0, le titre du gisement qui a la base nette la plus faible à cette date (voir plus bas le calcul de la base nette dans le cas de l'arbitrage standard).

On a donc :

$$CTD_{T_0} = \underset{i}{ArgMin}\{BN_{i,T_0}\}$$

L'arbitrage « cash & carry » standard (appelée aussi position de « base ») diffère du cas simplifié dans la mesure où le titre n°i peut être ou ne pas être CTD à l'échéance du contrat.

Nous allons donc traiter les deux cas séparément.

7.2.2.1 Le titre n°i est CTD en T_1

L'arbitrage « cash & carry » standard consiste à réaliser les opérations suivantes en T_0 et T_1 :

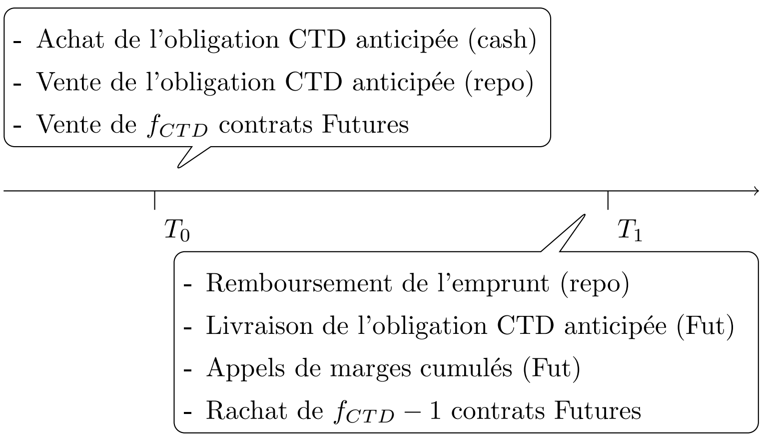

FIG. 7.3 – *Opérations à Réaliser en T_0 et T_1*

Les flux des différentes opérations réalisées en T_0 sont donnés dans le tableau 7.5 ci-dessous :

Opérations	Flux (T_0)
Achat spot de l'obligation n°i	$-(S_{i,0}+CC_{i,0})$
Vente en repo de l'obligation n°i	$+(S_{i,0}+CC_{i,0})$
Vente de f_i contrats Futures LT	0
Total	0

Tab. 7.5 – Flux des Opérations en T_0

Le flux total en T_0 est donc nul.

Les flux des différentes opérations réalisées à l'échéance du contrat Futures en T_1 sont donnés dans le tableau 7.6 :

Opérations	Flux (T_1)
Appels de marges (h.f.)	$F_0 - F_1$
Livraison de l'obligation n°i	$f_i \times F_1 + CC_{i,1}$
Remboursement de l'emprunt (repo)	$-(S_{i,0}+CC_{i,0}) \times [1 + r_{0,1} \times f_{0,1}]$
Rachat de (f_i − 1) contrats Futures LT	$(f_i - 1) \times (F_0 - F_1)$
Total	- Base Nette en T_0

Tab. 7.6 – Flux des Opérations en T_1

Le flux total en T_1 est égal à moins la base nette (calculée en T_0) de l'obligation n°i du gisement.

Comme précédemment, on définit la base nette $BN_{i,0}$ de l'obligation de référence en T_0 comme la somme de sa base brute $BB_{i,0}$ et de son portage $PT_{i,0}$ en T_0 (avec des notations similaires) :

$$BN_{i,0} = BB_{i,0} + PT_{i,0} \qquad (\textit{base nette})$$

avec

$$\begin{cases} BB_{i,0} = & S_{i,0} - f_i \times F_0 \qquad (\textit{base brute}) \\ PT_{i,0} = & r_{0,1} \times f_{0,1} \times (S_{i,0} + CC_{i,0}) - \triangle CC_i \qquad (\textit{portage}) \end{cases}$$

On constate donc, qu'il n'y a pas de différence fondamentale entre le contrat future simplifié et le contrat future standard si, bien sur, on se place dans l'hypothèse où le titre n°i reste CTD à l'échéance du contrat.

7.2.2.2 Le titre n°i n'est pas CTD en T_1

Dans ce cas, l'arbitragiste (qui est short de contrats Futures) peut ne pas tenir compte du changement de CTD et livrer le titre n°i à l'échéance du contrat Futures (ce qui nous ramène au cas précédent). En pratique, il n'a cependant pas intérêt à livrer le titre n°i (ancienne CTD) mais le titre n°j (nouvelle CTD), ce qui mécaniquement améliore son P/L.

Supposons que le titre n°j (j≠i) est le CTD en T_1.

L'arbitragiste peut améliorer son P/L en réalisant le « swap » suivant en T_1 :

- Vendre l'obligation n°i
- Acheter l'obligation n°j

Et en livrant l'obligation n°j à l'échéance du contrat Futures.

Pour calculer le P/L de cette stratégie de « cash & carry » avec un « swap » entre les titres n°i et n°j à l'échéance du contrat, regardons (cf. Tableau 7.7) quelles sont les opérations à réaliser en T_1 et les flux associés :

Opérations	Flux (T_1)
Appels de marges (h.f.)	$F_0 - F_1$
Vente de l'obligation n°i	$+(S_{i,1} + CC_{i,1})$
Achat de l'obligation n°j	$-(S_{j,1} + CC_{j,1})$
Livraison de l'obligation n°j	$f_j \times F_1 + CC_{j,1}$
Remboursement de l'emprunt (repo)	$-(S_{i,0} + CC_{i,0}) \times [1 + r_{0,1} \times f_{0,1}]$
Rachat de (f_i – 1) contrats Futures LT	$(f_i - 1) \times (F_0 - F_1)$
Total	P/L

TAB. 7.7 – Flux des Opérations en T_1

En additionnant les différents flux et en réorganisant les termes, on trouve :

$$P/L = -BN_{i,0} - (BN_{j,1} - BN_{i,1})$$

Si le titre n°j est la CTD à l'échéance du contrat Futures alors :

$$BN_{j,1} = 0 \qquad et \qquad BN_{i,1} > 0$$

En conséquence, le P/L de la stratégie est amélioré du montant de la base nette du titre n°i en T_1 :

$$P/L = BN_{i,1} - BN_{i,0} > -BN_{i,0}$$

Le vendeur de contrats Futures a donc toujours intérêt à livrer la CTD à l'échéance du contrat.

Dans les deux cas, la base nette $BN_{i,0}$ ne peut donc être négative en $T_0 \leq T_1$. Si c'était le cas, on pourrait alors obtenir un gain sans risque sur l'arbitrage puisqu'à l'échéance, on est certain de locker un P/L au moins égal à $-BN_{i,0}$.

En conséquence, sous hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) on doit avoir :

$$\boxed{BN_{i,0} \geq 0 \qquad \forall\, T_0 \leq T_1}$$

7.2.3 Arbitrage « Reverse Cash & Carry »

Nous venons de voir que la base nette du titre n°i (une obligation quelconque du gisement) ne pouvait pas être négative sous l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrages.

Supposons donc que la base nette du titre n°i est <u>strictement</u> positive en T_0 :

$$BN_{i,0} > 0 \qquad \forall\, T_0 \leq T_1$$

On peut donc penser « a priori » pouvoir mettre en place l'arbitrage inverse appelé logiquement « reverse cash & carry » pour espérer obtenir un P/L strictement positif à l'échéance du contrat Futures.

Quant est-il exactement et quel est le profil de gain-risque de cette stratégie?

Comme précédemment nous distinguons deux cas selon que le titre n°i est ou n'est pas CTD à l'échéance du contrat. Notons que les opérations et les flux sur l'arbitrage « reverse cash & carry » sont strictement symétriques aux opérations et aux flux sur l'arbitrage « cash & carry ».

7.2.3.1 Le titre n°i est CTD en T_1

Si le titre n°i est CTD à l'échéance du contrat Futures alors l'arbitragiste (qui est long de contrats Futures) reçoit le titre n°i (car ce dernier est le « moins cher à livrer » pour le vendeur) ce qui annule sa position short sur le titre n°i. Son P/L est donc strictement égal à la base nette du titre n°i en T_0 qui est strictement positive par hypothèse :

$$P/L = BN_{i,0} > 0$$

7.2.3.2 Le titre n°i n'est pas CTD en T_1

Dans ce cas, l'arbitragiste ne va (vraissemblablement) pas recevoir le titre n°i mais le titre n°j (la CTD à l'échéance du contrat). Il va donc devoir revendre le titre n°j et acheter le titre n°i sur le marché spot pour annuler sa position short sur ce dernier titre. Son P/L est donc strictement égal à :

$$P/L = -BN_{i,1} + BN_{i,0}$$

Dans ce cas, le P/L de l'arbitrage « reverse cash & carry » n'est pas forcément positif. Il peut parfaitement être négatif si la base nette du titre n°i augmente entre la date d'initiation de l'arbitrage (T_0) et la date de débouclage (T_1). Une telle situation est tout à fait envisageable puisqu'à l'échéance du contrat les titres non-CTD ont tendance à se « déconnecter » du contrat Futures.

L'asymétrie qui existe entre le vendeur du contrat (qui choisit le ou les titres à livrer) et l'acheteur (qui ne sais pas à l'avance ce qui va lui être livré) implique donc que la base nette des titres du gisement doit être positive. Seul le titre CTD doit avoir une base nette nulle à l'échéance du contrat Futures pour éviter l'arbitrage trivial entre le Futures et le cash à cette date.

En conclusion de notre analyse, **on constate que la relation d'arbitrage parfaite entre le Cash et le Futures qui prévaut dans le cas d'un contrat Futures simplifié (7.2.1), n'est plus valable pour le contrat Futures standard.**

On a dans le cas standard l'inégalité suivante :

$$\boxed{F_0 \leq \frac{1}{f_i} \times \{S_{i,0} + [r_{0,1} \times f_{0,1} \times (S_{i,0} + CC_{i,0}) - \triangle CC_i]\}}$$

Cette différence est due à l'existence d'un titre « moins cher à livrer » à l'échéance du contrat et au fait que le vendeur d'un contrat Futures bénéficie de l'avantage du choix du titre à livrer par rapport à l'acheteur qui doit accepter ce qu'on lui livre.

Le vendeur d'un contrat Futures est donc simultanément acheteur d'une option implicite de livraison dont la prime est précisément égale à la différence entre le prix théorique du contrat Futures si seul le titre n°i était livrable à l'échéance du contrat Futures (partie droite de l'inégalité précédente) et son prix de marché F_0.

7.2.4 Taux Repo Implicite

Le Taux de Repo Implicite (« Implied Repo Rate » en anglais) est généralement défini dans la litérature comme le taux de repo pour lequel la base nette est nulle.

Formellement, on a donc :

$$BN_{i,0} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad r^*_{0,1} = \frac{f_i \times F_0 - S_{i,0} + \triangle CC_i}{f_{0,1} \times (S_{i,0} + CC_{i,0})}$$

Le concept de Taux de Repo Implicite ne change rien aux analyses faites jusqu'à maintenant mais permet d'introduire une autre façon de regarder l'arbitrage « cash & carry ».

Jusqu'à présent, nous avons regardé l'arbitrage « cash & carry » comme un arbitrage (short) Futures LT contre son synthétique constitué par une position (long) obligataire (CTD anticipée) financée par une position (short) repo jusqu'à la date d'échéance du contrat. Dans cette approche, on est donc simultanément (short) Futures LT vs (long) Futures LT (synthétique) et la Base Nette n'est rien d'autre (au facteur de concordance près) que la différence de prix entre les deux Futures.

$$\boxed{\begin{array}{c} Arbitrage\ "Cash\ \&\ Carry" \\ \Leftrightarrow \\ (short)\ \ Futures\ LT\ vs\ \ (long)\ \ Futures\ LT\ Synth\acute{e}tique \\ \& \\ Base\ Nette \simeq P_{Futures\ LT\ Synth\acute{e}tique} - P_{Futures\ LT} \end{array}}$$

Une autre approche consiste précisément à regarder l'arbitrage « cash & carry » comme un arbitrage (short) repo contre son synthétique constitué par une position (long) obligataire

(CTD anticipée) couverte par une position (short) de Futures LT. Dans cette approche, on est donc simultanément (short) Repo vs (long) Repo (synthétique) et le Taux de Repo Implicite peut alors s'interpréter comme le taux du repo synthétique.

$$\begin{array}{c} Arbitrage\text{ "}Cash\ \&\ Carry\text{"} \\ \Leftrightarrow \\ (short)\ Repo\ vs\ (long)\ Repo\ Synthétique \\ \& \\ Implied\ Repo\ Rate = Taux\ du\ Repo\ Synthétique \end{array}$$

Ces deux approches sont évidemment parfaitement équivalentes en terme de pricing et d'opportunités ou non d'arbitrages.

Comme nous l'avons vu plus haut, un Futures LT correctement pricé implique un prix Futures théorique (calculé à partir de la CTD anticipée) strictement supérieur au prix Futures observé donc une base nette de la CTD anticipée strictement positive. De cette inégalité stricte, on en déduit simplement qu'un Futures LT correctement pricé implique un Taux Repo Implicite strictement inférieur au taux de Repo observé (sur la CTD anticipée). La réciproque est aussi vraie.

$$AOA \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Prix_{Futures\ LT\ Théorique} > Prix_{Futures\ LT} & (Futures\ LT) \\ \Updownarrow & \\ Taux_{Repo\ Théorique} < Taux_{Repo} & (Repo\ CTD) \end{cases}$$

Notons que, comme précédemment, la différence entre le taux de repo observé et le taux de repo théorique vient du fait que le repo synthétique intègre une option implicite de livraison. La différence entre les deux taux de repo reflète précisément le coût de cette option implicite de livraison pricée par le marché.

$$Taux_{Repo} - Taux_{Repo\ Théorique} \equiv Coût\ de\ l'option\ de\ livraison > 0$$

L'analyse et le pricing de cette option implicite de livraison sont détaillés dans la section 1.3 qui suit.

A titre d'exemple, considérons un contrat Futures fictif dont les caractéristiques sont :

- Echéance : Dans 3 mois
- Prix d'1 contrat Futures (F_0) : 107.05
- Nominal d'1 contrat : EUR 100

L'obligation de référence de ce Futures a les caractéristiques suivantes :

- Maturité (à l'échéance du contrat) : 10A
- Coupon : 5%

Les titres livrables (gisement) à l'échéance du contrat sont décrits dans le tableau 7.8 ci-dessous[10] :

10. Toutes les obligations sont à coupons annuels et à remboursement « in fine »)

	Titre 1	Titre 2	Titre 3
Maturité	9.5A	10A	10.5A
Coupon	5%	4.5%	4%
Taux Actuariel	3.95%	4.05%	4%
S_0	110.6605	103.6408	101.5593
CC_0	2.5	0	2
CC_1	3.75	1.125	3
Duration Modifiée	7.4026	7.9812	8.2711
FC	99.9770	96.1940	92.1110

TAB. 7.8 – Exemple - Gisement du Contrat Futures LT

On se donne un taux de repo 3 Mois à 2%.

Calculons les bases nettes de chacun des trois titres du gisement (ainsi que les éléments de calcul intermédiaires). Les résultats sont donnés dans le tableau 7.9 ci-dessous, ils sont obtenus par application directe des formules données dans cette section.

	Titre 1	Titre 2	Titre 3
Base Brute	1.13512	0.66519	0.95443
Portage	0.69670	-0.60680	-0.49220
Base Nette	0.43842	0.05839	0.46223

TAB. 7.9 – Exemple - Calcul de la Base Nette des Titres du Gisement

On constate donc qu'avec une base nette d'environ 6 centimes, le titre 2 est la CTD anticipée en T_0.

7.3 Analyse de la Base

Au terme des deux sections précédentes, on constate que la relation entre le Futures et le Cash peut donner lieu à deux types de prise de position résumées dans le tableau 7.10 ci-dessous.

	Cash & Carry	Reverse Cash & Carry
Décision	$BN_{i,0} < 0$	$BN_{i,0} > 0$
Montage	– Achat Titre i (Cash) – Vente Titre i (Repo) – Vente de f_i contrats Futures	– Vente Titre i (Cash) – Achat Titre i (Repo) – Achat de f_i contrats Futures
P/L	$BN_{i,1} - BN_{i,0} \geq 0BN_{i,0} > 0$	$BN_{i,0} - BN_{i,1}$
Risque	Aucun	Le Titre i n'est plus CTD en T_1

TAB. 7.10 – Tableau Synthétique des Stratégies « Futures vs Cash »

On suppose le titre n°i du gisement est CTD en T_0.

Dans les deux cas, la base nette est l'élément principal puisqu'elle sert à la fois dans la prise de décision et dans le calcul du P/L. C'est la raison pour laquelle l'activité d'arbitrage « Futures LT vs Cash » est aussi couramment appelée « trading de base »[11]

Dans cette dernière section, nous allons montrer que la base nette n'est autre que le coût de l'option de livraison ou plus précisément des options de changement de CTD dont le vendeur de contrats Futures est implicitement long du fait de l'existence d'un titre « moins cher à livrer » à l'échéance du contrat et de l'asymétrie intrinsèque entre acheteurs et vendeurs dans le choix des titres à livrer.

7.3.1 Analyse des Options de Changement de CTD

Le prix théorique du contrat Futures en T_0 est le prix obtenu en supposant que la CTD anticipée est le seul titre livrable :

$$F_0^* = \frac{1}{f_{CTD}} \times \{S_{CTD,0} + [r_{0,1} \times f_{0,1} \times (S_{CTD,0} + CC_{CTD,0}) - \triangle CC_{CTD}]\}$$

Sous cette hypothèse, un contrat Futures est sensible à deux facteurs de risque :

- Le taux long terme r_{LT} (taux actuariel de la CTD)
- Le taux court terme r_{CT} (taux de repo de la CTD)

On peut donc écrire :

$$\triangle F_0^* \simeq \frac{\partial F_0^*}{\partial r_{LT}} \times \triangle r_{LT} + \frac{\partial F_0^*}{\partial r_{CT}} \times \triangle r_{CT}$$

avec

$$\frac{\partial F_0^*}{\partial r_{LT}} = \frac{1}{f_{CTD}} \times [1 + r_{0,1} \times f_{0,1}] \times \frac{\partial S_{CTD,0}}{\partial r_{LT}}$$

11. Cette section est en grande partie basée sur des connaissances acquises et des recherches effectuées par l'auteur dans le cadre de ses fonctions de trader-arbitragiste compte propre au sein du desk de Trading Obligataire de la salle des marchés du CA Indosuez (1998)

et

$$\frac{\partial F_0^*}{\partial r_{CT}} = \frac{1}{f_{CTD}} \times [1 + r_{0,1} \times f_{0,1}] \times \frac{\partial S_{CTD,0}}{\partial r_{CT}}$$

On note qu'au facteur $[1 + r_{0,1} \times f_{0,1}]$ près, l'arbitrage de type « cash & carry » est couvert contre le risque de taux (variation du taux $\mathrm{r_{LT}}$).

Que se passe-t'il lors d'un changement de CTD ?

On fait abstraction de la partie court terme en supposant que le risque (repo) est le même quel que soit le titre du gisement. Calculons la sensibilité du contrat Futures LT dans les deux cas suivants :

1. Le titre 1 est CTD
2. Le titre 2 est CTD

La sensibilité d'1 contrat Futures s'écrit :

$$\left.\frac{\partial F_0^*}{\partial r_{LT}}\right|_i = \frac{1}{f_i} \times [1 + r_{0,1} \times f_{0,1}] \times \frac{\partial S_{i,0}}{\partial r_{LT}} \qquad (i = 1{,}2)$$

Supposons que l'on ait monté la position de base (cash & carry) initiale avec le titre n°1 comme CTD anticipée[12].

Supposons maintenant que le titre n°2 devient CTD, le nombre de contrats Futures nécessaires pour couvrir la position longue sur le titre n°1 change et la position devient mécaniquement long ou short de :

$$\frac{\frac{\partial S_{1,0}}{\partial r_{LT}}}{\frac{1}{f_2} \times [1 + r_{0,1} \times f_{0,1}] \times \frac{\partial S_{2,0}}{\partial r_{LT}}} - f_1$$

contrats Futures.

Quand y-a-t'il changement de CTD ?

Lorsque la courbe des taux se déforme uniformément :

– A la baisse des taux, les titres les moins « sensibles » (en règle générale, ceux de plus petite duration ou maturité) deviennent CTD
– A la hausse des taux, les titres les plus « sensibles » (en règle générale, ceux de plus grande duration ou maturité) deviennent CTD

Toutes choses égales par ailleurs, il est possible de déterminer les niveaux de taux (ou de prix du contrat Futures) pour lesquels les changements de CTD se produisent. Ces niveaux constituent les strikes des options de changement de CTD :

– A la hausse des taux (hausse du prix du Futures), on devient long : on est donc implicitement long de Call(s)
– A la baisse des taux (hausse du prix du Futures), on devient short : on est donc implicitement long de Put(s)

12. On note que la composante $r_{0,1} \times f_{0,1} \times \partial S_{i,0}/\partial r_{LT}$ de cette sensibilité est négligeable devant 1

Au final, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{array}{c} Long\ d'1\ contrat\ Futures\ LT \\ \Leftrightarrow \\ Long\ de\ {}^1/f_{CTD}\ Cheapest-to-Deliver\ (Cash) \\ + \\ Short\ de\ {}^1/f_{CTD}\ Cheapest-to-Deliver\ (Repo) \\ + \\ Short\ des\ Options\ de\ Changement\ de\ CTD \end{array}$$

Au terme de cette analyse, il nous reste à préciser les caractéristiques des options de changement de CTD (type d'option, nombre de contrats Futures, niveau de strike et échéance) de façon à en quantifier la valeur (pricing).

7.3.2 Pricing des Options de Changement de CTD

Nous nous plaçons ici à une date quelconque $T_0 < T_1$. On note $BN_{i,0}$ et $BN_{j,0}$ les bases nettes respectives de l'obligation n°i et de l'obligation n°j. On suppose de plus que l'obligation n°j est la CTD anticipée en T_0.

On note $\triangle BN_{i-j,0}$ la différence de base nette en T_0 entre l'obligation n°i et la CTD anticipée :

$$\triangle BN_{i-j,0} = BN_{i,0} - BN_{j,0} > 0$$

On se propose de calculer la variation du taux actuariel $\triangle R_{i,0}$ pour laquelle l'obligation n°i et la CTD anticipée deviennent « equi-cheapest », c'est-à-dire :

$$\triangle BN_{i-j,0} = 0$$

En dérivant la base nette $BN_{i,0}$ du titre n°i par rapport à son taux actuariel $R_{i,0}$, on trouve :

$$\frac{dBN_{i,0}}{dR_{i,0}} = [1 + r_{0,1} \times f_{0,1}] \times \frac{dS_{i,0}}{dR_{i,0}} - f_i \times \frac{dF_0}{dR_{i,0}}$$

Il nous faut calculer la sensibilité du prix du contrat Futures F_0 au taux $R_{i,0}$. On fait l'hypothèse que le prix du contrat Futures est parfaitement « corrélé » au prix de la CTD anticipée. Ce qui revient à dire que les variations de la base nette de la CTD peuvent être négligées (en première approximation) tant qu'il n'y a pas de changement de CTD. On en déduit donc la sensibilité du prix du contrat Futures par rapport au taux $R_{i,0}$:

$$\frac{dF_0}{dR_{i,0}} = \frac{1}{f_j} \times [1 + r_{0,1} \times f_{0,1}] \times \frac{dS_{j,0}}{dR_{i,0}}$$

En remplaçant cette expression de la dérivée du prix du Futures par rapport au taux actuariel $R_{i,0}$ et en tenant compte des deux approximations classiques suivantes[13] :

$$dS_{i,0} = -S^{brut}_{i,0} \times D^{mod}_{i,0} \times dR_{i,0} \qquad et \qquad dS_{i,0} = -S^{brut}_{j,0} \times D^{mod}_{j,0} \times dR_{j,0}$$

13. S, S^{brut} et D^{mod} sont respectivement le prix pied de coupon, le prix brut (coupon couru inclus) et la duration modifiée

Par ailleurs, on suppose que la variation des taux actuariels est uniforme sur la zone des 10A. On peut donc écrire :

$$dR_{i,0} \equiv dR_{j,0}$$

On trouve finalement une approximation la variation du taux actuariel $\triangle R_{i,0}$ (variation uniforme des taux actuariels sur la zone des 10A) qui rend le titre n°i « equi-cheapest » avec la CTD anticipée :

$$\boxed{\triangle R_{i,0} = \frac{-\triangle BN_{i,0}}{[1 + r_{0,1} \times f_{0,1}] \times \left[S^{brut}_{i,0} \times D^{mod}_{i,0} - \frac{f_i}{f_j} \times S^{brut}_{j,0} \times D^{mod}_{j,0}\right]}}$$

Toujours sous l'hypothèse de variation des taux 10A uniformes (parallel shift) on peut montrer que le détenteur d'une position de « cash & carry » est implicitement détenteur d'une option sur contrats Futures LT dont les caractéristiques sont :

- Nombre de contrats Futures : δ_i
- Echéance : T_1
- Strike : F_i^*

Cette option est un :

- Put : Lorsque le titre n°i devient CTD à la hausse des taux (si le titre i à une duration supérieure à la duration du titre j)
- Call : Lorsque le titre n°i devient CTD à la baisse des taux (si le titre i à une duration inférieure à la duration du titre j)

En effet, si il y a changement de CTD la position de base initiale est modifiée dans la mesure où le Futures suit maintenant le titre n°i qui est la nouvelle CTD. En terme de sensibilité, on a donc :

$$\begin{aligned} EUR\,1\,de\,titres\,n°j &\iff EUR\,\frac{S^{brut}_{j,0} \times D^{mod}_{j,0}}{S^{brut}_{i,0} \times D^{mod}_{i,0}}\,de\,titres\,n°i \\ &\iff \frac{f_i}{[1 + r_{0,1} \times f_{0,1}]} \times \frac{S^{brut}_{j,0} \times D^{mod}_{j,0}}{S^{brut}_{i,0} \times D^{mod}_{i,0}}\,contrats\,Futures \end{aligned}$$

La position de base initiale a maintenant une composante directionnelle qui équivaut à :

$$\boxed{\delta_i = \frac{f_i}{[1 + r_{0,1} \times f_{0,1}]} \times \frac{S^{brut}_{j,0} \times D^{mod}_{j,0}}{S^{brut}_{i,0} \times D^{mod}_{i,0}} - f_j\,contrats\,Futures}$$

En comparant les formules de $\triangle R_{i,0}$ et de δ_i on constate qu'ils sont de signes opposés :

- $\triangle R_{i,0} > 0$
  - Le titre n°i devient CTD à la hausse des taux
  - Le titre n°i a donc une sensibilité supérieure au titre n°j
  - On devient donc short de δ_i contrats Futures
  - On est donc implicitement long d'un Put sur contrats Futures
- $\triangle R_{i,0} < 0$
  - Le titre n°i devient CTD à la baisse des taux

– Le titre n°i a donc une sensibilité inférieure au titre n°j
– On devient donc long de δ_i contrats Futures
– On est donc implicitement long d'un Call sur contrats Futures

Il ne reste plus qu'à calculer le strike de l'option de changement de CTD. Si F_0 est le prix du Futures en T_0, le strike de l'option est simplement égal au prix du Futures plus la variation du prix du Futures (liée à la variation du taux d'intérêt LT précédemment calculé) approximée par la sensibilité du Futures, soit :

$$F_i^* = F_0 + \triangle F_{i,0} \qquad avec \qquad \triangle F_{i,0} = \frac{1}{f_j} \times [1 + r_{0,1} \times f_{0,1}] \times S_{j,0}^{brut} \times D_{j,0}^{mod} \times \triangle R_{i,0}$$

Cette modélisation de l'option (générique) de changement de CTD du titre n°j au titre n°i est illustrée par le graphique 7.4 qui décrit le payoff de l'option en fonction du prix du Futures.

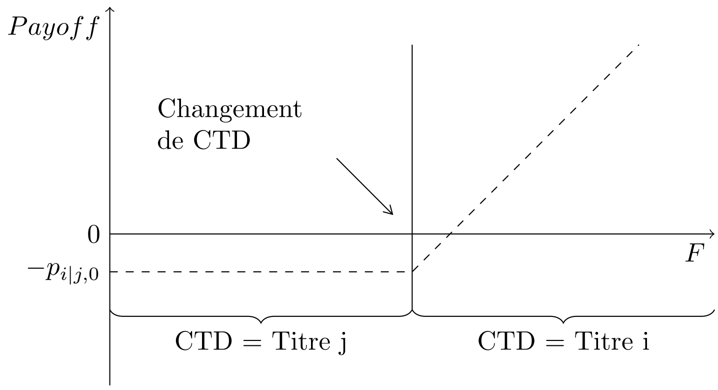

FIG. 7.4 – *Payoff de l'Option de Changement de CTD*

Au final, si le gisement du contrat Futures contient N titres livrables, le détenteur d'une position de base (« cash & carry ») sur le titre n°j (CTD anticipée en T_0) est simultanément long de N-1 options implicites de changement de CTD. Si $p_{i|j,0}$ est la prime de l'option de changement de CTD du titre n°j vers le titre n°i alors la base nette du titre n°j peut être approximée (dans le cadre de notre modèle de pricing) par la somme des primes des options :

$$\boxed{BN_{j,0}^{th} = \sum_{i \neq j} p_{i|j,0}}$$

Le modèle de pricing de base que nous venons de présenter permet une analyse simple et didactique des facteurs fondamentaux qui déterminent les changements de CTD sur les contrats Futures sur obligations d'Etat. Certaines hypothèses ou simplifications faites dans ce modèle peuvent néanmoins êtres levées :

– L'hypothèse d'une relation linéaire entre le prix du Futures et le taux d'intérêt LT peut être trivialement levée en utilisant une approximation à l'ordre 2 (delta/gamma) au lieu de l'approximation à l'ordre 1 (delta) utilisée dans notre modèle
– L'hypothèse que les variations de la base nette de la CTD peuvent être négligées tant qu'il n'y a pas de changement de CTD est plus complexe à lever mais néanmoins tout à fait envisageable. Fondamentalement cela revient à réintroduire dans la sensibilité du contrat Futures la contribution due à la base qui est ignorée ici. Cette approche consiste à appliquer la méthode du bootstrap au pricing simultané des N bases du

contrat Futures[14]. La conséquence principale de ce changement est l'obtention d'une relation prix-taux du contrat Futures continue, globalement convexe et localement concave aux points de changement de CTD
- L'hypothèse de variations uniformes (shift) des taux 10A est plus délicate à lever sans recourir à un modèle de taux[15] ou à des modèles spécifiques de pricing d'options d'échange d'un actif contre un autre[16]. Ce type d'approches permet de gagner en précision mais n'autorise plus une décomposition « synthétique » de la base en instruments négociables sur le marché (options sur contrats Futures LT)

Reprenons l'exemple du paragraphe 7.2.4 et calculons la valeur théorique de la base nette du titre 2 dans le cadre du modèle précédent.

Nous avons deux options de changement de CTD correspondants aux titres 1 et 3. Le tableau 7.11 ci-dessous donne les principaux éléments de calcul pour ces deux titres.

i	Titre 1	Titre 3
Type Option	Call	Put
$\triangle BN_{i,0}$	38 ctm	40.4 ctm
$\triangle R_{i,0}$	-93.3bp	+83.8bp
δ_i	0.04257	-0.07259
$\triangle F_i$	8.062	-7.144
F_i^*	115.112	99.806
$d_{1,i}$	-1.08462	-1.14962
$d_{2,i}$	1.11050	1.04550
$p_{i\|2,0}$	2.02 ctm	3.48 ctm

Tab. 7.11 – Exemple - Elements de Calcul pour le Pricing de la Base

On obtient donc une valeur théorique de la base nette du titre n° 2 égale à 5.5 ctm.

Les éléments communs au pricing des deux options sont liés au Futures :

- Volatilité (Annuelle) : 13%
- Sensibilité : -8.6420
- Prix : 107.05
- Maturité : 3M

Le calcul des primes des options est réalisé à l'aide du modèle de Black[17].

7.3.3 Couverture par des Contrats Futures LT

On considère ici le problème de la couverture d'une position obligataire quelconque (maturité et émetteur) par des contrats Futures LT. Le principe général consiste simplement à prendre

14. Cf. Leroy F. (1998), « Contrats sur Futures LT : Pricing Multi-Base par la Méthode du Boostrap », Proprietary Bond Trading Desk (Crédit Agricole Indosuez)
15. Cf. Koenisgberg M. (1990), « The Salomon Brother Delivery Option Model : Understanding Treasury Bond Futures II », Salomon Brothers (Bond Portfolio analysis Group)
16. Cf. Margrabe W. (1978), « The Value of an Option to Exchange one Asset for Another », Journal of Finance (March)
17. Cf. Black F. (1976), « The Pricing of Commodity Contracts », Journal of Financial Economics (March)

une position sur contrats Futures LT de sens opposé à la position obligataire détenue au comptant de façon à « réduire le risque de taux » de la position couverte. La mise en oeuvre de ce principe général nécessite de se donner un critère explicite de couverture sous la forme d'un objectif à atteindre.

On note :

- h : L'horizon de couverture ($0 < h \leq 1$)
- S_t : Le prix pied de coupon du titre obligataire (à couvrir) en t
- F_t : Le prix du contrat Futures en t

Par extension du concept de base brute[18], on appelle « base brute étendue » l'expression :

$$BB' = S - \theta \times F$$

Le problème à résoudre consiste à **déterminer le ratio de couverture θ qui annule la variation de la base brute « étendue »** de la position couverte sur la période de couverture :

$$\triangle BB' = 0 \qquad (\textit{critère de couverture})$$

La variation du cours de la position couverte est alors égale à la différence des bases brutes « étendues » :

$$\triangle BB' = \triangle S - \theta \times \triangle F = BB_h^{'} - BB_0^{'}$$

On détermine d'abord le ratio optimal de couverture θ^* pour une valeur nominale de EUR 100 de la position à couvrir et du contrat Futures.

On commence par le cas particulier où la position obligataire à couvrir est constituée de la CTD anticipée du contrat Futures LT.

En appliquant notre critère de couverture à ce cas particulier, on trouve :

$$\triangle BB' = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \triangle S_{CTD} = f_{CTD} \times \triangle F$$

On fait l'hypothèse que les variations du prix pied de coupon de la CTD sont parfaitement corrélées aux variations du cours du contrat Futures LT :

$$\triangle S_{CTD} \equiv \triangle F \qquad (\textit{hypothèse de couverture})$$

On en déduit le ratio de couverture à appliquer dans ce cas :

$$\boxed{\theta^* = f_{CTD}}$$

On retrouve ici le même ratio de couverture que dans l'arbitrage « cash & carry » donné au paragraphe 7.2.2.

Dans le cas général où la position à couvrir est différente de l'obligation CTD, le ratio de couverture doit tenir compte des sensibilités respectives de l'obligation à couvrir et de la CTD anticipée du contrat Futures.

18. Ce paragraphe est en partie basé sur Roure F. (1988), Stratégies Financières sur le MATIF et le MONEP, Economica

On peut écrire :

$$\triangle S = -D^{mod} \times S^{brut} \times \triangle R \qquad et \qquad \triangle S_{CTD} = -D^{mod}_{CTD} \times S^{brut}_{CTD} \times \triangle R_{CTD}$$

Avec les notations suivantes :

- D^{mod} et D^{mod}_{CTD} sont les durations modifiées respectives du titre à couvrir et de la CTD anticipée
- R et R_{CTD} sont les taux actuariels respectifs du titre à couvrir et de la CTD anticipée
- S et S_{CTD} sont les prix pied de coupon respectifs du titre à couvrir et de la CTD anticipée
- S^{brut} et S^{brut}_{CTD} sont les prix bruts (coupons courus inclus) respectifs du titre à couvrir et de la CTD anticipée

La variation du cours du contrat Futures LT peut s'écrire en fonction de la variation du taux actuariel de la CTD anticipée :

$$\triangle F = \frac{1}{f_{CTD}} \times \triangle S^{brut}_{CTD} = -\frac{1}{f_{CTD}} \times D^{mod}_{CTD} \times S^{brut}_{CTD} \times \triangle R_{CTD}$$

La variation de la base brute « étendue » s'écrit alors dans le cas général :

$$\triangle BB' = -D^{mod} \times S^{brut} \times \triangle R + \theta \times \frac{1}{f_{CTD}} \times D^{mod}_{CTD} \times S^{brut}_{CTD} \times \triangle R_{CTD}$$

On fait l'hypothèse que les variations du taux actuariel de la CTD sont parfaitement corrélées aux variations du taux actuariel du titre à couvrir :

$$\triangle R \equiv \triangle R_{CTD} \qquad (\textit{hypothèse de couverture})$$

On obtient alors le ratio optimal de couverture cherché dans le cas général :

$$\boxed{\theta^* = f_{CTD} \times \frac{D^{mod}}{D^{mod}_{CTD}} \times \frac{S^{brut}}{S^{brut}_{CTD}}}$$

Le calcul du nombre optimal de contrats Futures K^* qui tient compte du montant nominal N de la position à couvrir et du montant nominal d'un contrat Futures (Euro-Bund) est immédiat :

$$K^* = \theta^* \times \frac{EUR\,N}{EUR\,100000}$$

Notons pour terminer qu'il ne s'agit ni d'une couverture totale, ni même d'une couverture parfaite. Lors de la couverture par des contrats Futures, on échange un risque de taux contre les risques « résiduel » suivants :

- Risque de base (lié aux fluctuations de la base à CTD inchangée)
- Risque de changement de CTD sur la période de couverture
- Risque de corrélation entre le titre à couvrir et la CTD

La couverture n'aura donc de sens que si les risques « résiduels » sont négligeables par rapport au risque de taux que l'on cherche à couvrir.

Chapitre 8

MBS Arbitrage

On commence par présenter les emprunts hypothécaires en insistant sur les deux caractéristiques principales de ces structures, l'amortissement par annuités constantes et l'option de remboursement anticipé. Les MBS Pass-Through sont la forme la plus simple de titrisation, technique qui consiste à regrouper des créances de même types (actif) de façon à émettre des titres (passif) donnant à leurs porteurs les droits sur les cashflows à l'actif. La projection des cashflows d'un MBS Pass-Through est réalisée en assimilant l'actif du MBS comme une unique créance hypothécaire. Une première approche du pricing des MBS consiste à faire l'hypothèse que l'échéancier de cashflows est certain et à calculer un spread statique par rapport à un Treasury Bond de même duration. Ce spread ne tient pas compte du risque principal supporté par les porteurs de MBS Pass-Through garanties par les agences hypothécaires US : le risque de prépaiement. Quantifiable dans les échéanciers (tableaux d'amortissements) sous différents formats (SMM, CPR, PSA), la modélisation du prépaiement est essentielle pour l'analyse des risques d'un MBS Pass-Through et son pricing. Le spread ajusté du risque de prépaiement (OAS) d'un MBS Pass-Through dans la courbe des taux UST est calculable par simulation (Monte Carlo) ainsi que les mesures de risques associées (duration modifiée, convexité et hedge ratio). Ce spread est à la base du relative value trading au sein de l'univers des MBS Pass-Through.

8.1 MBS Pass-Through

Les prêts hypothécaires à taux fixe[1] diffèrent sur bien des aspects des structures obligataires étudiées jusqu'à présent (paragraphe 8.1.1). Les Mortgages Backed Sécurities (MBS) sont des structures gagées sur des pools de prêts hypothécaires à taux fixe (sous-jacent) qui constituent la forme la plus simple et la plus connue de titrisation (paragraphe 8.1.2). L'analyse d'un MBS donné peut être réalisée sous certaines hypothèses en considérant ce MBS comme une unique créance hypothécaire (approche « top-down »), l'approche « bottom-up » consistant à recalculer les cashflows du MBS à partir des cashflows des sous-jacents n'étant pas envisageable en pratique (paragraphe 8.1.3). Parmi les risques supportés par un investisseur en parts de MBS, le risque de prépaiement est le plus important et explique la majeur partie du spread entre le taux actuariel « apparent » du MBS et le taux d'un Treasury Bond de même maturité (paragraphe 8.1.4).

1. Dans l'esprit du cours, il s'agit d'un rappel et nous renvoyons donc les lecteurs à leurs ouvrages de mathématiques financières préférés pour plus d'information, par exemple : P. Poncet, R. Portrait & S. Hayat (1996) « Mathématiques Financières », Dalloz (Ed.).

8.1.1 Les Crédits Hypothécaires US

Un prêt hypothécaire[2] est un prêt à long terme accordé à un ménage par un organisme financier pour financer l'achat d'un bien immobilier. Les prêts hypothécaires ont trois spécificités qui les distinguent des structures obligataires étudiées jusqu'à maintenant :

- L'amortissement progressif du principal : Contrairement aux structures obligataires classiques pour lesquelles le principal est remboursé en totalité à l'échéance (in fine), les prêts hypothécaires et les prêts aux particuliers (ménages) d'une manière générale sont amortis au fur et à mesure de la vie du prêt de façon à adapter les montants payés aux revenus des ménages. Les structures les plus courantes de prêts hypothécaires sont les prêts à annuités constantes pour lesquels les remboursements (amortissement du principal + intérêts) sont constants et mensuels
- La garantie (on parle plus spécifiquement d'hypothèque) : Dans un prêt hypothécaire, l'emprunteur (ou débiteur) devient le propriétaire légal du bien immobilier mais le prêteur (ou créditeur) détient une hypothèque sur le bien immobilier qui n'est autre qu'un droit de transfert de propriété sur ce bien au cas où l'emprunteur serait dans l'incapacité à faire face à ces échéances de remboursement. Si le défaut de paiement est avéré, le créditeur peut faire valoir son droit et demander la saisie du bien hypothéqué devant une juridiction compétente. Le bien saisi est le plus souvent revendu par le créditeur qui peut ainsi recouvrer tout ou partie du principal
- L'option de prépaiement : Les prêts hypothécaires à taux fixe sont assortis d'une option de prépaiement détenue par le débiteur qu'il peut généralement exercer sans frais au terme d'une période de temps donnée (généralement trois ans). Cette option permet au débiteur de rembourser en totalité le prêt précédemment négocié par le biais d'un nouveau prêt négocié à un taux plus bas si les taux d'intérêts ont baissé entre temps. Cette option de prépaiement a des conséquences importantes en terme de risque et donc de pricing des MBS

Les prêts hypothécaires peuvent êtres à taux fixe ou à taux variable. Dans ce chapitre, nous traiteront uniquement du cas des prêts hypothécaires à taux fixe et donc des MBS à taux fixe qui sont les taux les plus couramment négociés aux Etats-Unis. La durée des prêts hypothécaires est négociable mais la durée de 30 ans est la plus souvent utilisée car c'est avec les durées les plus longues que l'on peut emprunter le plus (principal) pour une annuité donnée.

Considérons un prêt hypothécaire à taux fixe dont les caractéristiques sont :

- Montant Nominal (Principal) : N
- Taux Fixe du prêt : C
- Maturité : K Ans (12∗K Mois)

Dans le cadre d'un emprunt hypothécaire à annuité constante, le débiteur rembourse le mois k une somme fixe S composée d'une part du capital $\mathrm{A_k}$ (amortissement) et des intérêts $\mathrm{I_k}$ calculés sur la base du capital restant en début de période.

On a donc :

$$S_k = A_k + I_k \equiv Cte \qquad et \qquad \sum_{k=1}^{360} A_k = N$$

L'annuité constante S est donnée par la formule[3] :

2. mortgage loan, en anglais
3. Il s'agit d'un résultat classique de mathématique financière que le lecteur pourra retrouver facilement dans la littérature ou démontrer par lui-même (exercice)

$$S = \frac{N \times {}^{C}/_{1200}}{1 - (1 + {}^{C}/_{1200})^{-360}}$$

Connaissant S, il est possible de calculer le tableau d'amortissement (cf. Tableau 8.1 ci-dessous) qui donne pour chaque période k (k=1...360), les quantités suivantes :

- Montant des intérêts : $\mathrm{I_k}$
- Amortissement : $\mathrm{A_k}$
- Capital restant à rembourser : $\mathrm{N_k}$

Il s'agit d'un tableau d'amortissement normal ou initial c'est-à-dire sans prépaiement.

Période k	$\mathrm{I_k}$	$\mathrm{A_k}$	$\mathrm{N_k}$
0			N_0
1	$I_1 = N_0 \times {}^{C}/_{1200}$	$A_1 = S - I_1$	$N_1 = N_0 - A_1$
...	...	...	...
k-1	...	...	N_{k-1}
k	$I_k = N_{k-1} \times {}^{C}/_{1200}$	$A_k = S - I_k$	$N_k = N_{k-1} - A_k$
...	...	...	...
K	...	...	0

TAB. 8.1 – Tableau d'Amortissement d'un Prêt Hypothécaire

Notons que si le créditeur décide d'exercer l'option de prépaiement à la période k, il lui suffit de rembourser tout ou partie du capital restant $\mathrm{N_k}$ en plus du montant S pour le mois écoulé. Qu'il soit partiel ou total, le remboursement anticipé a toujours pour conséquence de racourcir la durée du prêt (ce qui n'est pas sans conséquence pour le pricing d'un MBS comme nous le verrons par la suite).

Donnons un exemple numérique pour fixer les idées.

Considérons un prêt hypothécaire à taux fixe dont les caractéristiques sont :

- Montant Nominal (principal) : $ 100000
- Taux Fixe du prêt (brut) : 6%
- Maturité : 30A (360M)
- Périodicité des cashflows : Mensuelle

Calcul de l'annuité constante S :

$$S = \frac{\$\,100000 \times {}^{6}/_{1200}}{1 - (1 + {}^{6}/_{1200})^{-360}} = \$\,599.55$$

Le débiteur doit donc rembourser un montant de $ 599.55 tout les mois pendant 30A. La somme totale des remboursements (360 fois 599.55) est égale à $ 215838 soit plus de deux fois le montant emprunté. Cette somme ne tient pas compte de l'actualisation, la valeur actuelle des 360 cashflows de $ 599.55 actualisés au taux de 6% est elle précisément égale à $ 100000 par construction.

Période k	I_k	A_k	N_k
0			100000
1	500	99.55	99900.45
2	499.50	100.05	99800.40
...	...	...	...
119	420.23	179.32	83865.95
120	419,33	180.22	83685.72
...	...	...	...
359	5.95	593.60	596.57
360	2.98	596.57	0

TAB. 8.2 – Tableau d'Amortissement sans Prépaiement (Exemple)

Le tableau d'amortissement initial (sans amortissement) du prêt est donné dans le tableau 8.2 ci-dessus (les montants sont en USD).

Si l'annuité est constante par construction, la répartition entre intérêts et amortissements évolue au fil du temps du fait que les intérêts sont calculés sur la base du capital restant en début de période[4] :

- La part des intérêts décroît avec le temps
- La part de l'amortissement croît avec le temps

Nous terminons ici cette présentation des prêts hypothécaires pour nous intéresser aux MBS, titres obligataires négociables sur un marché secondaire dont le sous-jacent est un pool homogène de prêts hypothécaires que nous analyserons comme une unique créance hypothécaire.

8.1.2 Titrisation de Prêts Hypothécaires

La titrisation de prêts hypothécaires a commencé au début des années 70 aux Etats-Unis avec l'émission du premier MBS Pass-Through[5] garanti par l'agence GNMA. Jusqu'à cette date, les crédits accordés par les banques (« marché primaire ») restaient dans leur bilan pendant toute leur durée de vie. La titrisation va changer la donne pour les banques et les autres institutions financières impliquées dans le crédit hypothécaire en leur permettant de regrouper des crédits de mêmes caractéristiques sous la forme de titres « marketés » auprès des investisseurs « institutionnels » (mutual funds, pension funds, hedge funds et assureurs), négociables sur un marché secondaire et garantis par des agences hypothécaires publiques (cf. Graphique 8.1 ci-dessous).

4. La reproduction du tableau d'amortissement dans sa totalité ne nous a pas semblé d'une grande utilité et nous faisons confiance au lecteur pour créer ce tableau sous le tableur de son choix à l'aide des formules données ci-dessus

5. Pour une introduction générale et complémentaire aux MBS Pass-Through, on pourra consulter Lowell L. (2001), Mortgage Pass-Through Securities, in Fabozzi F.J. Editor. « The Handbooks of Mortgage-Backed Securities » McGrawHill et Tuckman B. (1995), « Fixed Income Securities », John Wiley & Sons (Ed.)

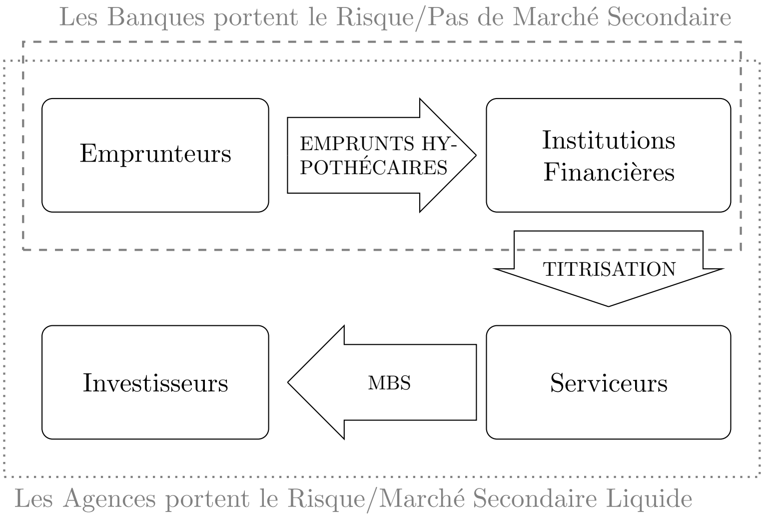

FIG. 8.1 – *Titrisation de Créances Hypothécaires*

Dans un MBS Pass-Through, les intérêts et amortissements issus des emprunts hypothécaires sous-jacents sont collectés par les banques originatrices et passées à un organisme « ad hoc » appelé serviceur qui prend en charge leur distribution auprès des investisseurs en proportion des parts de MBS détenues. Un investisseur détenant x% du montant nominal d'un MBS va donc recevoir, chaque mois, x% du total des cashflows issus des prêts hypothécaires sous-jacents au MBS (pour ce mois). Les MBS les plus courants sont ceux garantis par l'une des trois agences hypothécaires américaines (GNMA, FNMA et FHLMC). Ces agences garantissent le paiement des intérêts et le remboursement du principal dans des délais spécifiés au cas où une (ou plusieurs) créance hypothécaire sous-jacente est en « souffrance ».

C'est cette garantie qui a servi de catalyseur au développement du marché des MBS et permis d'en faire le second marché de dettes émises en dollar US derrière la dette émise par le Trésor américain (US Treasuries). L'avantage essentiel (mais apparent) du point de vue des investisseurs provient du fait qu'à risques de crédit et de liquidité équivalents (à ε-prés), un MBS pass-through offre un rendement significativement supérieur à un Treasury Bond de même « duration » :

$$\boxed{R_{MBS} = R_{UST} + Spread \qquad avec \qquad Spread > 0}$$

Cet avantage n'est cependant qu'apparent car cette rémunération supplémentaire est en grande partie justifiée par le risque de prépaiement supporté par les investisseurs.

Le rôle des agences hypothécaires est fondamental dans le développement du marché des MBS et témoigne de la volonté des autorités américaines de favoriser l'accès à la propriété aux Etats-Unis[6]. Ces agences sont au nombre de trois :

– **Government National Mortgage Association** (GNMA) ou « Ginnie Mae » est

6. Notons que dans le crédit traditionnel, les banques accordent les prêts (droit) et supportent les risques (devoir). Cette obligation de devoir assumer les risques liés aux prêts accordés est en quelque sorte auto-régulatrice. Avec la titrisation de créances façon MBS pass-through, les banques ont pu accorder des prêts sans assumer les risques ce qui constitue une entrave dans le fonctionnement auto-régulateur du marché du crédit. Car même si les agences hypothécaires sont sensées s'assurer que les crédits titrisés répondent à certains standards, elles dépendent pour cette analyse des informations que les banques veulent bien leur communiquer. L'effondrement du marché immobilier suite à la crise des subprimes a montré les limites d'un système de financement « extra-bancaire » de l'immobilier résidentiel US qui faisait reposer l'essentiel du risque de crédit sur les deux plus grosses agences hypothécaires américaines « Freddie Mac » et « Fannie Mae ».

une agence du gouvernement américain qui offre une garantie explicite sur les intérêts et le principal. Le rôle de GNMA est de promouvoir le marché secondaire (titrisation) pour des prêts hypothécaires bonifiés accordés à des ménages modestes. GNMA a émis le premier MBS pass-through en 1970
- **Federal National Mortgage Association** (FNMA) ou « Fannie Mae » est une entreprise « sponsorisée » par le gouvernement américain (Government Sponsored Entities ou GSE) et offre une garantie implicite sur les intérêts et le principal. Le rôle de FNMA est de promouvoir le marché secondaire (titrisation) pour des prêts hypothécaires bonifiés à destination des classes moyennes. FNMA a émis son premier MBS en 1981
- **Federal Home Loan Mortgage Corporation** (FHLMC) ou « Freddie Mac » est aussi une entreprise « sponsorisée » par le gouvernement américain qui offre une garantie implicite sur les intérêts et le principal. FHLMC a été créé en 1970 pour promouvoir un marché secondaire pour les emprunts hypothécaires conventionnels (non bonifiés). FHLMC a émis son premier MBS en 1971

A partir des années 80, d'autres institutions (banques, caisses d'épargne, promoteurs immobilier, etc.) ont émis des MBS Pass-Through « privés ». Les crédits sous-jacents ne répondant pas aux critères des agences gouvernementales, ces émissions ne sont pas garanties par ces dernières.

Le marché des MBS Pass-Through à taux fixe représente la plus grande partie du marché des MBS. Les autres types de structures sont :

- Pass-Through ARMs et Callable Pass-Through
- Strips Interest-only (IOs) & Principal-only (POs)
- Collateralized Mortgages Obligations (CMOs)

L'étude de ces structures n'est pas abordée dans ce cours.

Précisons tout de même que les structures de type CMO sont à l'origine du développement controversé des prêts hypothécaires Alt-A et subprime qui ont défrayé la chronique lors de la crise financière des années 2007-2009. Les CMOs se différencient des MBS traditionnels (pass-through) par la structure du passif. Là où les MBS pass-through ont un seul type d'engagement au passif (les porteurs de parts de MBS ayant tous les mêmes droits sur l'actif), les CMOs distinguent trois types d'engagements au passif hiérarchisés quand à leurs droits sur l'actif (les cashflows du pool de créances hypothécaires), par ordre de priorité :

1. Senior : Servis en premier / Risque faible (en théorie)
2. Mezzanine : Servis en second / Risque moyen
3. Equity : Servis en dernier / Risque élevé

On note que le risque croît avec l'ordre de priorité quant aux droits sur les cashflows à l'actif.

8.1.3 Projection des Cashflows

Un MBS Pass-Through a pour « sous-jacent » (actif) un « pool » de prêts hypothécaires homogène en terme de :

- Taux (Taux Fixe vs Taux Variable)
- Type d'emprunteurs (Prime, Alt-A, Subprime)
- Procédures appliquées pour l'octroi des prêts (Credit Standard)
- Clauses contractuelles (« Due-on-sales » vs « Assumable »)

Et ayant des :

- Maturités résiduelles similaires

– Taux de coupon similaires

L'homogéneité des prêts hypothécaires sous-jacents au MBS permet de projeter les cashflows du MBS comme si ce dernier était une unique créance hypothécaire dont les principales caractéritiques sont égales aux moyennes pondérées par les encours des principales caractéristiques des emprunts hypothécaires qui le composent.

Ainsi, le tableau d'amortissement d'un MBS (hors prépaiement, pour le moment) est calculé sur la base du :

– WAC : Weighting Average Coupon (Taux de coupon moyen)
– WAM : Weighting Average Maturity (Maturité résiduelle moyenne)

Formellement, si le pool contient H emprunts hypothécaires dont les caractéristiques génériques sont à la date k :

– Taux de coupon $\mathrm{C_h}$
– Maturité résiduelle $\mathrm{T_{h,k}}$
– Principal restant $\mathrm{N}_{\mathrm{h},k}$

On a :

$$\boxed{WAC_k = \frac{\sum_{h=1}^{H} N_{h,k} \times C_h}{\sum_{h=1}^{H} N_{h,k}} \qquad et \qquad WAM_k = \frac{\sum_{h=1}^{H} N_{h,k} \times T_h}{\sum_{h=1}^{H} N_{h,k}}}$$

Il est important de comprendre que **les projections de cashflows ainsi réalisées ne sont que des estimations des cashflows réellement perçus** même en l'absence de prépaiement[7]. En effet, contrairement aux créances individuelles, le taux de coupon varie au cours de la vie du MBS du fait que :

– Les prépaiements diffèrent selon les créances
– Les coupons diffèrent selon les créances

Lorsque les créances individuelles sont homogènes, le taux de coupon moyen peut être considéré comme constant (en première approximation). Il vérifie de façon triviale :

$$C_{MIN} = \underset{h=1\ldots H}{Min}\{C_h\} \leq C_{MBS} \leq \underset{h=1\ldots H}{Max}\{C_h\} = C_{MAX}$$

L'homogéneité du pool de créances hypothécaires (sous-jacent du MBS) garantie que l'erreur entre le taux de coupon estimé constant C_{MBS} du MBS et le taux de coupon réel variable $C^*_{MBS,t}$ est minimal :

$$\left|C_{MBS} - C^*_{MBS,t}\right| \leq C_{MAX} - C_{MIN} \leqq \epsilon$$

Notons que parmi les différents types de MBS Pass-Through ceux émis par les agences hypothécaires sont réputés êtres plus homogènes que ceux émis par des institutions financières privées. De même, parmi les MBS Pass-Through émis par les agences, ceux émis par GNMA sont les plus homogènes. Dans la suite, on considèrera que **le WAC du MBS est constant de sorte que l'on pourra analyser un MBS comme une unique créance hypothécaire dont le taux de coupon n'est autre que taux de coupon (apparent) du MBS**.

7. La procédure alternative à l'approche décrite dans ce paragraphe consisterait à projeter les cashflows au niveau des prêts hypothécaires sous-jacents aux MBS puis à les agréger. Cette approche de type « bottom-up » n'est pas envisageable car les informations nécessaires à sa mise en oeuvre ne sont pas communiquées aux investisseurs par les serviceurs

Les MBS Pass-Through sont généralement émis avec un coupon plein (ex : 6%) ou un demi-coupon (ex : 6.5%). Ils sont négociables sur un marché de gré-à-gré (OTC market) via des brokers ou des market makers.

Pour un prix de marché donné $\mathrm{P_{MBS}}$, le montant payé pour l'achat de \$ 100 de principal initial de ce MBS est égal à :

$$M_{MBS,t} = \$\,100 \times (1 - \alpha_{MBS,t}) \times P_{MBS,t}$$

$\alpha_{MBS,t}$ est le pourcentage du principal déjà remboursé.

Le prix d'un MBS comparé au pair est un critère de classification essentiel, on appelle :

- Current Coupon : Le MBS Pass-Through dont le prix de marché est le plus proche du pair (mais en-dessous du pair)
- Discount : Les MBS Pass-Through dont les prix sont inférieurs au pair
- Premium : Les MBS Pass-Through dont les prix sont supérieurs au pair

On a donc :

$$P_{Discount} < P_{Current\,Coupon} \leq 100 < P_{Premium}$$

Notons enfin qu'en pratique, les cashflows reçus par les investisseurs ne sont pas strictement égaux aux cashflows projetés selon la méthode précédemment décrite. La différence provient des frais prélevés par les serviceurs, exprimés en points de taux et calculés sur la base du principal restant en début de période et déduits des intérêts reçus des prêts hypothécaires sous-jacents. Le revenu restant (intérêts moins frais) est versé aux investisseurs sous la forme d'un coupon :

$$Coupon = WAC - Frais$$

Le montant des frais diminue donc progressivement au cours de la vie du MBS du simple fait de l'amortissement progressif du principal. Dans la suite du chapitre, on raisonnera « hors frais » afin de simplifier la présentation.

8.1.4 Spread MBS vs UST : Analyse Statique

L'analyse statique d'un MBS consiste à raisonner à structure d'amortissement donnée ce qui revient à considérer la structure de cashflows du MBS comme fixe et à calculer un spread au dessus des taux des US Treasuries[8].

Deux approches sont envisageables :

- Spread actuariel
- Spread zéro-coupon

Le calcul du **spread actuariel** consiste dans un premier temps à calculer le taux de rendement actuariel « statique » $\mathrm{R_{MBS}}$ du MBS par inversion de la relation « prix-taux » classique suivante :

$$V_{MBS} = \sum_{j=1}^{J} \frac{CF_{t_j}}{(1 + R_{MBS})^{t_j}}$$

8. Notons que les taux des MBS sont des taux à période mensuelle tandis que les taux des US treasuries sont des taux à période bi-annuelle (cf. Chapitre 2). Il est nécessaire d'en tenir compte dans la mise en oeuvre des formules données dans ce paragraphe. Dans la suite et sauf mention contraire, nous raisonnerons en taux mensuels côté MBS comme côté US Treasuries.

Avec :

- CF_t : cashflow statique du MBS pour la date t
- V_{MBS} : Valeur du MBS au prix du marché

On calcule ensuite, le taux actuariel interpolé pour un UST de maturité égale à la Duration ou à la Weighting Average Life[9] du MBS.

Pour calculer le spread par rapport à l'obligation d'Etat (fictive) de même durée de vie moyenne il est nécessaire de calculer le taux de rendement R_{UST} de cette obligation (fictive) en interpolant linéairement les taux actuariels des deux UST adjacentes ou en repriçant un UST fictif « au pair » pour cette maturité dans la courbe des taux zéro-coupon UST.

Au final, le spread actuariel est simplement égal à la différence entre le taux actuariel du MBS et le taux actuariel de l'obligation UST fictive :

$$Spread_{ACT} = R_{MBS} - R_{UST}$$

Le calcul du **spread zéro-coupon** est plus direct puisque ce spread se défini comme la rémunération de l'investisseur au dessus de la courbe des taux zéro-coupon UST.

Il se calcule donc par inversion de la relation prix-spread suivante :

$$P_{MBS} = \sum_{j=1}^{J} \frac{CF_{t_j}}{\left(1 + Z_{UST,t_j} + Spread_{ZC}\right)^{t_j}}$$

$Z_{UST,t}$ est le taux zéro-coupon Etat US (UST) pour la maturité t.

A titre d'exemple, considérons une position de montant nominal \$ 100000 sur un MBS qui possède les mêmes caractéristiques de taux de coupon et de maturité que le crédit hypothécaire de l'exemple du paragraphe 8.1.1 et dont le prix de marché est 95% (il cote « Discount »).

Compte tenu de ces hypothèses, le tableau d'amortissement de notre MBS en l'absence de prépaiement est donc identique au tableau d'amortissement du crédit hypothécaire (cf. tableau 8.2 du paragraphe 8.1.1).

On peut à partir des éléments que l'on vient de donner calculer le taux actuariel « statique » du MBS et la duration du MBS. On trouve :

$$R_{MBS} = 6.49\% \qquad et \qquad D_{MBS} = 10.47$$

On note que la duration du MBS (10.47 Ans) est beaucoup plus faible que sa maturité (30 Ans) ce qui s'explique par l'amortissement progressif du principal tout au long de la vie du MBS.

Donnons-nous maintenant des taux zéro-coupons UST pour les principales maturités[10] (cf. tableau 8.3).

9. La durée de vie moyenne (WAL) est la moyenne des dates de cashflows pondérées par l'amortissement du principal :

$$WAL = \frac{\sum_{k=1}^{K} A_k \times T_k}{\sum_{k=1}^{K} A_k} \qquad avec \qquad \sum_{k=1}^{K} A_k = 100$$

10. Ces taux sont en période mensuelle

T	1A	2A	3A	4A	5A	7A	10A	15A	20A	30A
Tx ZC (%)	4	4.1	4.2	4.29	4.39	4.56	4.81	5.17	5.47	5.88

TAB. 8.3 – Taux Zéro-Coupon UST (Exemple)

On suppose de plus que le taux repo GC à un 1M est à 3.5%.

On est donc en mesure de calculer le spread zéro-coupon du MBS au dessus de la courbe des taux zéro-coupon UST (on utilise la méthode d'interpolation linéaire pour calculer les taux manquants), on trouve :

$$Spread_{ZC} = 126\, bp$$

Ce spread zéro-coupon correspond à la rémunération demandée par le marché pour assumer les risques supplémentaires du MBS par rapport à un investissement similaire (même structure de cashflows) en US Treasuries.

Nous terminons ici l'exemple numérique.

Le spread qu'il soit actuariel ou zéro-coupon rémunère tous les risques asymétriques pris par l'investisseur en parts de MBS par rapport à un investissement « équivalent » en US Treasuries.

En toute généralité, les risques supportés par un investisseurs sur une position de MBS sont :

- Le risque de marché
- Le risque de crédit (FNMA/FHLMC)
- Le risque de liquidité
- Le risque de prépaiement

Le tableau 8.4 ci-dessous donne les principales caractéristiques des risques précédents.

Risque	Description	Rémunéré	Spécifique
Marché	A structure d'amortissement donnée (et donc à structure de cashflows statique) les prix fluctuent en fonction des taux d'intérêts (effet d'actualisation commun à la quasi-totalité des instruments de taux)	Non, car symétrique	Non, propre à tous les produits de taux
Crédit	Ginnie Mae, Fannie Mae et Freddy Mac garantissent en totalité et sans délai le paiement du principal et des intérêts. Le risque de crédit est inexistant pour un MBS GNMA et faible en pratique pour les MBS garantis par les agences FNMA et FHLMC	Oui	Non, propre à toutes les titres de dette émis par des institutions autres que les Etats AAA
Liquidité	La taille des encours et la présence des MBS dans les grands indices obligataires US et mondiaux les rend incontournables pour les investisseurs finaux. Le marché des MBS est presqu'aussi liquide que le marché des US Treasuries	Oui	Non, propre à tout les produits OTC
Prépaiement	Les emprunteurs ont une option de remboursement anticipé qu'ils peuvent exercer à tout moment principalement en cas de baisse des taux afin de refinancer le prêt à un taux plus bas	Oui	Oui, spécifique aux MBS

TAB. 8.4 – Analyse des Risques d'un MBS

Parmi ces risques, le **risque de prépaiement** est le seul risque spécifique aux MBS et explique en général la plus grande partie du spread MBS vs UST. Ce risque tient au fait que le prépaiement est réalisé à l'initiative des emprunteurs et intervient principalement en cas de baisse des taux. Le prépaiement est donc un évènement négatif pour l'investisseur en parts de MBS puisqu'il doit replacer le principal prépayé à des taux plus bas.

Le risque de prépaiement est au cœur de l'analyse des MBS et de leur pricing, il est étudié dans la section qui suit.

8.2 Analyse du Risque de Prépaiement

On commence par présenter les trois principales mesures du prépaiement que sont les standards SMM, CPR et PSA ainsi que l'impact du prépaiement sur le calcul du tableau d'amortissement d'un MBS pour un scénario de prépaiement donné quelconque. Le prépaiement a pour principale conséquence de modifier la structure de cashflows du MBS ce qui n'est pas sans impacter le calcul du taux de rendement actuariel « statique ». On termine par une présentation générale des facteurs à prendre en compte dans les modèles de prépaiement.

8.2.1 Prepaiement : Conventions et Calcul

Le prépaiement s'exprime sous la forme d'un montant d'amortissement supplémentaire par rapport à l'amortissement initial. Plusieurs standards (conventions) existent pour le mesurer, nous allons présenter les trois principaux :

- SMM
- CPR
- PSA

Ce montant d'amortissement supplémentaire peut naturellement et simplement être calculé sur la base du capital restant en fin période auquel on applique un taux de prépaiement mensuel appelé Single Monthly Mortality (SMM).

Le SMM peut donc être exprimé sous la forme suivante :

$$SMM = 100 \times \frac{Capital\ Restant\ Initial - Capital\ Restant\ Observé}{Capital\ Restant\ Initial}$$

avec :

- Capital Restant Initial : Capital restant en fin de période hors prépaiement
- Capital Restant Observé : Capital restant en fin de période prépaiement inclus

Ce taux de prépaiement mensuel est le plus souvent présenté sous sa forme annualisée appelée Conditional Prepayment Rate (CPR) :

$$CPR = 100 \times \left[1 - \left(1 - \frac{SMM}{100}\right)^{12}\right]$$

Les premières études statistiques sur les prépaiements, réalisés par le HUD[11] sur la base d'historiques de prépaiements de prêts hypothécaires garantis par le FHA[12], ont mis en avant l'âge du prêt hypothécaire comme facteur prépondérant dans le comportement de prépaiement.

Les données historiques montrent que les ménages ont tendance à très peu prépayer au début du prêt, le prépaiement augmentant lentement mois après mois pour se stabiliser après 30 mois en moyenne. Ce comportement s'explique d'ailleurs assez bien puisque :

- La probabilité de changer d'appartement ou de maison est logiquement très faible au début du prêt puis augmente avec l'âge du prêt
- Les ménages (et plus spécifiquement les « primo-accédents ») ont à faire face à des frais d'équipement importants dans les premiers mois qui suivent leurs emménagements ce qui obère d'autant leurs capacités de prépaiement

11. Le « U.S. Department of Housing and Urban Development » (HUD) est l'organe central du gouvernement américain en charge de la politique du logement et du développement urbain. Créé en 1937 (U.S. Housing Act), il supervise aujourd'hui toutes les agences gouvernementales impliquées dans le crédit hypothécaire

12. Le « Federal Home Agency » (FHA) est une agence gouvernementale US crée en 1934 par décision politique (National Housing Act) pour relancer le marché immobilier US plombé par la réticence des banques à accorder des crédits hypothécaires faute de garanties suffisantes dans une période où l'activité économique était au plus bas et le chômage au plus haut (Grande Dépression)

Le Public Securities Association (PSA) est un modèle de prépaiement qui reprend les invariants constatés dans ces études sous la forme d'un scénario « stylisé » :

$$CPR_{PSA} = 0.2\% \times Min\,(age_{MBS}, 30)$$

Concrètement, le scénario PSA de base (aussi appelé 100% PSA) se présente sous la forme de 360 taux de prépaiement (mensuels) exprimés en CPR (annuel) :

- Il commence à 0.2% CPR le premier mois
- Il s'accroît de 0.2% CPR chaque mois jusqu'au 30ème mois
- Il se stabilise à 6% CPR jusqu'à la maturité du prêt

Notons que des vitesses de prépaiement différentes du scénario 100% PSA peuvent être exprimées sous la forme de multiples de ce scénario de base. Ainsi, un taux de 150% PSA correspond au scénario de prépaiement suivant :

- Il commence à 0.3% CPR le premier mois
- Il s'accroît de 0.3% CPR chaque mois jusqu'au 30ème mois
- Il se stabilise à 9% CPR jusqu'à la maturité du prêt

A titre d'exemple, calculons les taux de prépaiement SMM, CPR et PSA pour un MBS dont les caractéristiques sont :

- Capital Restant Initial : \$154000
- Capital Restant Observé : \$153000
- Age MBS : 25M

On trouve par application directe des formules données ci-dessus :

- SMM : 0.65%
- CPR : 7.53%
- PSA : 150% (ou « 150% PSA »)

Le dernier calcul s'explique par le fait que le CPR correspondant au scénario 100% PSA pour un prêt hypothécaire agé de 25 mois est $0.2\% \times Min\,(25, 30) = 0.2\% \times 25 = 5\%$. Par conséquent, un CPR de 7.53% pour un prêt hypothécaire agé de 25 mois correspond à un scénario de 150% PSA.

Fin de l'exemple numérique.

Le PSA est un standard de calcul utile pour la communication entre intervenants sur le marché des MBS mais limité en tant que scénario crédible de refinancement car il ne tient pas compte du facteur aujourd'hui prépondérant dans les comportements de prépaiement, le refinancement lié à la baisse des taux d'intérêts.

Par généralisation du scénario PSA, on appellera scénario de prépaiement pour un MBS de maturité K, la donnée des K taux de prépaiement à appliquer à chaque période k allant de 1 à K :

$$\boxed{\textit{Scénario de prépaiement} = \{CPR_k\}_{k=1...K}}$$

Dans la suite, nous utiliserons essentiellement le standard SMM/CPR pour présenter et calculer les prépaiements.

Il nous reste à intégrer le prépaiement dans le calcul du tableau d'amortissement.

Le principe consiste à se donner un scénario de prépaiement et à recalculer l'annuité constante à chaque période sur la base du principal restant à rembourser en début de période.

Notons que ce principe est parfaitement cohérent avec le calcul du tableau d'amortissement sans prépaiement donné au paragraphe 8.1.1 du simple fait que dans ce cas, l'annuité recalculée à chaque période ne change pas. En d'autres termes, lorsqu'il n'y a pas de prépaiement, on peut écrire [13] :

$$S_k \equiv S\,(k = 1 \ldots K) \qquad avec \qquad S_k = \frac{N_k \times C/1200}{1 - (1 + C/1200)^{-T+k}}$$

Ce résultat n'est par contre plus valable lorsqu'il y a prépaiement ce qui oblige à recalculer l'annuité S_k à chaque étape k.

Nous avons regroupé les différentes formules nécessaires au calcul du tableau d'amortissement avec prépaiement dans le tableau 8.5 ci-dessous.

Description	Quantité	Formule
Annuité « constante » en k	S_k	$\frac{N^*_{k-1} \times C/1200}{1-(1+C/1200)^{-K+k}}$
Intérêts en k	I_k	$N^*_{k-1} \times \frac{C}{1200}$
Amortissement « constant » en k	A_k	$S_k - I_k$
Capital restant en k calculé sur la base de l'amortissement « constant »	N_k	$N^*_{k-1} - A_k$
Capital restant « réel » en k	N^*_k	$N_k \times (1 - SMM_k)$
Prépaiement en k (en plus de l'amortissement « constant »)	A^*_k	$N_k \times SMM_k$
Amortissement total en k	A^{**}_k	$A_k + A^*_k$

Tab. 8.5 – Calcul du Tableau d'Amortissement avec Prépaiement

Le tableau d'amortissement consiste à calculer ces différentes quantités pour k allant de 1 à K (date de maturité du MBS) en prenant pour valeur initiale pour le capital restant « réel » en 0, le montant nominal N du MBS :

$$N^*_0 = N \qquad (initialisation\ du\ calcul)$$

<u>A titre d'exemple</u>, reprenons l'exemple du paragraphe 8.1.1 et appliquons un taux de prépaiement constant CPR = 5% [14]. Le tableau d'amortissement initial (avec amortissement) du prêt est donné dans le tableau 8.6 ci-dessous (les montants sont en USD).

13. Il s'agit encore d'un résultat classique de mathématique financière que le lecteur pourra retrouver facilement dans la littérature ou démontrer par lui-même par récurrence (exercice)

14. $SMM = 100 \times \left[1 - \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{1/12}\right] = 0.4265\%$ est constant sur toute la durée de vie du MBS

k	S_k	I_k	A_k	N_k	N_k^*
0					100000
1	599.55	500	99.55	99900.45	99474.34
2	596.99	497.37	99.62	99374.72	98950.86
...					
119	362.06	253.77	108.29	50644.75	50428.73
120	360.51	252.14	108.37	50320.37	50105.73
...					
359	129.79	1.29	128.50	129.15	128.60
360	129.24	0.64	128.60	0	0

TAB. 8.6 – Tableau d'Amortissement avec Prépaiement (Exemple)

On note que le montant reçu chaque mois par un détenteur de part de MBS (colonne S_k) n'est plus constant à prépaiement non nul comme annoncé précédemment.

8.2.2 Impact du Prépaiement sur le Taux Actuariel

Reprenons l'exemple du paragraphe 8.1.4 et regardons l'impact du prépaiement sur le taux actuariel d'un MBS.

On rappelle que le MBS a les caractétistiques suivantes :

– Taux de Coupon : 6%
– Maturité : 30A (360M)

Commençons par regarder l'impact du prépaiement sur l'amortissement total (amortissement initial plus prépaiement) dans les quatre cas suivants :

– CPR : 0% (pas de prépaiement)
– CPR : 1%
– CPR : 5%
– CPR : 10%

Le graphique 8.2 ci-dessous confirme l'intuition, plus le taux de prépaiement est élevé et plus le poids de l'amortissement est déplacé des maturités les plus lointaines vers les maturités les plus proches de sorte que l'amortissement total devient décroissant pour les taux de prépaiement élevés.

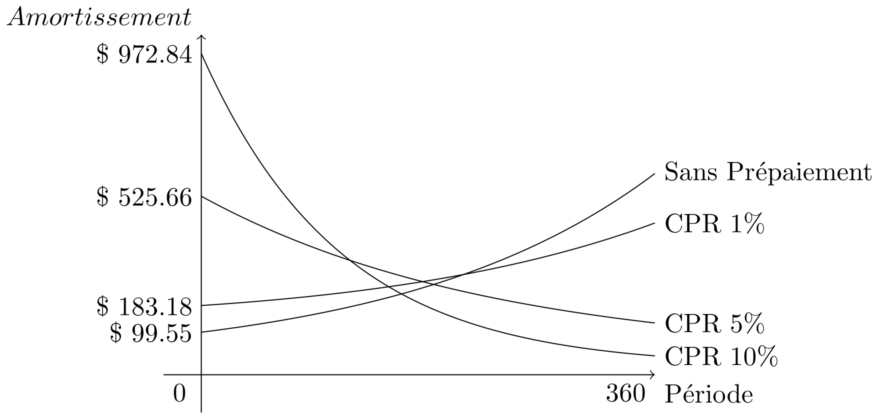

FIG. 8.2 – *Impact du Taux de Prépaiement sur l'Amortissement*

Pour comprendre l'effet du prépaiement sur le taux actuariel d'un MBS, il faut distinguer selon que celui-ci traite :

- Au pair (P = 100%)
- Premium (P = 105%)
- Discount (P = 95%)

Dans les trois cas, nous allons calculer les éléments d'analyse principaux suivants :

- Taux actuariel du MBS
- Duration du MBS
- Spread Zéro-Coupon MBS vs UST [15]

Les résultats des calculs sont regroupés dans le tableau 8.7 ci-dessous [16] :

	Au Pair (100%)	Discount (95%)	Premium (105%)
0%	6% - 10.78 - 167pb	6.49% - 10.47 - 218bp	5.55% - 11.07 - 119bp
1%	6% - 9.93 - 167pb	6.53% - 9.63 - 223bp	5.51% - 10.22 - 116bp
5%	6% - 7.40 - 167pb	6.71% - 7.11 - 242bp	5.35% - 7.67 - 98bp
10%	6% - 5.44 - 167pb	6.97% - 5.20 - 270bp	5.12% - 5.67 - 74bp

TAB. 8.7 – Impact du Prépaiement sur le « Pricing » d'un MBS

On note que si le MBS traite « au pair » alors les changements dans la vitesse de prépaiement n'affectent pas le calcul du taux actuariel :

- Si le prépaiement est plus rapide que prévu alors le supplément de principal retourné va parfaitement compenser la perte de revenus futurs
- Si le prépaiement est moins rapide que prévu alors le retard dans le prépaiement est parfaitement compensé par un supplément de revenus futurs

15. Les calculs ont été réalisés en prenant une courbe des taux UST zéro-coupon « flat » à 4.5% (taux en période mensuelle)
16. Les chiffres donnés dans les cellules de ce tableau sont (dans l'ordre) : taux actuariel - duration - spread zéro-coupon

Pour le dire autrement, lorsque **le MBS traite « au pair », le supplément de principal retourné à l'investisseur peut être replacé au taux du MBS dans le marché (et réciproquement)**.

Si le MBS traite « discount » (resp. « premium »), le taux actuariel augmente (resp. baisse) avec le taux de prépaiement car le temps pendant lequel le principal restant est rémunéré à un taux inférieur (resp. supérieur) au taux du marché est réduit.

Dans ces deux cas les effets « principal » et « coupon » ne se compensent plus :

– Si le prépaiement est plus rapide que prévu alors le supplément de principal retourné ne va pas compenser la perte, plus importante (resp. faible) en valeur actuelle, de revenus futurs
– Si le prépaiement est moins rapide que prévu alors le retard dans le prépaiement est compensé par un supplément, plus important (resp. faible) en valeur actuelle, de revenus futurs

On note par ailleurs que, dans les trois cas, la duration du MBS diminue avec la hausse du taux de prépaiement du simple fait que plus le taux de prépaiement est élevé et plus le poids des cashflows sur les échéances les plus proches est important. Notons enfin l'évolution des spreads zéro-coupon « MBS vs UST » est cohérente avec l'évolution du taux actuariel du MBS (on rappele que la courbe des taux zéro-coupon utilisées dans les calcul est flat à 4.5%).

8.2.3 Prepaiement : Analyse et Modélisation

Nous avons vu au paragraphe 8.2.1 que l'âge d'un MBS a été le premier facteur explicatif identifié en matière de prépaiement. Cependant, la fin du régime de change fixe (Brettons Wood) au début des années 70 puis les politiques de déréglementation financière et de lutte contre l'inflation menées au cours des années 80, ont entraîné une forte hausse de la volatilité des taux d'intérêts et donc des opportunités de refinancement.

Les taux d'intérêts sont devenus le facteur prépondérant.

La première et principale cause du prépaiement est donc liée au refinancement. Dans une approche normative de l'exercice de l'option de prépaiement, un emprunteur devrait prépayer son emprunt hypothécaire dès que le capital restant à rembourser $\mathrm{N_{PH}}$ est inférieur à la valeur du prêt hypothécaire $\mathrm{V_{PH}}$:

$$\boxed{N_{PH} < V_{PH} \qquad (condition\ normative\ d'exercice\ de\ l'option)}$$

Si en théorie, les emprunteurs devraient exercer l'option dès que cette condition est satisfaite, dans la pratique, l'observation montre que les emprunteurs (ménages) ne se comportent pas de cette façon. Le comportement des emprunteurs en matière de refinancement peut être expliqué par l'existence de coûts :

– Les <u>coûts objectifs</u> sont les frais de transaction supportés par les emprunteurs lors du refinancement. Ces frais sont appelés « points » car ils sont exprimés en points de taux qui viennent s'ajouter au (nouveau) taux d'intérêt négocié
– Les <u>coûts subjectifs</u> portent sur la collecte de l'information, le traitement de cette information et la prise de décision

L'impact principal des coûts subjectifs est l'existence d'un délai dans l'exercice de l'option de prépaiement.

Deux facteurs validés empiriquement viennent encore compliquer l'analyse prospective d'un pool de MBS en terme de refinancement :

1. L'effet « media » : L'activité de refinancement est influencée par les médias qui ont tendance à communiquer sur les baisses de taux lorsqu'elles ont un caractère « exceptionnel » (baisse importante dans un temps limité et/ou nouveau plus bas) de sorte que les emprunteurs vont plus prépayer dans ces situations
2. L'effet « burnout » : Les MBS qui ont beaucoup prépayé dans le passé ont tendance à répondre beaucoup plus lentement et faiblement à une nouvelle baisse des taux d'intérêt. Les emprunteurs qui ont la propension à prépayer la plus forte (ou les coûts de prépaiement les plus faibles) tendent à prépayer les premiers de sorte que les emprunteurs restants au sein du pool sont ceux qui ont la propension à prépayer la plus faible (ou les coûts de prépaiement les plus élevés)

Le refinancement n'est cependant pas la seule cause du prépaiement.

Outre le refinancement, d'autres facteurs peuvent motiver un remboursement anticipé et ceci sans lien direct avec le niveau des taux d'intérêt :

- Le déménagement : ce facteur vient en seconde position dans les causes de prépaiement après le refinancement. Il est saisonnier car très lié aux cycles scolaires et est moins important sur les prêts hypothécaires « assumable » car ces derniers peuvent être repris par les acheteurs en même temps que le bien immobilier contrairement aux prêts hypothécaires « due-on-sales »
- Le défaut de paiement : Il entraîne mécaniquement le prépaiement car les prêts hypothécaires sont contractuellement remboursables en totalité en cas de défaut. Le défaut de paiement entraîne généralement la saisie puis la vente du bien immobilier dont le produit permettra de recouvrir tout ou partie du capital restant à rembourser
- La destruction du bien immobilier (garantie) : Elle entraîne aussi mécaniquement le prépaiement car les prêts hypothécaires sont contractuellement remboursables en totalité en cas de destruction du bien immobilier (incendie, innondation, catastrophe naturelle)

Dans les deux derniers cas le risque de crédit est supporté par les agences hypothécaires et non par les investisseurs. Notons qu'il existe d'autres facteurs explicatifs du comportement des investisseurs en matière de prépaiement dont l'exposé sort du cadre de ce cours.

C'est sur la base de ces observations que sont construit les modèles de prépaiement.

Ces modèles sont généralement des modèles économétriques dont les equations reflètent les régularités comportementales que nous venons de décrire ainsi que d'autres facteurs non traités ici et dont les paramètres sont estimés sur la base de données passées. Ces modèles permettent de « prévoir » les taux de prépaiements futurs (CPR/SMM) à partir d'un certains nombre de variables observées ou simulées (dont les taux d'intérêts).

Notons que construire et faire évoluer un modèle de prépaiement est une activité très spécifique qui suppose des compétences mais surtout une culture en modélisation socio-économique que ne possèdent pas toujours les ingénieurs financiers quantitatifs[17]. Nous renvoyons le lecteur intéressé par ce vaste sujet sur la littérature[18] et aux sites des sociétés spécialisées[19].

17. A titre d'exemple, la société RiskMetrics (pourtant l'un des tout premiers éditeurs de logiciels de calcul des risques et à ce titre disposant en interne de sa propre équipe de recherche quantitative et d'ingeniérie financière) a fait appel à une société externe (Derivatives Solutions) pour lui fournir un modèle de prépaiement lors de l'intégration des MBS dans le logiciel RiskManager

18. Cf. Bykhovsky M. (2001), Overview of Recent Prepayment Behavior and Advances, in Fabozzi F.J. Editor. « The Handbooks of Mortgage-Backed Securities » McGrawHill

19. Voir par exemple le site de la société Andrew Davidson & Co

8.3 Pricing et Arbitrage

En première analyse, on peut considérer qu'être Long d'un MBS Pass-Through (émis par une Agence Hypothécaire US) est équivalent à être simultanément :

- Long d'un portefeuille d'obligations du Trésor US
- Short des options implicites de remboursement anticipé

Cette décomposition est à la base des techniques de calcul de l'Option Adjusted Spread (OAS) par simulation (Monte Carlo), du calcul des indicateurs de risques (coût des options, duration effective et convexité effective) et des techniques d'arbitrages associées (contre UST ou au sein même de l'univers des MBS).

8.3.1 Calcul de l'Option Adjusted Spread d'un MBS

En toute généralité, le prix théorique d'un MBS peut être obtenu en calculant l'espérance mathématique des valeurs actuelles des cashflows. L'actualisation (pour un cashflow donné) est réalisée au taux zéro-coupon sans risque (correspondant à la maturité du cashflow) plus un spread appelé « Option-Adjusted Spread »[20] (OAS) représentatif des risques résiduels (crédit, liquidité) non pris en compte dans le calcul.

On peut donc écrire :

$$\boxed{P_{MBS} = E\left\{\sum_{j=1}^{J} \frac{\tilde{F}_j}{\prod_{k=0}^{j-1}\left(1+\tilde{R}_k+OAS\right)}\right\}}$$

Avec :

- P_{MBS} : Prix de marché du MBS
- $\tilde{F}_j$: Cashflow (aléatoire) du MBS en j
- $\tilde{R}_k$: Taux forward (aléatoire) 1M départ date k
- $E(.)$: Espérance mathématique sous probabilité risque-neutre
- OAS : Option-adjusted spread

De façon générale, les trois approches les plus couramment utilisées pour la valorisation (ou le pricing) des intruments financiers sont :

1. Le calcul direct via une formule explicite (closed-form formula)
2. Le calcul par « backward valuation » de la date d'échéance de l'instrument financier à la date de valorisation à partir d'une simulation discrète arborescente du facteur de risque sous-jacent
3. Le calcul par simulation de Monte-Carlo

Dans le cas des MBS, il n'existe pas de formule explicite de valorisation et la valorisation par arbre n'est pas possible d'un point de vue théorique[21].

Les procédures de valorisation par arbre ne sont pas applicables aux MBS Pass-Through du fait que **le prix d'un MBS ne dépend pas uniquement du niveau des taux d'intérêts au nœud de valorisation mais du chemin complet parcouru par les taux d'intérêts pour arriver jusqu'à ce nœud**. Cette propriété des MBS pass-through, connue

20. Littéralement, « écart de taux d'intérêt ajusté du coût des options de prépaiement » ou encore « écart de taux d'intérêt hors coût des options de prépaiement ».

21. Ni même en pratique puisque l'arbre binomial à construire pour pricer un MBS de 30A de maturité est de profondeur 360 (un noeud par mois) ce qui représente 2^{360} ($\tilde{}10^{11}$) chemins possibles dans l'arbre !

sous le nom de « path dependency », est due à deux effets spécifiques du comportement des emprunteurs en matière de prépaiement que nous avons mentionné précédemment, l'effet « media » et l'effet « burnout ». En d'autres termes, l'histoire des taux d'intérêts depuis la création du MBS pass-through détermine l'etat du pool de créances hypothécaires au nœud de valorisation.

Nous allons donc utiliser la méthode dite de Monte Carlo pour le calcul (estimation) de l'espérance mathématique précédente.

La méthode de Monte Carlo consiste à estimer l'espérance mathématique E(.) par simulation numérique. Elle permet en particulier d'intégrer le risque de prépaiement dans les calculs contrairement aux approches statiques étudiées jusqu'à maintenant dont les résultats sont contingents aux scénarios utilisés.

Concrètement, on se donne une valeur arbitraire K pour l'Option-adjusted spread (OAS) et on procède par étape[22].

Etape 1 – Génération des Scénarios de Taux Forwards 1M UST

On utilise un modèle de taux discrétisé pour simuler des trajectoires possibles (réalisations) des taux 1M forwards pour les dates de départ j=0... J-1. Dans le cas d'un processus d'Ornstein-Ulhenbeck, on a[23] :

$$\tilde{Z}_{t+h} = \tilde{Z}_t + \alpha \times (\beta - R_t) \times h + \sigma \times \tilde{\varepsilon}_t \times \sqrt{h}$$

où $\tilde{\varepsilon}_t$ suit une loi normale centrée-réduite.

Le modèle est calibré sur les prix actuels des obligations UST afin de déterminer α, β et σ.

Au final, on obtient I trajectoires possibles des taux forwards 1M pour les J dates forwards successives :

$$\{Z_{ij}\}_{i=1...I,j=1...J}$$

Etape 2 – Calcul des Taux de Prépaiement

On utilise un modèle de prépaiement permettant de calculer les taux de prépaiement aux dates j=1... J pour une trajectoire donnée des taux forwards 1M.

On applique ce modèle aux I trajectoires possibles des taux forwards 1M précédemment calculées et on en déduit I scénarios de prépaiement (J-uplet de taux de prépaiement) :

$$\{\alpha_{ij}\}_{i=1...I,j=1...J}$$

Etape 3 – Calcul de la structure de Cashflows

Etant donné un scénario de prépaiement, on peut calculer le tableau d'amortissement complet correspondant à ce scénario :

- Amortissement (initial et prépaiement)
- Intérêts

On combine ensuite amortissement et intérêts pour obtenir la structure de cashflows du MBS pour ce scénario.

En appliquant ce même calcul aux I scénarios de prépaiement, on obtient I structures de cashflows :

22. Cf. Fabozzi F.J., Richard S.F., Horowitz D.S. (2001), Valuation of Mortgage-Backed Securities, in Fabozzi F.J. Editor. « The Handbooks of Mortgage-Backed Securities » McGrawHill (Ed.)
23. On utilise ici la méthode dite d'Euler-Maruyama de discrétisation du processus d'Ornstein-Ulhenbeck dont l'erreur est de l'ordre du pas de discrétisation.

$$\{F_{ij}\}_{i=1...I,j=1...J}$$

Etape 4 – Calcul du Prix Moyen à Spread donné K

Le prix théorique P_{th} du MBS va être estimé par la moyenne des prix correspondants à chacune des I trajectoires simulées d'évolution des taux zéro-coupon sans risque (UST) :

$$\boxed{P_{th}(K) = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{F_{ij}}{\prod_{k=0}^{j-1}(1+Z_{ij}+K)^{t_j}}}$$

Le prix $P_{th}(K)$ est calculé ici pour un niveau de spread arbitraire K.

Etape 5 – Calcul de l'OAS

On procède enfin par dichotomie pour calculer l'OAS.

L'OAS est la valeur K^* pour laquelle le prix théorique $P_{th}(K^*)$ est égal au prix de marché P_{MBS}.

$$\boxed{P_{th}(K^*) = P_{MBS} \qquad \Longrightarrow \qquad OAS = K^*}$$

Il est important de noter que le résultat obtenu n'est pas la valeur exacte de E(.) (ou implicitement de l'OAS) mais une approximation de E(.) (ou implicitement de l'OAS) dont la précision dépend du nombre de scénarios utilisés.

Le choix du nombre I de scénarios à utiliser dans le calcul dépend de deux objectifs contradictoires :

1. La précision du calcul
2. Le temps de calcul

Il existe plusieurs techniques dites de réduction de variance permettant de réduire le nombre de scénarios et donc le temps de calcul à précision du calcul inchangée[24]. L'exposé de ces techniques sort du cadre dans ce cours, nous invitons le lecteur à se référer à la littérature tant théorique qu'appliquée sur la méthode de Monte Carlo et ses applications en finance[25]

Enfin, l'algorithme précédemment décrit permet de calculer l'Option-Adjusted Spread d'un MBS Pass-Through connaissant le prix de marché du MBS. Il est bien évidemment possible de calculer le prix théorique d'un MBS connaissant l'OAS du MBS ou plus exactement sur la base d'une estimation externe de l'OAS du MBS. Il suffit d'appliquer le même algorithme à l'exception de l'Etape 5.

8.3.2 Calcul des Indicateurs de Risques

La technique de calcul de l'OAS d'un MBS par Monte Carlo (simulation) permet d'intégrer le risque de prépaiement contrairement aux approches statiques dont les résultats dépendent directement des scénarios spécifiques utilisés. Néanmoins, le calcul du coût de l'option de prépaiement nécessite de se donner un spread zéro-coupon statique de référence.

24. A titre d'exemple, F. Fabozzi propose d'utiliser l'ACP pour réduire de façon drastique le nombre de scénarios. La méthode consiste à estimer le prix du MBS (à OAS donné) par la moyenne des prix sur les premiers facteurs issues de l'ACP pondérée par les poids des facteurs. Voir Fabozzi F. (1998), « Valuation of Fixed Income Securities and Derivatives », Wiley.

25. Voir par exemple l'article de Boyle P., Broadie M. et Glasseman P. (1997), « Monte Carlo methods for security pricing », Journal of Economics Dynamics and Control (n°21) qui constitue une référence technique sur ce sujet pour le pricing des options « américaines »

Par convention, le spread zéro-coupon statique est calculé sur la base des taux zéro-coupon forwards comme scénario de référence :

Coût des Options = Spread Statique Forward – Option-Adjusted Spread

Le coût des options correspond à la rémunération demandée par le marché pour assumer le risque de prépaiement sur un MBS donné.

L'algorithme de calcul de l'OAS peut être appliqué pour calculer numériquement la duration effective et la convexité effective. La technique consiste à appliquer une variation uniforme (shift) de ΔX bp à la courbe des taux zéro-coupon UST initiale pour calculer le prix d'un MBS dans les deux cas à OAS constant :

- $\text{Prix}_{+\Delta X}$
- $\text{Prix}_{-\Delta X}$

On procède de la même façon qu'au paragraphe 8.3.1.

Ensuite, la duration effective et la convexité effective peuvent être calculées de façon numérique :

$$Duration\,Effective = \frac{-100}{Prix} \times \frac{Prix_{+\triangle X} - Prix_{-\triangle X}}{2 \times \triangle X}$$

et

$$Convexit\acute{e}\,Effective = \frac{100}{Prix} \times \frac{Prix_{+\triangle X} + Prix_{-\triangle X} - 2 \times Prix}{[\triangle X]^2}$$

La relation « prix-taux » pour un MBS Pass-Through est moins convexe que celle de son « équivalent » US Treasury. La duration d'un MBS tend à :

- Augmenter à la hausse des taux du fait d'une hausse des taux forwards et donc d'une baisse des taux de prépaiement anticipés
- Diminuer à la baisse des taux du fait d'une baisse des taux forwards et donc d'une hausse des taux de prépaiement anticipés

Dans les deux cas, un MBS sous-performe son synthétique zéro-coupon UST (même structure de cashflows forward statique que le MBS).

$$\boxed{\left.\begin{array}{ll} Z_{UST} \downarrow \Rightarrow & CPR \uparrow \Rightarrow D_{MBS} \downarrow \\ Z_{UST} \uparrow \Rightarrow & CPR \downarrow \Rightarrow D_{MBS} \uparrow \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \triangle P_{MBS/UST} \downarrow}$$

Dans les faits, un MBS Pass-Through est non seulement moins convexe que son équivalent zéro-coupon UST et peut même être « negative convex » dans certains cas. Néanmoins, la convexité d'un MBS Pass-Through dépend de la façon dont il traite par rapport au pair :

- Les MBS « proches du pair » ont la convexité négative et le coût des options de prépaiement les plus élevés. Les options de prépaiement implicites sont dites « à la monnaie »
- Les MBS « discount » ont une convexité négative et un coût des options de prépaiement moins élevé. Les options de prépaiement implicites sont dites « en dehors de la monnaie »

– Les MBS « premium » ont une convexité négative et un coût des options de prépaiement moins élevé aussi. Comme les options de prépaiement sont de type « américaine », elles ont donc déjà été exercées pour partie. Les options de prépaiement implicites sont dites « dans la monnaie »

A ce stade de l'étude analytique et quantitative des MBS, on est en mesure de calculer, pour un MBS donné, un certain nombre d'indicateurs que l'on peut classer dans différentes catégories :

- Marchés (données brutes)
  - Prix
  - Taux Actuariel
- Spread (MBS vs UST)
  - Spread Actuariel
  - Spread Zéro-Coupon
  - Spread Forward
- Prépaiement (Scénarios de prépaiement anticipés)
  - PSA « Actuel »
  - PSA « Forward »
- Options (décomposition du spread forward)
  - Option Adjusted Spread (OAS)
  - Coût des options
- Risques (sensibilités du MBS aux variations des taux d'intérêt)
  - Duration Effective
  - Convexité Effective

Le calcul de ses indicateurs pour tous les MBS émis par une agence donnée (ex : Ginnie Mae) est un préalable à toute prise de décision pour l'arbitragiste.

8.3.3 Techniques d'Arbitrages

Les techniques d'arbitrages envisageables consistent à se couvrir contre le risque de taux (actualisation) via le marché des UST (ce qui revient à être long/short des options de prépaiement) ou contre le risque de taux et le risque de prépairement via des barbells (ce qui revient à long/short de butterfly au sein même de l'univers des MBS).

Le **premier** type de position consiste être long d'un MBS donné et short d'un US Treasury de duration proche de la duration du MBS. Plus précisément, le montant d'UST à shorter pour 1 dollar de nominal de MBS est donné par le hedge ratio suivant :

$$Hedge\ Ratio = \frac{Duration\ Effective_{MBS} \times Prix_{MBS}}{Duration\ Effective_{UST} \times Prix_{UST}}$$

La position résultante est couverte contre le risque de taux mais n'est pas couverte contre les risques suivants :

- Risque de prépaiement (principalement)

– Risque de crédit et de liquidité (dans une moindre mesure)

Le critère de décision sur lequel est fondé l'arbitrage est le spread statique forward dont la composante la plus importante tant en terme de montant que de volatilité est le coût des options de prépaiement.

Ce type de stratégie revient en fait à être short des options de prépaiement tout en étant couvert localement au premier ordre contre un déplacement parallèle de la courbe des taux zéro-coupon. Il s'agit d'une stratégie de « vente de volatilité » qui consiste à capter le spread entre le MBS et le US Treasury (portage). L'histoire de l'évolution des taux d'intérêts post-« Bretton Woods » a montré à quel point ce type de pari était risqué en raison de la grande imprévisibilité et volatilité des taux d'intérêts[26] .

Le **second** type de position consiste à faire du « relative value arbitrage » dans l'univers des MBS sur la base de l'OAS comme critère de décision. Ce type de position consiste à se mettre simultanément long d'un MBS sous-évalué et short[27] de deux MBS sur-évalués de maturités résiduelles « proches »[28].

Pour un montant nominal N_0 de MBS_0, calculons les montants nominaux N_1 et N_2 des MBS à shorter en couvrant simultanément la position globale en :

– Duration effective
– Convexité effective

Par construction, la position résultante sera bien couverte contre le risque de taux et le risque de prépaiement au premier et au deuxième ordre.

Notons par V la valeur du portefeuille, on a :

$$\triangle V = N_0 \times \triangle P_0 - N_1 \times \triangle P_1 - N_2 \times \triangle P_2$$

Appliquons la formule de Taylor au prix P_i du MBS n°i, on a :

$$\triangle P_i \simeq P_i \times D_i \times \triangle R_i + \frac{1}{2} \times P_i \times \Gamma_i \times [\triangle R_i]^2$$

Plaçons-nous dans le cadre d'un déplacement parallèle de la courbe des taux actuariels :

$$\triangle R_i \equiv \triangle R \qquad i = 0{,}1{,}2$$

En remplaçant $\triangle P_i$ (i=0,1,2) par les formules de Taylor correspondantes et en factorisant les termes de premier et de deuxième ordre, on trouve les durations et convexités effectives du portefeuille :

$$\begin{cases} D_P & = N_0 \times P_0 \times D_0 - N_1 \times P_1 \times D_1 - N_2 \times P_2 \times D_2 \\ \Gamma_P & = N_0 \times P_0 \times \Gamma_0 - N_1 \times P_1 \times \Gamma_1 - N_2 \times P_2 \times \Gamma_2 \end{cases}$$

En appliquant nos deux contraintes de couverture :

$$D_P = 0 \qquad et \qquad \Gamma_P = 0$$

26. Dans cette histoire, le crack obligataire de l'année 1994 est resté tristement célèbre notamment pour les investisseurs sur le marché des MBS

27. Le marché des repo existe aussi pour les MBS Pass-Trough émis par les agences et permet la vente à découvert d'un MBS. Les remarques faites aux Chapitre 3 & 4 sur le risque repo s'appliquent aussi ici

28. Ce type de position n'est autre qu'une adaptation des « butterfly » à l'univers spécifique des MBS Pass-through dont la hiérarchie des risques est différente de l'univers des US Treasuries

On trouve les montants nominaux N_1 et N_2 des MBS à shorter pour un montant nominal N_0 donné du MBS à acheter :

$$N_1 = N_0 \times \frac{P_0}{P_1} \times \frac{\Gamma_0 \times D_2 - \Gamma_2 \times D_0}{\Gamma_1 \times D_2 - \Gamma_2 \times D_1} \quad et \quad N_2 = N_0 \times \frac{P_0}{P_2} \times \frac{\Gamma_0 \times D_1 - \Gamma_1 \times D_0}{\Gamma_1 \times D_2 - \Gamma_2 \times D_1}$$

Le critère de décision (analyse « cheap-dear ») à partir duquel on classera les MBS de l'univers considéré est l'OAS (qui, rappelons-le, mesure la composante spécifique aux risques de crédit et de liquidité dans le spread forward d'un MBS donné) :

$$\begin{cases} OAS < \alpha_{Min} & \Rightarrow Le\ MBS\ est\ cher \\ OAS > \alpha_{Max} & \Rightarrow Le\ MBS\ n'est\ pas\ cher \end{cases}$$

α_{Min} et α_{Max} sont les valeurs minimales et maximales pour l'OAS de l'univers des MBS considéré qui définissent la sur-évaluation ou la sous-évaluation d'un MBS. Ces valeurs sont en général estimées à partir d'analyses statistiques de l'évolution de l'OAS des MBS considérés.

Ce type d'arbitrage doit être réalisé non pas globalement au sein de l'univers des MBS mais au niveau des MBS de même type (proche du pair, discount, premium), du fait des différences de réponses, entre ces trois types de MBS, à une variation des taux d'intérêts. En pratique, on choisiera des titres de maturités les plus proches possibles de façon à limiter l'impact des risques de taux (actualisation) et de prépaiement d'ordres supérieurs à 2.

Chapitre 9

CDS vs Asset-Swap Arbitrage

Les Credit Default Swap (CDS) sont des dérivés de crédit permettant de se couvrir contre le risque de défaut sur une contrepartie obligataire donnée. Avant d'introduire précisément les CDS, on commence par introduire le concept de probabilité de défaut ainsi que les principales approches permettant de les estimer (credit scoring, probabilités historiques, probabilités implicites, méthodes structurelles). La méthode implicite ou de Jarrow-Turnbull qui repose sur un raisonnement d'arbitrage sur le marché de la dette corporate est introduite par un exemple simple avant d'être développée dans le cas usuel d'un échantillon d'obligations corporate couponnées. Cette méthode permet d'extraire les probabilités de défaut à partir des spreads de crédit pour un taux de recouvrement (anticipé) donné. Les dérivés de crédit les plus connus et les plus utilisés sont les CDS. Après avoir décrit les principales caractéristiques des contrats, on explique ensuite comment pricer un CDS (à l'aide des probabilités de défaut précédemment calculées) et comment valoriser une position en cours de vie. On termine par une étude de l'arbitrage entre un CDS et un Asset-Swap (de mêmes caractéristiques). Nous montrons que la différence entre la prime du CDS et le spread d'asset-swap (base) est, sous certaines hypothèses non-standards sur la structure du CDS, égal à moins le spread swap-Etat équivalent. Dans le cas standard, nous montrons que les deux facteurs à considérer dans le pricing de la base sont la qualité du crédit de l'émetteur sous-jacent (CDS et Asset-Swap) et la surcote ou décote de l'obligation sous-jacente par rapport au pair.

9.1 Risque et Probabilité de Défaut

La structure par terme des probabilités de défaut pour un émetteur donné est un élément fondamental pour le pricing des produits dérivés de crédit sur cet émetteur. L'objectif de cette première section est d'introduire le concept de probabilité de défaut ainsi que les principales approches permettant de les calculer. Nous présentons ensuite la méthode de Jarrow-Turnbull qui est à la fois (relativement) simple à mettre en œuvre et permet le calcul de probabilités implicites de défaut (cette méthode repose sur un raisonnement d'arbitrage sur le marché de la dette corporate).

9.1.1 Analyse Economique du Risque de Défaut

Le défaut de paiement est le principal évènement de crédit parmi ceux usuellement pris en compte dans les contrats de type « dérivés de crédit ». Par définition, on appelle défaut de paiement, l'incapacité d'un débiteur (typiquement une entreprise ou un Etat) à honorer ses engagements vis-à-vis de son créancier (typiquement une banque commerciale). Ces engagements portent sur le paiement des intérêts et du principal selon l'échancier prévu dans le contrat de prêt signé initialement entre les deux parties.

9.1.1.1 Cas d'une Entreprise Industrielle ou Commerciale

Un critère sur les flux (liquidité) est-il à privilégier pour caractériser le défaut (et par extension le risque de défaut) comme le suggère la définition précédente ou faut-il au contraire utiliser un critère sur le stock (solvabilité) ?

La réponse à cette question dépend du lien de causalité entre le :

- Risque de défaut
- Risque de liquidité
- Risque de solvabilité

Le risque de liquidité est dans la plupart des cas géré de façon proactive par le créancier (la banque) et le débiteur (l'entreprise) dans le cadre d'une communication régulière entre les deux parties qui permet au banquier d'être informé de la plus ou moins bonne santé financière de l'entreprise et plus important encore du caractère pérenne ou non de l'activité :

- Si l'entreprise connait des difficultés ponctuelles, le banquier n'ayant aucun intérêt (sur le plan commercial) à ne pas soutenir son client, le défaut de paiement est évité proactivement via l'octroi d'un prêt à court terme
- Si l'entreprise connait des difficultés structurelles [1] (elle est donc non solvable), le banquier a au contraire tout intérêt à laisser l'entreprise faire défaut pour rentrer dans une phase de restructuration (vente d'actifs et/ou augmentation de capital) ou de liquidation (faire valoir son droit sur les actifs de la société)

On a donc la situation suivante :

$$\boxed{\text{Risque de Solvabilité} \rightarrow \text{Risque de Liquidité} \rightarrow \text{Risque de Défaut}}$$

Le critère à prendre en compte pour évaluer le risque de défaut est donc le critère de solvabilité qui n'est autre que le critère utilisé par le créancier pour décider si il soutient ou non l'entreprise en cas de problèmes de liquidité.

Une entreprise est dite solvable (resp. insolvable) si la valeur de sa dette est inférieure (resp. supérieure) à la valeur de ses actifs [2].

$$\textit{Critère de Solvabilité} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{V_{Actifs} - V_{Dette}}_{\textit{Fonds Propres Economiques}} \quad \gg 0$$

Sans rentrer dans des considérations de « méthodologie comptable », ce critère de solvabilité est souvent difficile à appréhender en pratique du fait que le bilan comptable d'une entreprise ne reflète en général pas (ou mal) le vrai bilan économique (100% mark-to-market) qui lui n'est pas calculable en raison de l'incomplétude et de l'inefficience des marchés. Cette difficulté qui n'est pas que théorique constitue d'ailleurs une ligne de fracture entre la « finance de marchés » et la « finance d'entreprise » :

- Point de vue « finance de marchés » : Les marchés financiers sont efficients par construction et la capitalisation boursière [3] d'une société constitue un estimateur non biaisé de ses fonds propres économiques

1. Le banquier considère que le business plan n'est plus viable du fait de changements majeurs invalidants certaines hypothèses de façon durable ou que l'équipe dirigeante est manifestement dans l'incapacité de le mettre en oeuvre
2. C'est le critère usuel notamment utilisé dans le cadre du modèle de Merton que nous présenterons au Chapitre 10
3. Capitalisation Boursière = Nombre d'Actions × Cours de l'Action

- Point de vue « finance d'entreprise » : Les fonds propres économiques peuvent êtres estimés via quelques retraitements à partir des données comptables brutes. En conséquence le ratio « Capitalisation Boursière / Fonds Propres Economiques » (price-to-book) est un bon indicateur de la sur- ou sous-valorisation d'une société en bourse [4]

9.1.1.2 Cas d'un Etat

Le ratio « Dettes sur PIB » est couramment utilisé par les économistes et les politiques pour juger de la solvabilité des Etats. Cette utilisation du ratio « Dettes sur PIB » est cependant critiquable pour deux raisons principales :

- D'une part, ce qui garanti le paiement des intérêts d'une dette contractée sur plusieurs années (la duration de la dette de l'Etat Français est par exemple de 7 ans environ) n'est pas le PIB de l'année en cours mais la croissance du PIB sur la période correspondante
- D'autre part, ce n'est pas exactement le PIB (revenus de l'ensemble des agents économiques) d'un pays donné qu'il faut prendre en compte mais la fraction du PIB que constituent les impôts et taxes prélevées sur l'activité qui constituent les recettes de l'Etat

Ces remarques sont importantes car elles contiennent en elles-mêmes l'esquisse d'un critère de solvabilité d'un Etat (similaire au critère de solvabilité d'une entreprise) en prenant pour valeur des actifs la valeur actuelle ajustée du risque du flux des recettes futures de l'Etat [5] :

$$Critère\ d'insolvabilité\ (Etat) \qquad \Rightarrow \qquad {}^{V_{Actifs}}/_{V_{Dette}} < 1$$

Il existe cependant trois différences importantes entre une entreprise et un Etat :

- Le droit applicable qui détermine le périmètre des actifs à prendre en compte est uniquement le droit de propriété pour une entreprise. Pour un Etat, le droit de propriété s'applique pour les actifs qu'il possède en propre et le droit régalien de lever l'impôt s'applique sur les autres actifs
- En cas de difficulté un Etat fait généralement l'objet d'une restructuration (on parle de réformes structurelles) tandis qu'une entreprise peut être soit restructuré soit liquidé si il n'y a pas d'accord entre les créanciers et les actionnaires et pas de repreneurs
- Le concept de fonds propres n'a pas de sens pour un Etat qui peut donc parfaitement rester solvable avec un ratio de solvabilité égal à 1

Précisons enfin qu'un Etat qui disposerait (encore) de sa souveraineté monétaire et de la capacité à imposer sa monnaie à des pays tiers (comme monnaie de transaction et de réserve) peut rester solvable avec un ratio de solvabilité inférieur à 1 [6].

Nous terminons ici ces considérations économiques sur le risque de défaut pour nous concentrer sur sa modélisation et son calcul.

4. Certains médias n'hésitent pas à comparer une partie de l'actif d'une société à sa capitalisation boursière. J'ai ainsi pu entendre le 25 mai 2012 un journaliste (sur une radio pourtant spécialisée « économie & marchés ») avancer de façon péremptoire le sophisme « Air France vaut 1 Milliard d'Euros en bourse, l'équivalent de 8 ou 9 avions alors qu'ils en ont 200 » pour soutenir la thèse d'une sous-valorisation manifeste du cours de bourse d'Air France

5. Notons que sous certaine hypothèses et en raisonnant en taux de capitalisation, on retrouve un critère de solvabilité classique qui veut qu'un Etat devient insolvable dés lors que le taux d'intérêt moyen de sa dette est supérieur au taux croissance moyen du PIB (modèle de Domar)

6. « Le dollar est notre monnaie mais c'est votre problème », John Connally (Sécrétaire d'Etat au Trésor US) en 1972

9.1.2 Généralités sur le Calcul des Probabilités de Défaut

Nous allons dans ce paragraphe introduire les différentes méthodes de calcul des probabilités de défaut et donner un modèle simple permettant de comprendre le lien entre la probabilité de défaut, le taux de recouvrement anticipé et le spread de crédit (méthode des probabilités implicites).

Plusieurs méthodes ont été développé pour estimer ces « probabilités » de défaut [7] :

- Credit scoring : C'est la technique couramment utilisée par les analystes crédit pour évaluer la solvabilité d'un émetteur donné. Cette technique consiste à construire une fonction, appelée Z ou fonction score, dont les inputs sont les ratios financiers courants de l'émetteur et l'output est un niveau de solvabilité (score). A la fois complexe (collecte et traitement des données), empirique (construction d'une fonction d'agrégation « ad hoc ») et biaisée (non prise en compte de l'environnement de l'émetteur et des informations prospectives), cette approche n'est généralement pas utilisée pour l'estimation des probabilités de défaut utilisées en finance de marchés
- Probabilités historiques : Les agences de notation (Standard & Poors et Moody's principalement), historisent les incidents de crédits (défaut) et calculent les taux de défaut constatés pour une période (année), dans une zone géographique (pays) et un secteur d'activité donnés. Ces informations permettent de calculer des probabilités historiques de défaut et de valider ou d'invalider a posteriori les ratings des agences. L'utilisation de ces probabilités est néanmoins problématique puisqu'elles concernent au mieux un secteur d'activité et qu'elles sont par nature non prospectives
- Méthodes structurelles : L'approche dite structurelle [8] est basée sur le modèle de Merton qui permet de calculer des probabilités de défaut « spot » à partir de la valeur des actifs et de la structure du passif (ratio d'endettement) de la société émettrice. Les deux inputs non observables que sont la valeur et la volatilité des actifs sont généralement déduits à partir de la valeur et la volatilité des actions de l'émetteur (lorsque ce dernier est coté en bourse). Les deux implémentations les plus connues, issues de l'industrie, sont les modèles KMV (modèle propriétaire de la société éponyme KMV) et RiskGrade (modèle développé par la société RiskMetrics dont le descriptif technique est en libre accès)
- Probabilités implicites : Cette dernière approche a été développée par R. Jarrow & S. Turnbull (1995). Cette méthode permet de calculer la structure par terme des probabilités de défaut pour un émetteur donné à partir des taux zéro-coupon (Emetteur), des taux zéro-coupon sans risque (Etat) et du taux de recouvrement en cas de défaut (Emetteur). Notons que cette approche ne s'applique que pour les sociétés qui émettent sur les principales échéances et dont les titres sont négociables sur un marché secondaire liquide. Ce qui exclus un grand nombre de sociétés privées mais concerne de nombreux grands groupes internationaux

Avant de rentrer dans les détails formels du modèle et afin de fixer les idées, terminons ce paragraphe par un exemple simple de calcul de probabilité de défaut [9].

Dans un univers neutre au risque, on suppose que l'investisseur est indifférent entre les deux choix suivants :

1. Zéro-coupon sans risque
2. Zéro-coupon risqué

7. Cf. Caouette J.B., Altman E.I. & Narayanan P. (1998), « Managing Credit Risk: The Next great Financial Challenge », John Wiley & Sons, Inc.
8. Cf. Chapitre 10
9. Cf. Marteau D. & Dehache D. (2001), « Les Produits Dérivés de Crédit », Editions ESKA

avec :

$$Zéro - coupon\ sans\ risque \Leftrightarrow Recevoir\ e^{r}\ avec\ la\ proba\ 1$$

et

$$Zéro - coupon\ risqué \Leftrightarrow \begin{cases} Recevoir & e^{r+s}\ avec\ la\ proba\ 1-p \\ Recevoir & R \times e^{r}\ avec\ la\ proba\ p\ \ (défaut) \end{cases}$$

Avec les notations suivantes :

- r : taux ZC sans risque 1A (continu)
- s : spread ZC par rapport au taux sans risque (continu)
- R : taux de recouvrement en cas de défaut
- p : probabilité risque-neutre de faire défaut sur la période (1A)

Compte-tenu des hypothèses et par définition d'une probabilité neutre au risque, l'investisseur doit être indifférent entre recevoir le P/L de l'investissement sans risque ou l'espérance mathématique du P/L correspondant à l'investissement risqué calculée sous la probabilité neutre au risque.

Formellement, on doit donc avoir :

$$P/L_1 = E\left\{P/L_2\right\}$$

soit :

$$e^{r} - 1 = \left[(1-p) \times e^{r+s} + p \times R \times e^{r}\right] - 1$$

En éliminant e^r et en effectuant un développement limité de e^s autour de 0, on trouve [10] :

$$\boxed{p \simeq \frac{s}{1-R}}$$

On constate que la probabilité de défaut est à la fois homogène et supérieure ou égale au spread de crédit. L'égalité stricte entre le spread de crédit et la probabilité de défaut a lieu lorsque le taux de recouvrement est nul [11].

Dans la pratique, nous allons calculer non pas une probabilité unique de défaut mais une structure par terme des probabilités de défaut forward risque-neutre en utilisant l'algorithme de Jarrow-Turnbull.

9.1.3 Méthode de Jarrow-Turnbull

La structure par terme des probabilités de défaut de l'émetteur X est l'élément fondamental pour le pricing des CDS sur cet émetteur. Dans ce paragraphe, nous allons décrire la méthode dite des probabilités « implicites » développée par R. Jarrow et S. Turnbull [12].

Cette méthode permet de calculer la structure par terme des probabilités de défaut pour un émetteur donné à partir des seules informations suivantes :

- Courbe de taux zéro-coupon de l'émetteur X

10. e^s ~1+s pour s petit

11. Pour fixer les idées, un spread de crédit de 100bp correspond donc à une probabilité de défaut de 2% si le taux de recouvrement est de 50% et de 1% si il est nul

12. Cf. Jarrow R. & Turnbull S. (1995), Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk, The Journal of Finance, Vol. 50, No. 1

- Courbe de taux zéro-coupon sans risque (Etat)
- Taux de recouvrement[13] anticipé en cas de défaut de l'émetteur X

L'approche consiste à pricer un zéro-coupon risqué de maturité j correspondant à j périodes élémentaires. Les états futurs possibles de l'émetteur X, à savoir défaut (D) ou pas ($\neg D$), peuvent être représentés sous la forme d'un arbre binaire (cf. Graphique 9.1).

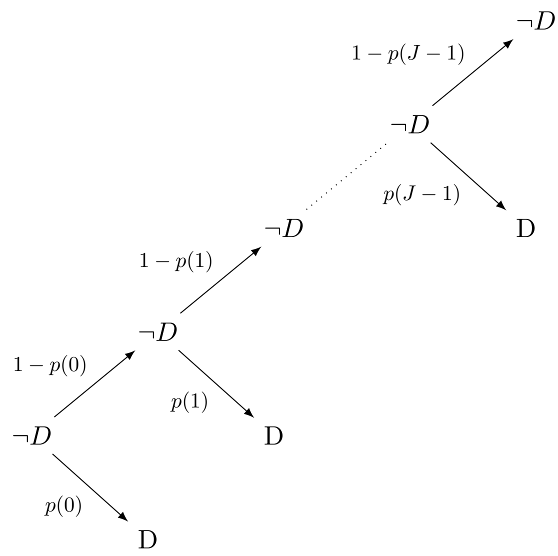

FIG. 9.1 – *Arbre Binaire des Etats Futurs de l'Emetteur*

On suppose qu'en cas de défaut de l'entité X constaté à l'une des dates t_j (j=1...J), le détenteur de ce zéro-coupon risqué reçoit le taux de recouvrement R (0 < R < 1) en date de maturité du zéro-coupon. Dans le cas contraire, il reçoit 1 Euro. L'application du principe général de valorisation des instruments financiers en situation d'incertitude à ce zéro-coupon risqué permet d'écrire :

$$\boxed{V_j = \rho_j^{Etat} \times E_0^{\mathbb{Q}} \{\tilde{e}_j | \neg D\}}$$

avec les notations suivantes :

- ρ_j^{Etat}: Facteur d'actualisation spot pour la maturité t_j correspondant au taux zéro-coupon sans risque (Etat)
- $E_0^{\mathbb{Q}} \{.\}$: Espérance mathématique sous la probabilité risque-neutre Q à la date 0
- $\tilde{e}_j$: Payoff du zéro-coupon « risqué » en t_j

On note de plus p(j) la probabilité risque-neutre de faire défaut entre t=j et t=j+1 sachant que l'on n'était pas dans l'état de défaut en t=j (probabilité forward).

Il ne reste plus qu'à appliquer la formule précédente aux zéro-coupon risqués de maturités successives correspondants aux dates t_j (j=1...J).

<u>Cas j=1 (Zéro-coupon de maturité t_1)</u>

$$V_1 = \rho_1^{Etat} \times E_0^{\mathbb{Q}} \{\tilde{e}_1 | \neg D\}$$

13. Le taux de recouvrement anticipé est la seule variable non observable. Il est d'usage de l'estimer à partir des taux de recouvrement constatés historiquement sur des « comparables » de l'émetteur considéré

avec

$$E_0^{\mathbb{Q}}\left\{\tilde{e}_1|\neg D\right\} = [1 - p(0)] \times 1 + p(0) \times R$$

Par conséquent[14] :

$$p(0) = \frac{1 - \frac{V_1}{\rho_1^{Etat}}}{1 - R}$$

<u>Cas j=2 (Zéro-coupon de maturité t_2)</u>

$$V_2 = \rho_2^{Etat} \times E_0^{\mathbb{Q}}\left\{\tilde{e}_2|\neg D\right\}$$

avec

$$\begin{aligned} E_0^{\mathbb{Q}}\left\{\tilde{e}_2|\neg D\right\} &= [1 - p(0)] \times E_1^{\mathbb{Q}}\left\{\tilde{e}_2|\neg D\right\} + p(0) \times R \\ &= [1 - p(0)] \times [[1 - p(1)] \times 1 + p(1) \times R] + p(0) \times R \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$p(1) = \frac{1 - \frac{\frac{V_2}{\rho_1^{Etat}} - p(0) \times R}{1 - p(0)}}{1 - R}$$

On procède ainsi jusqu'à l'étape J pour calculer l'ensemble des probabilités de défaut forward p(j) pour j=0. . . J-1.

<u>Cas Général (Zéro-coupon de maturité t_j)</u>

$$V_j = \rho_j^{Etat} \times E_0^{\mathbb{Q}}\left\{\tilde{e}_j|\neg D\right\}$$

avec

$$\begin{aligned} E_0^{\mathbb{Q}}\left\{\tilde{e}_j|\neg D\right\} &= [1 - p(0)] \times E_1^{\mathbb{Q}}\left\{\tilde{e}_j|\neg D\right\} + p(0) \times R \\ &= [1 - p(0)] \times \Big[[1 - p(1)] \times E_2^{\mathbb{Q}}\left\{\tilde{e}_j|F\right\} + p(1) \times R\Big] + p(0) \times R \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut finalement écrire :

$$\boxed{p(j) = \frac{1 - \beta(j)}{1 - R} \qquad avec \qquad \beta(j) = \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{V_j}{\rho_j^{Etat}} - p(0) \times R}{1 - p(0)} - p(1) \times R}{1 - p(1)} - \ldots}{\ldots} - p(j) \times R}{1 - p(j)}}$$

On constate qu'il n'y a pas de formule de récurrence simple permettant de calculer p(j) à partir de p(j-1) par exemple.

Ecrivons $\beta(0)$ et $\beta(1)$ pour s'en convaincre, on a :

14. On retrouve dans ce cas la formule donnée au paragraphe 9.1.2 après avoir introduit les taux des zéro-coupons Etat et X dans la formule

$$\beta(0) = \frac{V_1}{\rho_1^{Etat}} \qquad et \qquad \beta(1) = \frac{\frac{V_2}{\rho_2^{Etat}} - p(0) \times R}{1 - p(0)} \neq \frac{\beta(0) - p(0) \times R}{1 - p(0)}$$

Le calcul des probabilités de défaut peut néanmoins être réalisé sur un tableur sans même recourir à l'écriture de macros.

Une façon de procéder consiste à calculer de façon simultanée :

- La matrice des $\hat{\beta}_i(j)$ avec 0≤j≤J-1 et 1≤i≤J
- Les probabilités de défaut p(j) avec 0≤j≤J-1

avec

$$\begin{cases} \hat{\beta}_i(j+1) & = \frac{\hat{\beta}_i(j) - p(j) \times R}{1 - p(j)} \qquad (0 \leq j \leq J-1 \, et \, 1 \leq i \leq J) \\ \hat{\beta}_i(0) & = \frac{V_i}{\rho_i^{Etat}} \qquad (1 \leq i \leq J) \end{cases}$$

et

$$\beta(j) = \hat{\beta}_{j+1}(j) \qquad avec \qquad 0 \leq j \leq J-1$$

A titre d'exemple, calculons les probabilités de défauts forwards risque-neutres pour un émetteur corporate fictif X. Les courbes de taux zéro-coupon Etat et X sont données dans le tableau 9.1 ci-dessous[15].

Y	Taux Etat (%)	Taux X (%)
1	2.000	3.000
2	2.506	3.611
3	2.994	4.208
4	3.466	4.794
5	3.922	5.372
6	4.363	5.944
7	4.791	6.512
8	5.205	7.080
9	5.605	7.648
10	4.991	8.222

TAB. 9.1 – Taux Zéro-Coupon Etat et X (Exemple)

On complète ces deux courbes par des taux repo 3M de 1.5% (pour l'Etat) et 2.4% (pour l'émetteur X) et se donne un taux de recouvrement R de 40%.

Le détail des calculs pour les probabilités p(0) et p(1) est donné ci-dessous :

15. Pour info, il s'agit de taux actuariels obtenus à partir de taux au pair en utilisant la méthode du bootstrap

$$\beta(0) = \frac{V_1}{\rho_1^{Etat}} = \frac{(1+2.4\%)^{-0.25}}{(1+1.5\%)^{-0.25}} = \frac{0.99408841}{0.99638477} = 0.99779546$$
$$p(0) = \frac{1-\beta(0)}{1-R} = \frac{1-0.99779546}{1-0.4} = 0.3674\%$$

et

$$\beta(1) = \frac{\frac{V_2}{\rho_2^{Etat}} - p(0)\times R}{1-p(0)} = \frac{\frac{(1+2.600\%)^{-0.5}}{(1+1.667\%)^{-0.5}} - 0.3674\%\times 0.4}{1-0.3674\%} = 0.99763706$$
$$p(1) = \frac{1-\beta(1)}{1-R} = \frac{1-0.99763706}{1-0.4} = 0.3938\%$$

Le tableau 9.2 ci-dessous donne les probabilités de défaut risque-neutre forwards trimestrielles (sur 40 trimestres consécutifs) pour l'entité X ainsi que les spreads de crédits correspondants.

j	Proba (%)	Spread (bp)
0	0.3674	90.0
1	0.3938	93.3
2	0.4202	96.7
3	0.4466	100.0
4	0.4592	102.6
⋮	⋮	⋮
9	0.5695	115.9
⋮	⋮	⋮
38	1.7445	218.4
39	1.7979	223.1

Tab. 9.2 – Probabilités de Défauts pour l'Entité X (Exemple)

On constate que les probabilités forwards de défaut augmentent avec la période forward en cohérence avec l'évolution des spreads de crédit zéro-coupon.

Il est possible de calculer les probabilités de défaut spot de maturité j à partir des probabilités de défaut forward en utilisant la formule générique ci-dessous :

$$\boxed{p(0\to j) = \sum_{k=0}^{j}\left\{\prod_{k'=0}^{k-1}(1-p(k'))\right\}\times p(k) \qquad avec \qquad \prod_{k'=0}^{-1}(1-p(k')) = 1}$$

A titre d'exemple, calculons p(0 → 3) à partir des données de l'exemple précédent.

En développant la formule précédente, on a :

$$\begin{aligned} p(0 \to 3) &= p(0) \\ &+ [1 - p(0)] \times p(1) \\ &+ [1 - p(0)] \times [1 - p(1)] \times p(2) \\ &+ [1 - p(0)] \times [1 - p(1)] \times [1 - p(2)] \times p(3) \end{aligned}$$

Numériquement, on a :

$$\begin{aligned} p(0 \to 3) &= 0.3674\% \\ &+ [1 - 0.3674\%] \times 0.3938\% \\ &+ [1 - 0.3674\%] \times [1 - 0.3938\%] \times 0.4202\% \\ &+ [1 - 0.3674\%] \times [1 - 0.3938\%] \times [1 - 0.4202\%] \times 0.4466\% \\ &= 1.6181\% \end{aligned}$$

9.2 Credit Default Swap

Dans cette section nous présentons les dérivés de crédit les plus connus et les plus utilisés que sont les Credit Default Swap (CDS). Nous commençons par définir ce qu'est un contrat de CDS en donnant un aperçu des variantes possibles. Puis nous montrerons comment pricer un CDS et valoriser une position en cours de vie (connaissant la structure par terme des probabilités de défaut forward risque-neutre sur l'entité sous-jacente) dans le cadre des structures « plain vanilla ».

9.2.1 Définition des CDS

Notons en guise de préambule que les CDS ont été inventé par la banque JP Morgan au milieu des années 90 et ont connu depuis un développement très important tant sur le plan quantitatif (volumes de transactions) que qualitatif (évolution du standard « plain vanilla » vers des CDS ayant des caractéristiques plus « exotiques »). La crise des subprimes (2007-08) qui a vue un nombre inhabituel de sociétés faire faillite[16] et la crise de la dette Grecque (2010-?) ont permis de mettre en évidence certains défauts conceptuels de ces instruments financiers OTC liés essentiellement à la sécurisation du processus de réglement-livraison.

Ces défauts de conception originels qui sont en voie d'êtres corrigés aujourd'hui.

Un CDS[17] est un instrument financier qui permet le transfert d'un risque de crédit sur un émetteur X d'une contrepartie A (acheteur du CDS) vers une contrepartie B (vendeur du CDS) :

- A cherche à se couvrir contre un risque de crédit (évènement de crédit contractuel) sur une entité de référence X et paie une prime périodique au vendeur B pendant toute la durée du contrat. Le paiement de la prime périodique s'arrête lorsqu'un évènement de crédit contractuel est constaté
- B prend le risque sur l'entité de référence et s'engage à acheter à A le titre de référence au pair (livraison physique) si un évènement de crédit se produit sur la durée de vie du contrat. En contrepartie de cet engagement, B reçoit une prime périodique versée par A

16. On pense en particulier à Lehman Brothers qui reste à ce jour la plus grosse faillite de l'histoire du capitalisme

17. Pour une introduction didactique sur les CDS, on pourra consulter l'article de Whetten M., Adelson M. & Van Bemmelen M. (2004), « Credit Default Swap (CDS) Primer », Nomura Fixed Income Research, May

Les deux parties s'engagent pour un montant notionnel N de titres de l'entité de référence. La prime est exprimée en points de base du montant notionnel du CDS (cf. graphique 9.2).

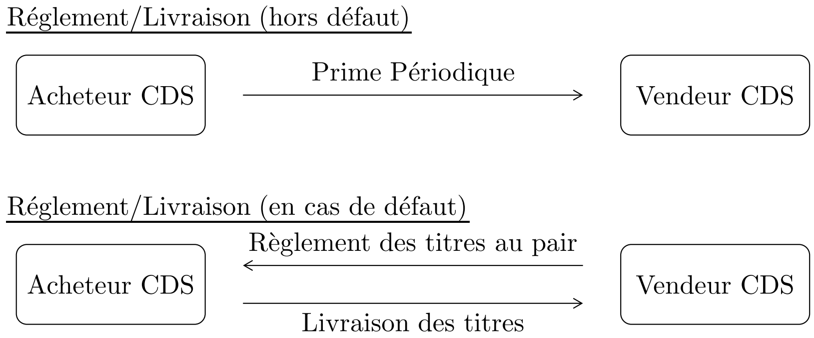

FIG. 9.2 – *Réglement/Livraison sur un Credit Default Swap*

Considérons un CDS dont les caractéristiques sont :

- Montant nominal : N
- Périodicité des paiements : τ (fraction d'année)
- Dates des paiements : $(t_j)_{j=1...J}$
- Prime (annuelle) : $\mathrm{M_{cds}}$

Le vendeur va donc recevoir un flux de cashflows positifs tous égaux à :

$$\boxed{CF_{t_j} = N \times M_{cds} \times \tau \qquad (j = 1 \dots J)}$$

Et ce jusqu'à la maturité du CDS ou jusqu'à ce qu'un évènement de crédit contractuel (ex : défaut) se produise sur l'entité de référence.

A titre d'exemple, un contrat de CDS 5A avec un notionnel d'1 Million d'Euros et une prime de 40bp (annualisée) payée au trimestre va engendrer un cashflow (trimestriel) de EUR 1000 :

$$EUR\,1000 = EUR\,1M \times 0.4\% \times 0.25$$

Si avant l'échéance du CDS, un évènement de crédit contractuel se produit sur l'entité de référence, l'acheteur pourra céder au vendeur les titres qu'il détient sur cette entité de référence pour un montant nominal d'1M d'Euros en échange d'1M d'Euros en cash.

Fin de l'exemple numérique.

Les CDS sont à l'origine des contrats OTC (gré-à-gré) cotés par les grandes banques d'affaires internationales. En conséquence, les contrats de CDS sont peu standardisés et des variantes existent pour les aspects suivants [18] :

- Entité de référence : Il s'agit en général d'une entité de référence unique (single) qui peut être soit un corporate soit un souverain. Cette entité peut aussi être un panier (basket) d'entités de référence auquel cas l'évènement de crédit contractuel sur le CDS qui déclenche le réglement de la garantie peut prendre différentes formes. Cette garantie peut, par exemple être déclenchée dès le premier défaut (first-to-default) ou au contraire dès le second défaut (second-to-default), ce qui n'est pas sans impact sur le pricing du CDS

18. Cette liste est non exhaustive mais suffisante pour notre propos

- Titres livrables : On peut là aussi envisager qu'un seul titre (spécifique) soit livrable en cas d'èvenement de crédit ou au contraire que les titres livrables (gisement) soient définis par un certain nombre de conditions sur les caractéristiques des titres (par exemple : devise de référence, date de maturité, rang de créance, etc)
- Evènements de crédit : L'évènement de crédit le plus courant est le défaut de paiement (default) qui donne son nom aux CDS. D'autres évènements de crédit peuvent déclencher le réglement de la garantie dont les plus connus sont la faillite (bankruptcy), la restructuration et la dégradation de la note de crédit (credit rating drift) par ordre croissant de probabilité d'occurence. Notons que si la faillite entraîne mécaniquement le défault (une faillite est un défaut généralisé sur tous les engagements au passif), il est plus difficile de conclure de façon aussi formelle pour une restructuration comme l'ont montré les négociations autour de la restructuration de la dette grècque [19]
- Mode de règlement : Les deux modes de réglement sont la livraison (physical settlement) et le paiement d'une soulte (cash settlement). La livraison consiste pour l'acheteur à livrer les titres au vendeur en échange d'un paiement au pair de ses titres (cf. graphique 9.2). L'autre option (soulte) consiste pour le vendeur à compenser la perte sur les titres en versant à l'acheteur la différence entre le pair et le prix de marché constaté au moment du défaut [20]

Important : Dans la suite, nous traitons uniquement le cas des structures de CDS suivantes :
- Entité de référence : Unique
- Titre livrable : Spécifique
- Evènements de crédit : Défaut
- Règlement : Physique

Les CDS sont utilisés pour les motifs habituels de couverture, de spéculation [21] et d'arbitrage. Les trois principaux types d'arbitrages qui impliquent l'utilisation des CDS sont :

- L'arbitrage « Long CDS vs Short CDS » sur des entités différentes mais présentants des profils de risque jugés similaires (rétrécissement de l'écart entre les primes des deux CDS) ou au contraire différents (écartement de l'écart entre les primes des deux CDS). Ce type d'arbitrage est traité dans l'exercice 9 du cours
- L'arbitrage « Long CDS vs Short Asset-Swap » sur une même entité et un même titre obligataire émis par cette entité. Cet arbitrage consiste à jouer l'écart (la base) entre la prime du CDS et la prime de l'Asset-Swap. L'analyse de la base fait l'objet de la section 9.3 du présent chapitre
- L'arbitrage « Long CDS vs Long Equity » (Capital Structure Arbitrage) sur une même entité de référence. Il s'agit d'exploiter les inefficiences inter-marchés entre le marché du crédit et le marché action sur le passif d'une même société. Ce type d'arbitrage sera traité au Chapitre 10

19. Ces négociations ont abouti à un accord entre les principaux créanciers privés sous l'égide des autorités Européennes. Cet accord de restructuration avec effacement d'une partie de la dette (hair-cut) n'a pas été assimilé à un défaut par l'ISDA du fait de son caractère « volontaire ». Le caractère atypique de l'accord et de la décision de l'ISDA a suscité des réserves notamment de la part des investisseurs lésés (les porteurs de CDS) dont certains hedge funds qui ont portés l'affaire en justice. Il s'agit d'un cas étonnant d'insécurité juridique (du point de vue de l'acheteur de CDS) puisque ce sont les Etats qui sont à l'origine de cette insécurité alors qu'ils sont sensés être les garants de la bonne exécution des contrats privés

20. Les évènements récents ont montré que ses deux modes de réglement n'étaient pas sans engendrer quelques difficultés. La livraison physique pose problème dès lors que le notionnel net total des contrats de CDS sur une entité donnée et un titre donné émis par cette entité est supérieur à l'encours total sur ce titre. Cette situation est lié à l'achat de CDS pour motif de spéculation ou d'arbitrage, c'est-à-dire sans que les acheteurs ne possèdent les titres « sous-jacents » (naked CDS). Le paiement d'une soulte pose problème dès lors qu'en cas de défaut il peut être difficile de trouver un prix de marché (absence de liquidité). Le prix proposé peut même dans certains cas être contesté par la partie acheteuse pour soupçon de manipulation par la partie vendeuse. Ces problèmes sont en voie d'êtres résolus par la création de mécanismes d'enchères centralisées gérés par des tiers comme l'ISDA (auction settlement)

21. Achat d'un CDS nu pour « jouer » soit les variations de la prime du CDS soit le défaut imminent

Notons enfin que l'achat d'un CDS négocié avec une contrepartie X sur une entité de référence Y ne supprime pas le risque sur Y mais le transforme en un risque de défaut simultané de X et de Y. En conséquence, seule les grandes banques internationales dotées d'un excellent rating (idéalement AAA) auprès des agences de notation cotent les CDS.

Les CDS sont les dérivés de crédit les plus connus et les plus utilisés. Parmi les autres dérivés de crédit citons :

- Total Return Swap (TRS)
- Forward sur spread de crédit
- Option sur spread de crédit

Les CDS sont utilisés pour les motifs habituels de couverture, de spéculation et d'arbitrage mais servent aussi de « briques de base » pour la conception de produits structurés de crédit tels que :

- Credit Linked Notes (CLN)
- Synthetic CDO (Collaterized Debt Obligation)

L'examen des structures de CDS « exotiques », des autres dérivés de crédit et des produits structurés de crédit sort du cadre de ce cours. On pourra consulter les ouvrages de D. Marteau & D. Dehache (précédemment cité) et C. Bluhm, L. Overbeck & C. Wagner [22] pour plus d'informations.

9.2.2 Pricing des CDS

Jusqu'ici nous avons décrit la structure des CDS et considéré la prime M_{cds} du CDS comme donnée. Le pricing de cette prime repose sur l'application du principe général de valorisation des instruments financiers à cashflows incertains dans le cas où la source d'incertitude correspond au risque de défaut de l'émetteur X. La mise en œuvre de cette approche suppose, au préalable, que l'on ait calculé les probabilités de défaut sur l'émetteur X.

On va maintenant calculer la valeur V_{cds} d'un CDS de maturité J.

On construit un arbre binaire (cf. graphique 9.3) qui simule dans le temps les divers états futurs de l'émetteur (Défaut, Pas Défaut) et les payoffs associés en fonction des probabilités forwards de défaut p(j).

22. Bluhm C., Overbeck L. & Wagner C. (2002), An Introduction to Credit Risk Modeling, Chapman & Hall/CRC

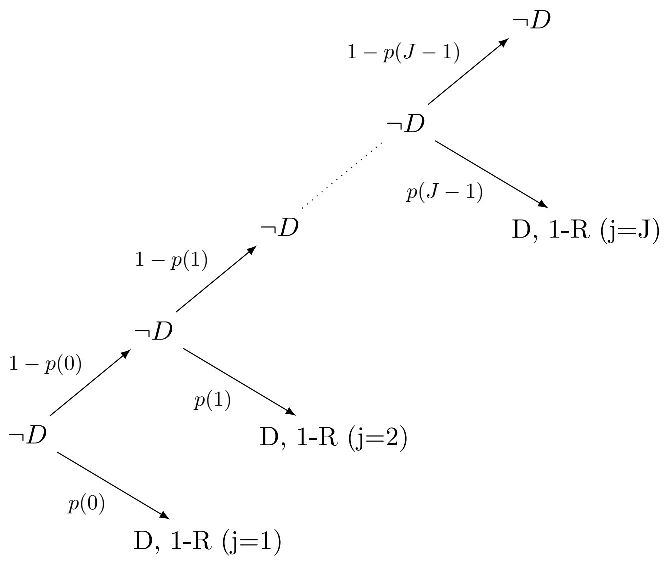

FIG. 9.3 – *Arbre Binaire de Valorisation d'un CDS*

Par définition, le payoff d'un CDS en cas de défaut de l'entité de référence est la différence entre le pair (100%) et la valeur de marché anticipée des titres au moment du défaut soit le taux de recouvrement R.

Connaissant les probabilités de défaut forward risque-neutre p(j), on peut appliquer le principe général de valorisation des instruments financiers à cashflows incertains dans le cas où la source d'incertitude correspond au risque de défaut de l'émetteur X. Ce principe stipule que le prix théorique du CDS est égal à la somme des valeurs actuelles des espérances (calculées sous la probabilité risque-neutre) des payoffs du CDS. L'actualisation est réalisée au taux sans risque lorsque tout les risques sont intégrés dans la loi des payoffs. Dans le cas des CDS, on actualise au taux Euribor pour tenir compte du fait que la contrepartie du CDS (le vendeur) est en général une banque dont le risque de défaut même faible n'est jamais nul.

On peut donc écrire :

$$V_{cds} = \sum_{j=1}^{J} \rho_{t_j}^{Euribor} \times E_0^{\mathbb{Q}} \left(\tilde{e}_{t_j} | F \right)$$

avec les notations complémentaires suivantes :

- $\rho_{t_j}^{Euribor}$: Facteur d'actualisation spot pour la maturité t_j correspondant au taux zéro-coupon Swap (Euribor)
- $\tilde{e}_{t_j}$: Payoff du CDS en t_j

En tenant compte du fait que l'espérance mathématique du payoff pour la maturité t_j s'écrit :

$$E_0^{\mathbb{Q}} \left(\tilde{e}_{t_j} | F \right) = \rho_{t_j}^{Euribor} \times (1 - R) \times Proba \left(D \in [t_{j-1};\, t_j] \right)$$

avec

$$Proba \left(D \in [t_{j-1};\, t_j] \right) = p\,(j-1) \times \prod_{k=0}^{j-2} \left(1 - p\,(k) \right)$$

On trouve[23]:

23. Par convention : $\prod_{k=0}^{-1} \left(1 - p\,(k) \right) \equiv 1$

$$V_{cds} = (1 - R) \times \sum_{j=1}^{J} \left\{ \rho_{t_j}^{Euribor} \times p\,(j-1) \times \prod_{k=0}^{j-2} (1 - p\,(k)) \right\}$$

Cette valeur du CDS est la valeur « upfront » qui est versée en totalité par l'acheteur au vendeur à l'initialisation du CDS.

A titre d'exemple, nous allons pricer un CDS dont les caractéristiques sont :

- Entité de référence : Emetteur Corporate X fictif
- Nominal : EUR 10M
- Périodicité : 3M ($\tau = 0.25$)
- Maturité : 5A

On se donne une courbe des taux swap Euribor dont on a déduit les taux zéro-coupon swap correspondants en appliquant la méthode du « bootstrap » (cf. tableau 9.3).

i	Taux au Pair	Taux ZC
1	2.25	2.250
2	2.75	2.757
3	3.23	3.246
4	3.68	3.719
5	4.10	4.177
6	4.50	4.620
7	4.88	5.050
8	5.23	5.467
9	5.55	5.871
10	5.85	6.260

TAB. 9.3 – Taux Euribor « Au Pair » et Zéro-Coupon (Annuels)

On complète cette courbe des taux par un taux zéro-coupon Euribor 3M à 2%.

A partir des taux zéro-coupon annuels précédents, on calcule les taux zéro-coupon trimestriels par interpolation linéaire ainsi que les facteurs d'actualisation correspondants (cf. graphique 9.4).

i	Taux Zéro-Coupon	Facteurs d'Actualisation
1	2.000	0.99506157
2	2.083	0.98974331
3	2.167	0.98405207
4	2.250	0.97799511
5	2.376	0.97106532
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	3.001	0.92873383
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
39	6.163	0.55816464
40	6.260	0.54485939

TAB. 9.4 – Taux Zéro-Coupon et Facteurs d'Actualisation Euribor (Trimestriels)

En appliquant la formule de pricing donnée ci-dessus avec le taux de recouvrement (40%), les probabilités de défaut trouvées précédemment (cf. Tableau 9.2) et les facteurs d'actualisation ci-dessus (cf. Tableau 9.4), on trouve une prime « upfront » de 6.0639% :

$$\begin{aligned} V_{CDS} &= 0.4 \times 0.3674\% \times 1 \times 0.99506157 \\ &+ 0.4 \times 0.3938\% \times (1 - 0.3674\%) \times 0.98974331 \\ &+ 0.4 \times 0.4202\% \times (1 - 0.3674\%) \times (1 - 0.3938\%) \times 0.98405207 \\ &+ \cdots \\ &+ 0.4 \times 0.8295\% \times (1 - 0.3674\%) \times \ldots \times (1 - 0.8035\%) \times 0.81497708 \\ &= 6.0639\% \end{aligned}$$

En principe, cette valeur (prime « upfront ») est répartie en paiements périodiques $\mathrm{S_{cds}}$ de période τ.

Sous hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), la valeur actuelle ajustée du risque (de défaut) des paiements périodiques $\mathrm{S_{cds}}$ à chaque date t_j (j=1...J) doit être égale à la valeur de la prime « upfront » :

$$Payer\ V_{cds}\ en\ t_0 \qquad \Longleftrightarrow Payer\ S_{cds}\ en\ t_j\ \ (j = 1 \ldots J)$$

Il faut donc tenir compte dans le pricing de la prime périodique $\mathrm{S_{cds}}$ que ce flux de cashflows peut être interrompu (avant la maturité du CDS) en cas de défaut de l'émetteur X.

Au final on a donc pour 1 Euro de nominal :

$$\boxed{S_{cds} = \frac{V_{cds}}{\sum_{j=1}^{J} \left\{ \rho_{t_j}^{Euribor} \times \prod_{k=0}^{j-1} (1 - p(k)) \right\}}}$$

La marge du CDS (exprimée en base annuelle) est finalement donnée par :

$$M_{cds} = \frac{S_{cds}}{\tau}$$

Dans le cadre du précédent exemple, la prime périodique annualisée correspondante à la prime « upfront » est de 139.24bp. En conséquence, l'acheteur s'engage à payer tout les 3M un montant de EUR 34810 :

$$EUR\,34810 = EUR\,10M \times 0.25 \times 1.3924\%$$

jusqu'à la date d'échéance du CDS ou jusqu'à l'occurrence d'un évènement de crédit contractuel.

Dans les exemples numériques, nous avons pris un pas de discrétisation égal à la périodicité des paiements (3M). En pratique, il est préférable de prendre une discrétisation du temps plus fine pour tenir compte de la forme des courbes de taux zéro-coupon et du fait que le défaut peut être constaté à tout moment.

9.2.3 Valorisation des CDS

Venons-en maintenant au problème de la valorisation d'une position de CDS en cours de vie.

Reprenons les notations du paragraphe 9.2.2 et plaçons-nous à une date t_{j^*} correspondant à l'une des dates de paiement de la prime périodique du CDS.

$$\underbrace{date\ de\ valeur}_{t_0} < \underbrace{date\ de\ valorisation}_{t_{j^*}} < \underbrace{date\ de\ maturit\acute{e}}_{t_J}$$

La procédure de valorisation consiste à couvrir fictivement la position en cours de vie par un CDS de sens contraire.

Plus précisément, on va calculer successivement :

- La prime d'un CDS qui couvre la position en cours de vie (hedge)
- Le delta des paiements périodiques entre la position initiale et la couverture
- La valeur actuelle du flux de delta de paiements périodiques (latent)
- La valeur capitalisée des flux passés sur la position de CDS (réalisé)
- La valorisation totale de la position par addition du latent et du réalisé

Le CDS de couverture doit avoir les mêmes caractéristiques que le CDS en cours de vie que l'on cherche à valoriser, à savoir :

- Montant nominal : N
- Entité de référence : X
- Périodicité des paiements : τ
- Date de maturité : t_J

Le calcul de la prime du CDS de couverture est réalisé en appliquant les formules données au paragraphe 9.2.2 :

$$M_{hedge} = \frac{(1-R) \times \sum_{j=j^*}^{J} \left\{ \rho_{t_j}^{Euribor} \times p\,(j-1) \times \prod_{k=0}^{j-2} (1-p\,(k)) \right\}}{\tau \times \sum_{j=j^*}^{J} \left\{ \rho_{t_j}^{Euribor} \times \prod_{k=0}^{j-1} (1-p\,(k)) \right\}}$$

Notons que les primes M_{cds} et M_{hedge} seront très vraissemblablement différentes pour les deux raisons suivantes :

1. Les dates de calcul n'étant pas les mêmes, les inputs rentrants dans le calcul de ces primes diffèrent très certainement :
   (a) Taux Euribor

   (b) Probabilités de défaut
   (c) Taux de recouvrement anticipé en cas de défaut

2. Les durées des CDS diffèrent :
   (a) Le CDS initial avait une durée de J périodes au moment de sa mise en place
   (b) Le CDS de couverture a une durée de $J - j^*$ périodes en date de valorisation

On calcule ensuite la différence entre les deux primes :

$$\triangle_{cds/hedge} = M_{cds} - M_{hedge}$$

Notons que le signe de $\triangle_{cds/hedge}$ détermine le signe du P/L de la position de CDS (hors financement).

Enfin, le calcul de la valeur actuelle du flux de delta de paiements périodiques doit tenir compte qu'un défaut sur l'entité de référence annule les paiements périodiques sur les deux CDS (même raisonnement que pour le calcul de la prime périodique à partir de la prime « upfront » du paragraphe 9.2.2).

La valeur latente de la position CDS en cours de vie s'écrit donc finalement :

$$\boxed{MV_{CDS}^{Latent} = N \times \triangle_{cds/hedge} \times \tau \times \sum_{j=j^*}^{J} \left\{ \rho_{t_j}^{Euribor} \times \prod_{k=0}^{j-1} (1 - p(k)) \right\}}$$

Intéressons-nous maintenant au calcul du réalisé de la position.

Ce calcul consiste à capitaliser les casflows passés (la technique est la même quelque soit l'instrument financier), on a :

$$MV_{CDS}^{Réalisé} = N \times M_{cds} \times \tau \times \sum_{j=0}^{j^*-1} \left\{ \prod_{k=j}^{j^*-1} \left(1 + R_{j,j+1}^{Euribor} \times \tau\right) \right\}$$

La valorisation totale de la position de CDS (en cours de vie) n'est autre que la somme du latent et du réalisé :

$$MV_{CDS} = MV_{CDS}^{Latent} + MV_{CDS}^{Réalisé}$$

Notons que pour une position spéculative de type « Long Naked CDS », le break-even défini comme la valeur de M_{hedge} qui annule la valorisation totale de la position (P/L total) est :

$$M_{hedge}^* = M_{cds} \times \left[1 + \frac{\sum_{j=0}^{j^*-1} \left\{ \prod_{k=j}^{j^*-1} \left(1 + R_{k,k+1}^{Euribor} \times \tau\right) \right\}}{\sum_{j=j^*}^{J} \left\{ \rho_{t_j}^{Euribor} \times \prod_{k=0}^{j-1} (1 - p(k)) \right\}} \right]$$

Un spéculateur anticipant une dégradation de la solvabilité de l'entité de référence et donc une hausse de la prime du CDS sur cette entité de référence est en portage négatif sur sa position initiale de CDS (il paye la prime). La prime « break-even » (sur le CDS de couverture) augmente donc avec la durée de portage de la position.

9.3 Arbitrage CDS vs Asset-Swap

Cette section traite de l'arbitrage entre un Credit Default Swap et un Asset-Swap (de mêmes caractéristiques). Nous montrons que la base est, sous certaines hypothèses non-standards sur la structure du CDS, égal à moins le spread swap-Etat équivalent. Dans le cas standard, nous montrons que les deux facteurs à considérer dans le pricing de la base sont la qualité de crédit de l'émetteur sous-jacent (CDS et Asset-Swap) et la surcote ou décote de l'obligation sous-jacente par rapport au pair.

Note : Le lecteur est invité à se reporter au Chapitre 5 pour tout ce qui concerne les swaps de taux et les asset-swap.

9.3.1 Montage de la Position

Supposons que nous mettions en place la position suivante :

1. Long d'un Asset-Swap de maturité K pour un nominal N :
   (a) Long obligation « risquée » de maturité K
   (b) Payeur d'un swap structuré en fonction des caractéristiques de l'obligation (coupon et prix de marché)
2. Financement de l'Asset-Swap par un roll-over d'emprunts à 3M (on suppose que l'on est une banque AAA et que l'on se finance à Euribor)
3. Couverture du risque de crédit par un CDS de même nominal et de même maturité que l'Asset-Swap

Tant qu'il n'y a pas de défaut de l'émetteur des titres, cette stratégie rapporte tout les 3 mois un montant :

$$-N \times \frac{(M_{cds} - M_{a-s})}{4}$$

avec :

- $M_{\text{a-s}}$: Marge de l'Asset-Swap au dessus de l'Euribor 3M ($M_{\text{a-s}} > 0$)
- M_{cds} : Prime du Credit Default Swap

On appelle « base » la différence entre la prime du CDS et la marge d'Asset-Swap (annualisée) :

$$\boxed{Base = M_{cds} - M_{a-s}}$$

Que vaut la base ? Pour répondre à cette question et avant tout développement formel ou simulation, il faut partir d'une intuition purement financière.

Puisque le rôle d'un CDS est de couvrir son détenteur contre le risque de défaut sur l'entité de référence X, on peut donc considérer en première approximation que le CDS transforme l'obligation « risquée » en une obligation « sans risque » (de mêmes caractéristiques). On en déduit donc que la base doit être égale à moins la marge d'asset-swap sur le titre « sans risque » (Etat) équivalent.

Il s'agit d'un raisonnement théorique fondé sur une structure de CDS non standard (cf. paragraphe 9.3.2). On montre que ce résultat théorique n'est pas toujours vrai avec une structure de CDS standard telle que celle décrite dans ce chapitre (cf. paragraphe 9.3.3).

9.3.2 Calcul de la Base : Cas Théorique

Afin de démontrer formellement notre intuition du paragraphe 9.3.1, il est nécessaire de créer un CDS « théorique » qui diffère du CDS « standard » au niveau du processus de réglement/livraison en cas de défaut de l'entité de référence.

On considère donc la structure de CDS non standard suivante :

- La prime du CDS est payée jusqu'à l'échéance du CDS qu'il y ait un défaut ou pas
- En cas de défaut, le vendeur du CDS se substitue à l'émetteur de l'obligation et assure le paiement des intérêts et du principal selon l'échéancier normalement prévu

On suppose de plus que :

- Le vendeur du CDS est sans risque de crédit (Etat)
- L'acheteur du CDS est une contrepartie bancaire (risque « Euribor »)

Sous ces hypothèses, notre intuition peut faire l'objet d'une démonstration formelle. On a donc :

$$\boxed{Marge\,Théorique = -Marge\,"Swap - Etat"}$$

<u>Preuve :</u>

On part d'un CDS non standard pour lequel :

- Le sous-jacent est un zéro-coupon « risqué »
- En cas de défaut, le remboursement est garanti à l'échéance (et non à la date de défaut)

On note :

- B(0,T) : Prix d'un zéro-coupon sans risque (Etat) de maturité T
- B^{*}(0,T) : Prix d'un zéro-coupon swap de maturité T
- B^{**}(0,T) : Prix d'un zéro-coupon « risqué » de maturité T

On montre facilement[24] que la valeur du CDS portant sur le zéro-coupon « risqué » de maturité T est ègale à :

$$V_{cds}\,(0,T) = B\,(0,T) - B^{**}\,(0,T)$$

Etendons ce résultat au cas où le sous-jacent est une obligation couponnée qui paye un coupon C (t=1...T) et rembourse le pair (100) à l'échéance (T). La valeur du CDS est égal à la somme des valeurs des CDS propres à chaque flux :

$$\begin{aligned}
V_{cds} &= C \times \sum_{i=1}^{N} \left[B\,(0,T_i) - B^{**}\,(0,T_i)\right] + 100 \times \left[B\,(0,T_N) - B^{**}\,(0,T_N)\right] \\
&= C \times \sum_{i=1}^{N} B\,(0,T_i) + 100 \times B\,(0,T_N) \\
&- C \times \sum_{i=1}^{N} B^{**}\,(0,T_i) + 100 \times B^{**}\,(0,T_N) \\
&= V_{Etat} - V_{Corp}
\end{aligned}$$

V_{cds} est la valeur « upfront » du CDS, on calcule la prime périodique (annualisée) M_{cds} en écrivant :

24. Cf. Marteau D. et Dehache D. (2001), précédemment cité

$$V_{cds} = M_{cds} \times \tau \times \sum_{k=1}^{K} B^*(0,T_k)$$

L'actualisation est effectuée au taux swap Euribor car on est une banque AAA de première catégorie.

On trouve donc :

$$M_{cds} = \frac{V_{Etat} - V_{Corp}}{\tau \times \sum_{k=1}^{K} B^*(0,T_k)}$$

Par ailleurs, on sait (cf. Chapitre 5) que la marge de l'Asset-Swap construit à partir de l'obligation couponnée précédente s'écrit :

$$M_{a-s} = \frac{V_{Swap} - V_{Corp}}{\tau \times \sum_{k=1}^{K} B^*(0,T_k)}$$

On a donc finalement :

$$Base\,Théorique = \frac{V_{Etat} - V_{Swap}}{\tau \times \sum_{k=1}^{K} B^*(0,T_k)}$$

On aura reconnu dans l'expression précédente de la base théorique la marge de l'Asset-Swap « Swap-Etat ».

Ce qui termine la preuve.

Ce résultat est donc bien conforme à notre intuition qui veut qu'un Asset-Swap sur un titre « risqué » dont le risque de crédit est couvert par un CDS doit être équivalent à un Asset-Swap sur un titre « sans risque » de mêmes caractéristiques. Notons qu'en général, la marge sur les Asset-Swaps « sans risque » (Swap-Etat) est négative (les taux de swap sont supérieurs aux taux Etat), par conséquent, la base théorique est positive.

9.3.3 Analyse de la Base : Cas Standard

Dans le cas standard, il est difficile de trouver une interprétation simple de la base pour les deux raisons suivantes :

- Dans le cadre d'un CDS standard, le vendeur rembourse le « pair » en cas de défaut mais ne se substitue pas à l'émetteur (en cohérence avec le traitement comptable et juridique des faillites)
- Les vendeurs de CDS sont (en général) des banques qui (comme toutes les autres entreprises) ont un risque de signature

Supposons néanmoins que l'on mette en place une position longue d'asset-swap couverte par un CDS standard de mêmes caractéristiques.

Plus précisément on a la position suivante :

- Long d'un Asset-Swap de maturité J pour un nominal N sur une obligation « risquée » émise par l'entité X. Soit $M_{a\text{-}s}$ la marge (annualisée) de l'asset-swap au dessus de l'Euribor. Cet Asset-Swap est financé par un roll-over d'emprunts (on suppose que l'on est une banque AAA et que l'on se finance à Euribor)

- Couverture du risque de crédit sur l'obligation par un CDS de même nominal N et de même maturité J que l'Asset-Swap et paiement périodique d'une prime annualisée $\mathrm{M_{cds}}$

Compte tenu des résultats obtenus précédemment, cette position génère un flux de cashflows tous égaux à :

$$CF_{t_j} = -N \times \tau \times (M_{cds} - M_{a-s}) \qquad avec \qquad j = 1 \ldots J$$

Et ce tant que l'entité de référence X n'est pas en défaut de paiement.

Supposons que l'entité de référence X fasse défaut à une date t_j quelconque et que l'on puisse solder l'ensemble des positions à cette date.

Les opérations à réaliser sont les suivantes :

1. Livraison de l'obligation à la contrepartie du CDS contre paiement du « pair » ce qui annule le CDS
2. Remboursement du nominal du dernier emprunt contracté ce qui annule le roll-over d'emprunts mis en place pour financer l'achat de l'Asset-Swap (au « pair »)
3. Couverture du swap de taux par un swap de sens contraire ou annulation pure et simple auprès de la contrepartie de l'Asset-Swap ce qui donne lieu à une soulte

L'incertitude réside donc dans le swap de taux « hors marché » négocié à l'initialisation de la position d'Asset-Swap.

Introduisons un CDS « exotique » (noté CDS*) qui permet de solder le swap de taux négocié à l'initialisation de l'Asset-Swap à « flat » en cas de défaut sur l'entité de référence.

L'introduction de ce CDS permet de retrouver le résultat précédent :

$$\left.\begin{array}{l} Long\ Asset - Swap \\ Long\ CDS \\ Long\ CDS^{*} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow Long\ Swap - Etat$$

La base s'écrit maintenant comme la différence entre les deux primes :

$$Base = -M_{cds^*} - M_{swap-etat}$$

Le graphique 9.4 ci-dessous décrit l'évolution de la valeur de la base que nous avons calculé en fonction du spread de crédit.

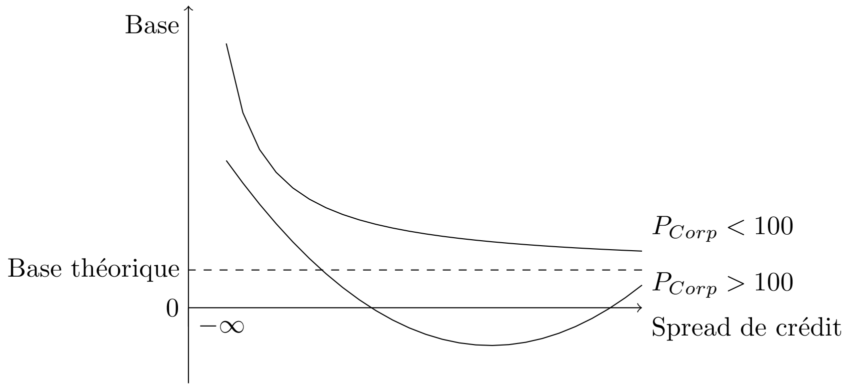

FIG. 9.4 – *Evolution de la Base en Fonction du Spread de Crédit*

Deux cas sont envisageables à l'initialisation de l'asset-swap :

1. L'obligation traite en dessous du pair ($P_{Corp} < 100$) : Dans ce cas la valeur de marché du swap est positive (pour le détenteur de la position) et la soulte (cash payé par l'acheteur de l'asset-swap) est répercutée positivement sur la marge de l'Asset-Swap. A taux de coupon constant, toute augmentation du spread de crédit entraîne une baisse de la prime négative du CDS* (donc une hausse de la base) et une augmentation de la décote de l'obligation (donc de la market value du swap de taux)
2. L'obligation traite au dessus du pair ($P_{Corp} > 100$) : Dans ce cas la valeur de marché du swap est négative et la soulte (cash reçu par l'acheteur de l'Asset-Swap) est répercutée négativement sur la marge de l'Asset-Swap. A taux de coupon constant, toute augmentation du spread de crédit entraîne une hausse de la prime positive du CDS* donc une baisse de la base (qui peut devenir négative si la prime du CDS* devient plus importante en valeur absolue que le spread swap-Etat) puis remonte lorsque l'effet de diminution de la market-value du swap devient plus importante que l'effet de hausse du spread de crédit. On retombe dans le premier cas lorsque la market value du swap de taux devient positive

A titre d'exemple, considérons une obligation à taux fixe « in fine » émise par un émetteur corporate X dont les caractéristiques sont :

- Coupon : 4%
- Maturité : 5A
- Prix : 94.52%

En appliquant les principes de construction et de pricing précédents, on trouve les caractéristiques des swap structurés Corporate (X) et Etat :

- Taux Fixe : 4%
- Périodicité du Taux Variable : 3M ($\tau = 0.25$)
- Maturité : 5A
- Valeur : 5.48%
- Marge Asset-Swap « Corporate » : 110 bp
- Marge Asset-Swap « Etat » : - 25 bp

Le tableau 9.5 qui suit donne les éléments de calculs intermédiaires pour le calcul final des marges d'asset-swap Corporate et Etat.

t	CF	B_{swap}	$CF*B_{swap}$	B_{corp}	$CF*B_{corp}$	B_{etat}	$CF*B_{etat}$
1	4	0.97799	3.91198	0.97087	3.88349	0.98039	3.92156
2	4	0.94706	3.78824	0.93151	3.72605	0.95169	3.80679
3	4	0.90861	3.63446	0.88368	3.53472	0.91529	3.66116
4	4	0.86410	3.45643	0.82917	3.31671	0.87259	3.49036
5	104	0.81497	84.75762	0.76978	80.05771	0.82501	85.80186

TAB. 9.5 – Calculs Intermédiaires pour la Base Théorique (Exemple)

A partir des données de calculs intermédiaires du tableau précédent, on trouve les valeurs suivantes pour le flux de cashflows de l'obligation « risquée » actualisés dans les courbes de taux zéro-coupon Swap, Corp et Etat :

- $V_{Swap} = 99.55$

– $\mathrm{V}_{\mathrm{Corp}}= 94.52$
– $\mathrm{V}_{Etat}= 100.68$

Par ailleur, le dénominateur commun aux formules de calcul des marges d'Asset-Swap, Corporate et Etat est égal à 4.57.

En appliquant les formules données au paragraphe 9.3.2, on trouve :

$$M_{swap-Etat} = \frac{99.55 - 100.68}{4.57} = -25bp$$

et

$$M_{swap-corp} = \frac{99.55 - 94.52}{4.57} = -110bp$$

Supposons que l'on a couvert, à l'initialisation de l'opération, l'Asset-Swap précédent par le CDS 5A du paragraphe 9.2.2 pricé à 139bp de prime périodique annualisée.

Si l'on investi EUR 10M dans cet Asset-Swap financée à Euribor 3M, la position « asset-swap plus financement » génère un cashflow trimestriel positif égal à EUR 27511. La position globale (asset-swap plus CDS) génère un cashflow trimestriel négatif égal à EUR 7300 (34811 – 27511) correspondant à une base de 29bp (139 – 110). Cette base est à comparer à la marge « swap-Etat » équivalente qui vaut - 25bp.

On paye donc 4 bp au dessus de la base théorique (25bp) car on bénéficie d'une sortie à market value anticipée positive ($\mathrm{MV}_{\mathrm{swap}} = 5.48\%$) si l'entité de référence X fait défaut [25].

25. Dans un monde où les taux de swap forwards se réalisent, la market value de la partie « swap » de l'asset-swap est invariante (+5.48%)

Chapitre 10

Capital Structure (Merton) Arbitrage

On commence par une présentation exhaustive du modèle de Merton permettant de calculer la probabilité de défaut d'une société à partir de sa structure bilancielle. On montre en particulier comment calculer numériquement la probabilité de défaut dans le contexte usuel où la valeur et la volatilité des actifs de la société n'est pas connue. On termine cette première section par une critique du modèle de Merton et une présentation comparative de deux autres modèles de type structurel (Moody's-KMV et CreditGrades). La section suivante est une introduction aux techniques d'arbitrages « bilanciels » dans le cadre du modèle de Merton. On commence par étudier la relation de dépendance entre le cours de l'action d'une société et le spread de crédit sur sa dette corporate. On décrit ensuite les arbitrages intra- « capital structure » (même société mais instruments différents) et inter- « capital structure » (mêmes instruments mais sociétés différentes appartenant au même secteur d'activité). Enfin, la dernière section permet d'introduire les obligations convertibles en actions, instruments financiers hybrides de type obligataire mais sensibles au cours de l'action « sous-jacente ». On montre en particulier comment il serait possible de coupler un modèle de pricing par arbre binaire avec un modèle de Merton afin de tenir compte de la relation de dépendance vue plus haut entre le spread de crédit et le cours des actions.

10.1 Le Modèle de Merton

Nous avons déjà évoqué le modèle de Merton dans la première partie du Chapitre 9 sur le risque de défaut et le calcul des probabilités de défaut. Cette première section du présent chapitre va nous permettre d'aller plus loin dans l'étude du modèle de Merton à travers sa résolution numérique concrète dans le contexte usuel où la valeur des actifs de la société n'est pas connue.

10.1.1 Les Hypothèses du Modèle

Le modèle de Merton est basé sur les travaux de R.C. Merton[1].

Merton a montré que la valeur des actions et de la dette d'une société (passif) sont basées sur les mêmes cashflows, à savoir les cashflows générés par les actifs de la société. Ainsi, les

1. Merton R.C. (1974), « On the pricing of corporate debt : The risk structure of interest rates», The Journal of Finance, Vol. 29, N°2

risques et la valorisation de ces deux composantes du passif d'une société sont étroitement liées.

On considère une société dont l'actif est financé au passif par des fonds propres (détenus par les actionnaires) et de la dette (détenue par les créanciers). Le bilan « économique » de cette société est représentée par le graphique 10.1 ci-dessous.

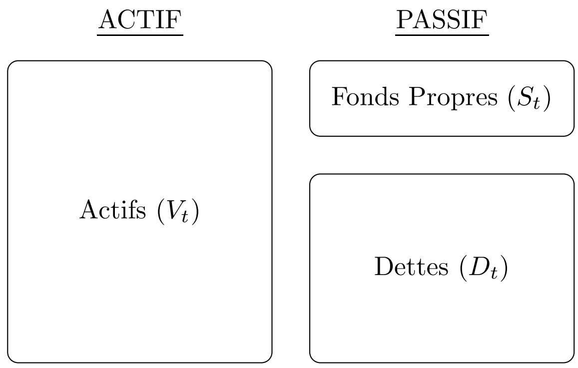

FIG. 10.1 – *Bilan Economique d'une Entreprise*

Il s'agit d'un bilan économique car $\mathrm{V_t}$, $\mathrm{S_t}$ et $\mathrm{D_t}$ représentent les valorisations en « valeur de marché » de l'actif, des fonds propres et de la dette de la société (respectivement) et non les valeurs comptables classiques de ces différentes composantes du bilan.

Le modèle de Merton suppose que les actifs de la société sont négociables et suivent une dynamique du type :

$$\frac{dV_t}{V_t} = r \times dt + \sigma_V \times dB_t \qquad (\textit{mouvement brownien géométrique})$$

avec :

- V_t : Valeur des actifs
- σ_V : Volatilité de la valeur des actifs
- r : Taux d'intérêt sans risque

dB_t est un processus de Weiner standard.

La dette de la société est constituée d'un unique zéro-coupon de valeur nominale D et de maturité T.

On suppose que la société est liquidée à l'échéance T de la dette.

Deux situations peuvent alors intervenir selon que la valeur des actifs est :

1. Inférieure à la valeur nominale de la dette ($\mathrm{V_T} < \mathrm{D}$) : Dans ce cas, la société est en faillite et le droit des faillites stipule que les actifs de la société deviennent la propriété des créanciers qui récupèrent donc une proportion $\mathrm{D/V_T}$ du montant nominal de la dette. Les actionnaires perdent la totalité des sommes investies en fonds propres lors de la création de la société
2. Supérieure à la valeur nominale de la dette ($\mathrm{V_T} > \mathrm{D}$) : Les actionnaires peuvent solder les actifs de la société, rembourser les créanciers et se partager le solde ($\mathrm{V_T}$ - D) pro-rata les parts qu'ils détiennent dans la capital de la société

On constate donc que les actions ainsi que la dette de la société peuvent s'interpréter comme des produits dérivés sur les actifs de la société (sous-jacent) :

– Les actionnaires sont longs d'un CALL sur la valeur des actifs V_t de strike D et d'échéance T. A l'échéance ils reçoivent : Max(0, V_T-D)
– Les créanciers sont longs d'un zéro-coupon sans risque de valeur nominale D et short d'un PUT sur la valeur des actifs V_t de strike D et d'échéance T. A l'échéance ils reçoivent : Min(V_T, D)

Les payoffs à l'échéance T des actions et de la dette de la société sont représentés sur le graphique 10.2 ci-dessous.

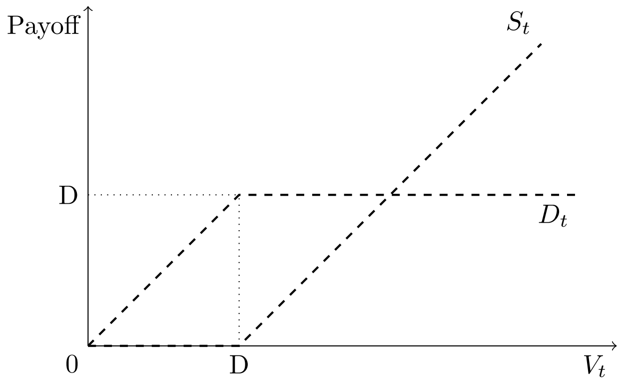

FIG. 10.2 – *Valeurs des Actions et de la Dette à l'Echéance*

Appliquons la formule de valorisation par actualisation de l'espérance des cashflows futurs sous probabilité risque-neutre à la valeur de la dette, on obtient :

$$D_t = B(t,T) \times E[Min(V_T,D)]$$

On peut reécrire l'expression précédente sous la forme[2] :

$$D_t = \underbrace{B(t,T) \times D}_{\substack{Valeur\ d'un\ zéro-coupon \\ sans\ risque\ de\ nominal\ D}} - \underbrace{B(t,T) \times E[Max(0,D - V_T)]}_{\substack{Valeur\ d'un\ PUT\ sur \\ la\ valeur\ des\ actifs\ de\ strike\ D}}$$

Appliquons maintenant la formule de Black-Scholes au PUT précédent :

$$B(t,T) \times E[Max(0,D - V_T)] = B(t,T) \times D \times N(-d_2) - V_t \times N(-d_1)$$

On obtient après avoir réarrangé les termes[3] :

$$\boxed{D_t = V_t \times N(-d_1) + B(t,T) \times D \times N(d_2)}$$

avec :

$$d_1 = \frac{Ln\left(^{V_t}/_D\right) + \left(r + \frac{\sigma_V^2}{2}\right) \times (T - t)}{\sigma_V \times \sqrt{T-t}} \qquad et \qquad d_2 = d_1 - \sigma_V \times \sqrt{T-t}$$

N(.) est la fonction de distribution cumulée de la loi normale (centrée-réduite).

2. En notant que $Min(a,b) = a - Max(0,a - b)$
3. $N(x) + N(-x) = 1$ (par symétrie de la loi normale)

10.1.2 Calcul des Indicateurs de Risques

L'expression de la valeur de marché de la dette D_t donnée au paragraphe 10.1.1 permet de déduire les principaux indicateurs de risque de crédit, dont la probabilité de défaut, à partir des deux paramètres suivants :

- V_t : Valeur des actifs
- σ_V : Volatilité des actifs

On a vue que la société faisait défaut en T si la valeur de ses actifs à cette date V_T était inférieure à la valeur nominale de sa dette D. On a donc[4] :

$$\begin{aligned} p_t &= Proba\left[V_T < D\right] \\ &= Proba\left[V_t \times Exp\left\{\left(r - \frac{\sigma_V^2}{2}\right) \times (T-t) + \sigma_V \times \sqrt{T-t} \times Z_{0,1}\right\} < D\right] \\ &= Proba\left[Z_{0,1} < -\frac{Ln\left(V_t/D\right) + \left(r - \frac{\sigma_V^2}{2}\right) \times (T-t)}{\sigma_V \times \sqrt{T-t}}\right] \\ &= Proba\left[Z_{0,1} < -d_2\right] \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{p_t = N\left(-d_2\right)}$$

Les autres indicateurs de risques complémentaires à la probabilité de défaut sont[5] :

- Taux de recouvrement
- Levier d'endettement
- Spread de crédit

Le taux de recouvrement (anticipé) se définit comme le ratio de la valeur anticipée en t de la valeur des actifs à l'échéance sur la valeur nominale de la dette :

$$\delta_t = \frac{E\left[V_T\right]}{D}$$

Pour calculer le taux de recouvrement (anticipé), on reécrit l'expression de la valeur de la dette D_t donnée au paragraphe 10.1.1 en appliquant le résultat précédent au calcul de l'espérance :

$$\begin{aligned} E\left[Min\left(V_T,D\right)\right] &= E\left[D \times 1_{\{V_T \geq D\}} + V_T \times 1_{\{V_T < D\}}\right] \\ &= D \times E\left[1_{\{V_T \geq D\}}\right] + E\left[V_T \times 1_{\{V_T < D\}}\right] \\ &= D \times E\left[1_{\{V_T \geq D\}}\right] + E\left[V_T\right] \times E\left[1_{\{V_T < D\}}\right] \\ &= D \times (1 - p_t) + E\left[V_T\right] \times p_t \end{aligned}$$

On trouve finalement comme expression de D_t :

$$D_t = B\left(t,T\right) \times \left[D \times (1 - p_t) + D \times \delta_t \times p_t\right]$$

4. $Z_{0,1}$ suit une loi normale centrée-réduite

5. Les formules des indicateurs de risques complémentaires sont issues du cours de DEA de D. Kurtz & T.B. Pignard (2004), « Modélisation du Risque de Crédit », DEA de Statistique et Modèles aléatoires en économie et finance, Universités Paris 7 & Paris 1

Par identification on déduit l'expression de δ_t :

$$\delta_t = \frac{V_t \times N(-d_1)}{D \times B(t,T) \times N(-d_2)}$$

Le levier d'endettement est, par définition, le ratio entre la valeur actuelle de la valeur nominale de la dette D et la valeur des actifs V_t :

$$l_t = \frac{D \times B(t,T)}{V_t}$$

Le levier d'endettement mesure le pourcentage des actifs (en valeur de marché) financé par endettement.

Le spread de crédit (implicite) se défini comme la différence entre le taux d'intérêt de la dette de la société (risquée) et le taux d'intérêt sans risque (de maturité T).

On a donc :

$$Spread_{t,T} = R^*_{t,T} - R_{t,T}$$

avec :

$$R_{t,T} = -\frac{Ln\left[D \times B(t,T)\right]}{T-t} \qquad et \qquad R^*_{t,T} = -\frac{Ln\left[D(t,T)\right]}{T-t}$$

En remplaçant dans la formule de calcul du spread de crédit (implicite) les taux $R_{t,T}$ et $R^*_{t,T}$ et par leurs expressions respectives, on trouve finalement :

$$Spread_{t,T} = -\frac{1}{T-t} \times Ln\left[\frac{D(t,T)}{D \times B(t,T)}\right]$$

Notons que l'on peut réecrire les formules de Merton pour la dette D_t sous la forme :

$$D_t = D \times B(t,T) \times \left[\frac{N(-h_1)}{l_t} + N(h_2)\right]$$

avec [6] :

$$h_1 = \frac{Ln\left(1/l_t\right) + \frac{\sigma_V^2}{2} \times (T-t)}{\sigma_V \times \sqrt{T-t}} \qquad et \qquad h_2 = h_1 - \sigma_V \times \sqrt{T-t}$$

D'où l'on tire l'expression suivante du spread de crédit :

$$Spread_{t,T} = -\frac{1}{T-t} \times Ln\left[\frac{N(-h_1)}{l_t} + N(h_2)\right]$$

En utilisant ces notations, on constate que la valeur des actifs V_t, la volatilité des actifs σ_V et le levier d'endettement l_t sont les trois paramètres fondamentaux pour l'analyse du risque de crédit d'une société.

6. Il s'agit d'un simple changement de notation : $h_i = d_i$ pour i=1,2

On peut aussi reformuler cette dernière expression du spread de crédit en fonction de la probabilité de défaut et du taux de recouvrement (anticipé). Considérons pour simplifier le cas d'un zéro-coupon de maturité 1Y, on a :

$$\begin{aligned}
Spread_{1Y} &= -Ln\left[\frac{N(-h_1)}{l_t}+N(h_2)\right] \\
&= -Ln\left[1+\frac{N(-h_1)}{l_t}-N(-h_2)\right] \\
&\simeq -\left[\frac{N(-h_1)}{l_t}-N(-h_2)\right] \\
&\simeq N(-h_2)\times\left[1-\frac{1}{l_t}\times\frac{N(-h_1)}{N(-h_2)}\right] \\
&\simeq p_t\times[1-\delta_t]
\end{aligned}$$

On retrouve ici la formule donnée au Chapitre 9.

Rappelons qu'il s'agit d'une approximation qui ne vaut que pour ε petit devant 1 et pour une maturité du zéro-coupon d'un an[7].

10.1.3 Résolution du Modèle de Merton

Dans notre présentation du modèle de Merton au paragraphe 10.1.1, nous avons considéré que la valeur ainsi que la volatilité des actifs étaient connues. Cette situation est applicable dans certains cas (sociétés foncières, holding financières, etc.) où les actifs des sociétés sont négociables sur un marché. Dans tous les autres cas, les actifs n'étant pas négociables, la valeur ainsi que la volatilité des actifs ne sont pas directement observables[8].

Lorsque l'approche directe n'est pas possible, les paramètres V_t et σ_V peuvent être estimés indirectement à partir de la valeur S_t et de la volatilité σ_S des actions de la société.

Au paragraphe 10.1.1, nous avons vu que les actions de la société pouvaient s'interpréter comme un Call sur la valeur des actifs V_t de prix d'exercice D et de maturité T. Par application de la formule de Black-Scholes, on en déduit la valeur de ces actions (α) :

$$\boxed{S_t = V_t\times N(d_1) - D\times B(t,T)\times N(d_2)}$$

On note par ailleurs que l'équilibre du bilan « économique » de la société est bien réalisé puisqu'en additionnant les valeurs des actions S_t et de la dette D_t et réarrangeant les termes, on retrouve bien la valeur des actifs V_t :

$$V_t = S_t + D_t$$

Il s'agit là d'une application particulière de la relation de parité call-put.

Afin de calculer V_t et σ_V en fonction de S_t et σ_S il est nécessaire de se doter d'une seconde équation.

Sous les hypothèses du modèle de Merton, la valeur des actions de la société suit un mouvement Brownien géométrique du type :

7. $\epsilon = \frac{N(-h_1)}{l_t} - N(-h_2)$

8. C'est d'ailleurs l'un des problèmes principaux lié à la généralisation de la méthode de valorisation en « valeur de marché » (mark-to-market) qui bien que très séduisante sur le plan de la cohérence se heurte dans son application pratique à l'incomplétude et/ou à l'illiquidité de nombreux marchés dans et surtout en dehors de la sphère financière

$$dS_t = \mu \times S_t \times dt + \sigma_S \times S_t \times dB_t$$

avec :

- S_t : Valeur des actions
- σ_S : Volatilité de la valeur des actions
- μ : Rendement moyen des actions

Puisque les actions S_t sont un Call sur la valeur des actifs V_t, on peut donc écrire en toute généralité :

$$S_t = F\left(V_t,t\right)$$

Différençions cette dernière expression à l'ordre 1 en t et à l'ordre 2 en V_t, on obtient :

$$dS_t = \frac{\partial F}{\partial V_t} \times dV_t + \frac{\partial F}{\partial t} \times dt + \frac{1}{2} \times \sigma_V^2 \times V_t^2 \times \frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2} \times \left[\partial V_t\right]^2$$

Remplaçons dV_t par sa valeur et appliquons le Lemme d'Itô, on obtient :

$$dS_t = \left(\frac{1}{2} \times \sigma_V^2 \times V_t^2 \times \frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2} + r \times V_t \times \frac{\partial F}{\partial V_t} + \frac{\partial F}{\partial t}\right) \times dt + \sigma_V \times V_t \times \frac{\partial F}{\partial V_t} \times dB_t$$

Par identification des deux expressions précédentes de dS_t on déduit que la volatilité σ_S du processus S_t s'écrit (β) :

$$\boxed{\sigma_S = \sigma_V \times \frac{V_t}{S_t} \times N\left(d_1\right)}$$

Les deux équations encadrées constituent un système d'équations non linéraire permettant de calculer V_t et σ_V en fonction de S_t et σ_S. Ce système n'est cependant pas soluble analytiquement, il est donc nécessaire d'adopter une approche numérique.

On peut écrire ce système d'équations sous la forme :

$$\begin{cases} V &= f^1_{S,\sigma_S}\left(V,\sigma_V\right) \\ \sigma_V &= f^2_{S,\sigma_S}\left(V,\sigma_V\right) \end{cases} \qquad avec \qquad \begin{cases} f^1_{S,\sigma_S}\left(V,\sigma_V\right) &= \frac{D \times B(t,T) \times N(d_2) + S}{N(d_1)} \\ f^2_{S,\sigma_S}\left(V,\sigma_V\right) &= \frac{1}{N(d_1)} \times \frac{S}{V} \times \sigma_S \end{cases}$$

En notant $f=(f^1,f^2)$ et $u=(V,\sigma_V)$ on peut écrire le système précédent sous la forme réduite :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= f\left(u_n\right) \\ u_0 &= \left(S + D,\sigma_S\right) \end{cases}$$

La solution du système initial est donnée par la limite de la suite $(u_n)_{n>0}$:

$$u^* = \underset{n \to +\infty}{Lim}\, u_n \qquad \Longleftrightarrow u^* = f\left(u^*\right)$$

Cette limite peut être calculée numériquement de façon itérative, le calcul s'arrête lorsque le critère suivant est vérifié :

$$\triangle_n = \left\|u_{n+1} - u_n\right\| < \epsilon$$

ε est choisi en fonction du degré de précision désiré.

A titre d'exemple, nous allons appliquer l'algorithme précédent sur une société fictive dont les caractéristiques « bilancielles » sont :

- Capitalisation boursière : 5 ME
- Volatilité des actions de la société : 50%
- Valeur nominale de la dette : 80 ME
- Maturité de la dette : 1A
- Taux d'intérêt sans risque : 3%

On démarre le processus itératif avec $u_0 = (85, 50)$ et on prend 10^{-5} comme seuil de convergence [9].

Les valeurs obtenues pour la valeur V et la volatilité σ_V des actifs sont :

- V : 82.615 ME
- σ_V : 3.092%

On peut maintenant calculer les différents indicateurs de risque à l'aide des formules données au paragraphe 10.1.2, on obtient :

- Probabilité de défaut : 2.30%
- Taux de recouvrement anticipé : 99%
- Levier d'endettement : 94%
- Spread de crédit : 2.63bp

On vérifie de même que le bilan « économique » est bien équilibré :

- S_t: 5 ME
- D_t: 77.615 ME

On retrouve bien l'égalité $V_t = S_t + D_t$.

10.1.4 Limites et Développements

Le modèle de Merton tel que nous l'avons décrit ci-dessus peut faire l'objet de deux types de critiques :

1. Spécifiques au modèle de Merton stricto-sensus
2. Intrinsèques aux modèles dits « structurels » dont le modèle de Merton est l'archétype

Les critiques spécifiques portent sur certaines hypothèses du modèle qui ne correspondent pas avec la réalité souvent complexe de la vie des entreprises, à savoir :

- Les structures de passif des entreprises incluent généralement des dettes couponnées voir mêmes des obligations convertibles et/ou des obligations perpétuelles (titres hybrides) et beaucoup plus rarement des zéro-coupons
- Le seuil de défaut est incertain et en général inférieur à la valeur comptable de leur dette
- Les entreprises peuvent faire défaut (sur le principal de leur dette) à tout moment et non uniquement à la date d'échéance
- Les distributions de probabilités de défaut pour une distance au défaut donnée ne sont pas gaussiennes

9. On constate que l'algorithme converge après 10 itérations

Le modèle de Merton a fait l'objet de développements ultérieurs visant à s'affranchir de certaines de ses hypothèses dont les deux implémentations opérationnelles les plus connues sont :

- KMV[10] : Modèle « propriétaire » de la société Moody's qui commercialise son logiciel CreditMonitor (programme et données). Le modèle KMV a été initialement développé par Vasicek O. et Kealhofer S. afin d'étendre et d'améliorer le modèle de Merton. Bien que cohérent dans les grandes lignes avec l'approche décrite dans les trois paragraphes précédents, le modèle KMV s'en distingue néanmoins sur de nombreux aspects (cf. tableau 10.1 ci-dessous). En particulier, la fonction de distribution permettant de calculer la probabilité de défaut connaissant la distance au défaut est estimée empiriquement sur la base de données historiques de l'agence de notation Moody's. Selon Moody's-KMV cette distribution de probabilité ne dépend pas de facteurs spécifiques tels que l'industrie, la taille, la période ou le pays, tous ces facteurs sont capturés dans le calcul de la distance au défaut. Les probabilités de défaut à un an calculées par Moody's-KMV sont appelées « Expected Default Frequency » (EDF) en référence au caractère empirique de la distribution utilisée
- CreditGrades[11] : Modèle « ouvert » d'origine J.P. Morgan implémenté et commercialisé par la société RiskMetrics (programme et données). Le modèle théorique implémenté dans CreditGrades a été développé au sein du département R&D de la banque JP Morgan et vise à calculer la probabilité de défaut ou probabilité de survie (survival probability) d'une société donnée à un horizon donné. Comme pour le modèle de Moody's-KMV, il s'agit d'un modèle structurel cohérent dans sa conception avec le modèle de Merton mais néanmoins différent sur un certains nombre d'aspects (cf. tableau 10.1 ci-dessous). Le point essentiel dans ce modèle est la prise en compte d'un seuil de défault aléatoire (log-normal). Cette propriété permet entre autre d'obtenir des probabilités de défaut à court terme cohérentes avec les probabilités de défaut implicites constatés dans le marché (calculées à partir des spreads de crédit)

Sans rentrer dans le détail de ces deux modèles, il peut néanmoins être intéressant de montrer comment ils se différencient du modèle de Merton au niveau des aspects suivants :

- Type des dette admissibles au passif
- Modélisation du seuil de défaut
- Formule de la distance au défault
- Loi de distribution de la distance au défaut (probabilité de défaut)
- Calibrage du modèle à partir des données du marché action de la société

Le tableau 10.1 ci-dessous compare les trois modèles au niveau de ses différents critères.

10. Crosbie P. et Bohn J. (2003), « Modeling Default Risk », Moody's-KMV
11. Finger C.C. (ed, 2002), « CreditGrades Technical Document », RiskMetrics Group

	Merton	Moody's-KMV	CreditGrades
Types de Dettes	Zéro-coupon	Zéro-coupon, dette couponnée classique, obligation convertible et obligation perpétuelle	Zéro-coupon, dette couponnée classique, obligation convertible et obligation perpétuelle
Seuil de Défaut (DP)	Dette totale	Entre la dette CT et la dette totale (n.c.)	Produit du ratio « dette par action » par le taux de recouvrement moyen en cas de défaut (Log-Normal)
Distance-au-Défaut (DD)	$-d_2$	Ecart entre la valeur des actifs et le seuil de défaut par unité de risque et de valeur d'actif	Ecart entre le logarithme de la valeur des actifs et le logarithme du seuil de défaut par unité de risque
Probabilité de Défaut (Pr)	Distribution théorique, Normale centrée-réduite	Distribution empirique, non Normale	Distribution théorique, non Normale
Calibrage du Modèle	Equations (α) et (β) du paragraphe 10.1.3	Equation (α') pour une option à barrière et (β') non communiquée	Equations (α") et (β") obtenues en examinant les conditions aux bords à LT de la distance au défaut

TAB. 10.1 – Comparatif des Modèles Structurels

Au-delà de ses problèmes spécifiques qui peuvent êtres en partie résolus par des évolutions du modèle initial, certaines critiques portent non pas uniquement sur le modèle de Merton, mais sur les modèles « structurels » dans leur ensemble :

- Utiliser le prix des actions pour calculer les probabilités de défaut revient à introduire dans ces estimations la « volatilité » à court terme des marchés actions et leur excès récurrents sur le moyen/long terme (bulles spéculatives)
- Ces modèles supposent implicitement que les marchés actions et les marchés de dettes corporate sont arbitrés ce qui n'a pas forcément été le cas dans le passé. Néanmoins, le décloisonnement progressif des activités actions et taux/crédit au sein des établissements financiers (banques et hedge-funds principalement) devrait concourir à terme à l'inter-efficience progressive de ces deux marchés

Malgré les limitations que nous venons d'exposer, le modèle de Merton reste l'archétype des modèles « structurels » et son étude est riche d'enseignements qualitatifs.

10.2 Capital Structure Arbitrages

Nous allons dans cette section introduire les techniques d'arbitrage basées sur les modèles structurels en utilisant le modèle de Merton[12]. On commence par étudier la relation de dépendance entre le cours de l'action d'une société et le spread de crédit sur sa dette corporate dans le cadre du modèle de Merton. On décrit ensuite l'arbitrage intra- « capital structure » consistant à arbitrer les actions d'une société contre la dette de la même société. On termine par une présentation de l'arbitrage inter- « capital structure » consistant à arbitrer les actions d'une société contre son synthétique créé à partir des actions de deux sociétés du même secteur d'activité.

10.2.1 Relation entre le Spread de Crédit et le Cours des Actions

Dans ce paragraphe nous allons étudier la relation qui lie le cours des actions d'une société au spread de crédit (implicite) de sa dette. Problème simple a priori mais qui pose néanmoins la question du statut de la volatilité des actions.

Peut-on faire varier le cours des actions tout en supposant la volatilité des actions constante ?

Les évidences statistiques mentionnées dans la littérature ont au contraire tendance à montrer que la volatilité des indices boursiers et les indices eux-mêmes sont négativement corrélés :

- La volatilité tend à monter lorsque les indices baissent
- La volatilité tend à baisser lorsque les indices montent

Ce fait empirique a notamment été attesté sur le marché des actions US à partir des séries statistiques de l'indice S&P500 et de l'indice VIX qui mesure la volatilité implicite du S&P500 calculée à partir des options traitées sur le CBOE[13].

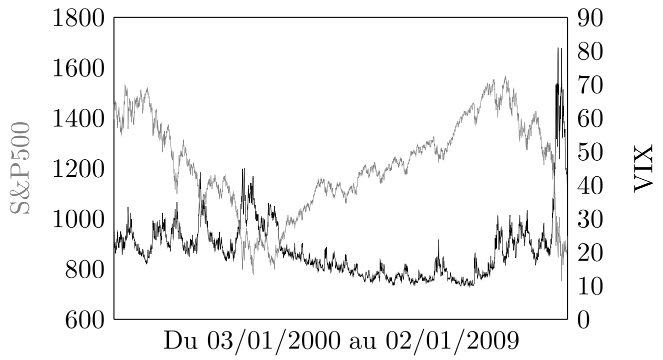

FIG. 10.3 – *Indice VIX vs Indice S&P500*

Le même constat peut être fait au niveau des sociétés individuelles.

Si on ne peut pas laisser la volatilité des actions d'une société donnée inchangée lorsque l'on fait varier le cours des actions de cette société, quelle relation doit-on prendre en compte entre les deux quantités ?

12. Cette section est en essentiellement basée sur des travaux de recherche réalisés par l'auteur de 2008 à 2013 qui n'ont pas fait l'objet de publication antérieure à ce polycopié

13. On consultera le document « VIX : CBOE Volatility Index » du CBOE (2003) pour plus d'informations sur la méthodologie de construction de cet indice

Une solution simple pour contourner ce problème consiste à fixer la volatilité des actifs de la société V et à résoudre le modèle de Merton en calculant V_t et σ_S en fonction de S_t et σ_V.

La volatilité des actifs d'une société peut-elle être légitimement considérée comme constante ?

La réponse est oui pour la plupart des sociétés.

La volatilité des actifs d'une société doit rester constante car elle dépend directement de son business model.

J.P. Crosbie et J.R. Bohn [14] ont montré que les deux facteurs les plus discriminants pour l'analyse des risques des actifs d'une société sont :

1. Le secteur d'activité
2. La taille de la société

Le premier facteur détermine la régularité des cash-flows. Certains secteurs d'activités ont des revenus récurrents et stables (banques de détails, opérateurs telecom ou sociétés d'autoroutes par exemple). D'autres secteurs, au contraire, ont des revenus plus « aléatoires » ou « cycliques » (banques d'investissement, équipementiers telecom, entreprises sidérurgiques ou sociétés pétrolières par exemple).

Le second facteur est aussi important car, toutes choses égales par ailleurs, plus la taille de la société est grande et plus le risque sur ses actifs est faible. Trois effets contribuent à ce phénomène :

- Diversification : La diversification s'entend au sens géographique (EMEA, Amérique, Asie) et par types de clientèle (professionnels vs particuliers ou grands comptes vs PMI/PME, par exemple)
- Leadership : Le leader sur un marché peut plus facilement imposer ses prix (« pricing power ») ce qui n'est pas le cas de ses challengers
- Protectionnisme : Certains gouvernements ont tendance à favoriser leurs grands groupes nationaux sur leur marché domestique en permettant l'établissement de monopoles ou d'oligopoles via diverses procédures réglementaires, fiscales ou financières

Au final, pour une société évoluant sur un secteur mature, le risque intrinsèque associé à son actif peut donc être considéré comme constant.

Cette analyse nous amène à reconsidérer la résolution du modèle de Merton telle qu'elle a été exposée au paragraphe 10.1.3.

On peut donc écrire le système d'équations précédent sous la nouvelle forme [15] :

$$\begin{cases} V &= g^1_{S,\sigma_V}(V,\sigma_S) \\ \sigma_S &= g^2_{S,\sigma_V}(V,\sigma_S) \end{cases} \qquad avec \qquad \begin{cases} g^1_{S,\sigma_V}(V,\sigma_S) &= \frac{D\times B(t,T)\times N(d_2)+S}{N(d_1)} \\ g^2_{S,\sigma_V}(V,\sigma_S) &= N(d_1)\times \frac{V}{S}\times \sigma_V \end{cases}$$

En notant $g=(g^1,g^2)$ et $u=(V,\sigma_S)$ on peut écrire le système précédent sous la forme :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= g(u_n) \\ u_0 &= (S+D,\sigma_V) \end{cases}$$

14. Crosbie J.P et Bohn J.R (2003), Modeling Default Risk, Moody's-KMV

15. Seule la seconde équation change (on cherche σ_S et non plus σ_V qui est maintenant donné), la première équation est quant à elle inchangée (on cherche toujours V)

La solution du système initial est donnée par la limite u^* de la suite $(u_n)_{n>0}$ calculée de la même façon qu'au paragraphe 10.1.3.

L'exemple numérique qui suit permet d'illustrer concrètement les deux approches possibles dans la résolution du modèle de Merton ainsi que la relation fondamentale entre le spread de crédit et le cours des actions.

Appliquons l'algorithme précédent sur une société fictive avec les données suivantes :

- Capitalisation boursière : 5 ME
- Volatilité des actifs de la société : 10%
- Valeur nominale de la dette : 80 ME
- Maturité de la dette : 1A
- Taux d'intérêt sans risque : 3%

On démarre le processus itératif avec $u_0 = (85, 50)$ et on prend 10^{-5} comme seuil de convergence[16].

Les valeurs obtenues pour la valeur V et la volatilité σ_S sont :

- V : 80.815 ME
- σ_V : 108.96%

On peut maintenant calculer les différents indicateurs de risque à l'aide des formules données au paragraphe 10.1.2, on obtient :

- Probabilité de défaut : 36.26%
- Taux de recouvrement anticipé : 93.5%
- Levier d'endettement : 96%
- Spread de crédit : 237.3bp

On vérifie de même que le bilan « économique » est bien équilibré :

- S_t: 5 ME
- D_t: 75.815 ME

On retrouve bien l'égalité $V_t = S_t + D_t$.

La différence essentielle entre les deux exemples vient de la volatilité des actifs qui est à 10% (donné) dans cet exemple et à 3% (calculé) dans le précédent.

Venons-en maintenant à la relation entre le prix des actions et le spread de crédit dans le cadre du modèle de Merton.

Le graphique 10.4 ci-dessous montre comment évolue le spread de crédit en fonction de la capitalisation boursière (pour des valeurs comprises entre 1 ME et 50 ME) d'une même société.

16. On constate que l'algorithme converge après 6 itérations

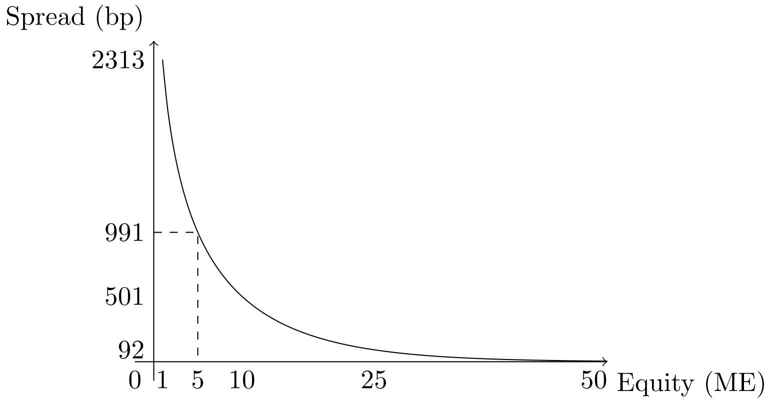

FIG. 10.4 – *Relation entre le Spread de Crédit et la Valeur des Actions*

De façon générale, le spread de crédit évolue en sens inverse du cours de l'action du simple fait que plus l'action monte et plus la valeur de la composante optionnelle de la dette diminue (Put sur la valeur des actifs).

Plus précisément lorsque le cours des actions :

- Est proche de zéro, la composante optionnelle de la dette (Put sur la valeur des actifs) est à la monnaie et devient prépondérente dans le pricing. Toute baisse supplémentaire a un double impact combiné sur la hausse de la probabilité de défaut et de la perte en cas de défaut
- Est très élevé, la composante optionnelle de la dette (Put sur la valeur des actifs) est très en dehors de la monnaie et c'est la composante « sans risque » de la dette qui devient prépondérante. Le spread de crédit est donc quasi-nul et ne varie pratiquement plus avec la hausse du cours des actions

Cette relation est à la base des techniques d'arbitrage de type « Actions vs Dettes » que l'on va étudier au paragraphe 10.2.2.

10.2.2 Arbitrage Actions vs Dettes

Nous avons vu à la section 10.1 que, dans le cadre du modèle de Merton, les actions et la dette d'une société peuvent êtres interprétées comme des « produits dérivés » sur un même sous-jacent, l'actif de la société. **Nous allons dans ce paragraphe regarder dans quelle mesure ce constat peut être utilisé pour arbitrer les actions de la société contre la dette de la même société.**

Supposons que l'on constate à une date t quelconque que la dette cotée sur le marché est sur-évaluée par rapport à sa valeur théorique calculée dans le cadre du modèle de Merton à partir de la valeur de marché des actions.

$$D_t^{Merton} < D_t^{Market}$$

Cette situation s'interprète comme un mis-pricing entre le marché action et le marché de la dette de la société.

Une première idée pour « jouer » ce mis-pricing consiste à monter la position suivante :

- Long Actions (1)
- Short Dette (α)

Sans perte de généralité on raisonne sur la totalité du passif de la société et on note par α le hedge-ratio de la position.

La valeur de la position d'arbitrage s'écrit :

$$V_t^{Arb} = S_t - \alpha \times D_t$$

On joue le retour de la valeur de marché de la dette de la société sur sa valeur théorique calculée dans le cadre du modèle de Merton à partir de la valeur de marché des actions.

$$D_{t \to t'}^{Market} \longrightarrow D_{t \to t'}^{Merton}$$

On ne souhaite évidemment pas prendre de risque directionnel sur la valeur des actifs de la société (sous-jacent commun aux deux composantes du passifs). On va donc couvrir la position pour qu'elle soit insensible en première approximation (position delta-neutre) aux variations de la valeur des actifs de la société.

$$\triangle V_t^{Arb} \equiv 0 \qquad pour \qquad \triangle V \neq 0 \qquad (contrainte\ de\ couverture)$$

En reprenant l'interprétation en terme optionnel des deux composantes du passif, on a :

$$\left.\begin{matrix} Long & 1 & Actions \\ Short & \alpha & Dette \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} Long & \alpha - Straddle \\ Short & ZC\ sans\ risque \end{matrix}\right.$$

avec

$$Long \quad \alpha - Straddle \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{matrix} Long & 1\ Call \\ Long & \alpha\ Put \end{matrix}\right.$$

Le Call et le Put sont des options sur la valeur des actifs de la société de même prix d'exercice (montant nominal de la dette) et même date d'échéance (échéance de la dette). Puisque le zéro-coupon sans risque n'est pas sensible (par définition) à la valeur des actifs, on peut raisonner sur le straddle et calculer le hedge-ratio qui vérifie notre contrainte de couverture.

$$\triangle V_t^{Arb} \quad = 0 \quad pour \quad \triangle V \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = -\frac{\triangle_{Call}}{\triangle_{Put}}$$

où $\triangle_{Call}$ et $\triangle_{Put}$ sont les deltas respectifs du Call et du Put, on a donc :

$$\boxed{\alpha = \frac{N(d_1)}{N(-d_1)} \qquad (hedge - ratio)}$$

Ainsi construite, notre position d'arbitrage initiale est delta-neutre mais est aussi :

- Gamma-positive
- Theta-négative
- Véga-neutre

En effet, puisque le gamma d'un Call et d'un Put sur un même sous-jacent, un même prix d'exercice et une même date d'échéance sont égaux, on a :

$$\Gamma_{Arb.} = \Gamma_{C/P} \times \frac{1}{N(-d_1)} > 0$$

On est theta-négatif du simple fait que l'on est long des deux options (on perd donc la valeur temps des options au fur et à mesure que l'on se rapproche de la date d'échéance des options). Enfin, on est véga-neutre par hypothèse d'une volatilité des actifs constante comme justifiée au paragraphe 10.2.1. Indépendamment du zéro-coupon, on constate donc que notre position d'arbitrage initiale est aussi un pari sur une variation du sous-jacent plus importante que la perte de valeur temps sur l'horizon de placement.

Pour obtenir un arbitrage parfait, il faudrait monter une position qui soit gamma-neutre et theta-neutre en plus d'être delta-neutre et véga-neutre. Il faudrait donc pouvoir arbitrer directement la dette de la société avec son synthétique coté dans le marché.

Supposons que le marché cote les Put sur la valeur des actifs de la société, de même prix d'exercice (montant nominal de la dette) et même date d'échéance (échéance de la dette) que ceux de l'option implicite dans la décomposition de la dette de la société. On va donc monter la position suivante :

- Short Dette (1)
- Long Dette Synthétique (1)

Pour reconstituer une position longue sur la dette synthétique de la société, on va se mettre simultanément :

- Long Zéro-Coupon sans risque de maturité T et de nominal D
- Short Put sur la valeur des actifs de la société de maturité T et de prix d'exercice D

On a donc au final :

$$\left.\begin{array}{ccc} Short & 1 & Dette \\ Long & 1 & Dette\ Synthétique \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} Short & Put\ Implicite \\ Long & Put\ Réel \end{array}\right.$$

Cette position est un arbitrage parfait et peut être débouclée à l'échéance avec une valeur nulle :

$$V_{Arb,\,T} \equiv 0 \qquad (par\ construction)$$

Le P/L de cette position sur [t, T] est précisément égal à la différence entre la valeur de la dette dans le marché et sa valeur théorique (à condition que le Put soit coté à partir des actions de la société) :

$$P/L^{Arb.}_{t \to T} = D^{Market}_t - D^{Merton}_t > 0$$

Notons pour terminer que cet arbitrage parfait suppose pour être mis en oeuvre qu'il existe des Put cotés sur la valeur des actifs de la société ce qui implique que cet actif soit lui-même coté.

10.2.3 Arbitrage Actions vs Synthétiques Actions

Considérons trois sociétés (A, B et C) appartenant au même secteur d'activité et dont on suppose que les actifs sont identiques (au sens du modèle de Merton), à savoir :

$$\begin{cases} \sigma_V^A = \sigma_V^B = \sigma_V^C = \sigma_V & (\textit{mêmes volatilités}) \\ \rho_V^{A,B} = \rho_V^{B,C} = \rho_V^{C,A} = 1 & (\textit{parfaitement corrélés}) \end{cases}$$

On suppose de plus que les dettes zéro-coupon des trois sociétés ont la même date de maturité T.

Afin de faire abstraction des différences de taille entre ces trois sociétés, on travaille sur la base d'une valeur d'actif normalisée :

$$V_t^A = V_t^B = V_t^C = V_t \qquad (\textit{valeurs d'actifs normalisées})$$

Puisque dans le cadre du modèle de Merton, les trois paramètres fondamentaux pour l'analyse du risque de crédit d'une société sont :

- La valeur des actifs V_t
- La volatilité des actifs σ_V
- Le levier d'endettement l_t

il est donc possible de créer un « synthétique » de la société C à partir d'un portefeuille constitué d'une part α de la société A et d'une part (1-α) de la société B[17] :

$$\boxed{\textit{"Synthétique" Société C} = \alpha \times \textit{Société A} + (1-\alpha) \times \textit{Société B}}$$

Le calcul du paramètre α ($0 < \alpha < 1$) est réalisé en exigeant que le synthétique de la société C créé à partir des sociétés A et B ait le même leverage ratio que la société C :

$$l_t^{\alpha \times A + (1-\alpha) \times B} \equiv l_t^C \qquad (\textit{contrainte de couverture})$$

avec

$$l_t^C = \frac{D^C \times B(t,T)}{V_t^C} \quad \textit{et} \quad l_t^{\alpha \times A + (1-\alpha) \times B} = \frac{\left[\alpha \times D^A + (1-\alpha) \times D^B\right] \times B(t,T)}{\alpha \times V_t^A + (1-\alpha) \times V_t^B}$$

En remplaçant dans la contrainte de couverture précédente les membres de gauche et de droite par leurs expressions respectives, on trouve finalement la valeur de α[18]:

$$\boxed{\alpha = \frac{D^C - D^B}{D^A - D^B}}$$

On en déduit immédiatement que le nominal de la dette de la société Synt-C est égal au nominal de la dette de la société C :

$$D^{Synt-C} \equiv D^C$$

17. Le lecteur notera la similitude entre cette position d'arbitrage sur le marché action et les positions de type « butterfly » obligataire décrites au Chapitre 4. De fait, cet arbitrage « Actions Société C vs Synthétique - Actions Société C » peut parfaitement s'interpréter comme un « butterfly » actions. Le synthétique est de nature structurel (Merton) sur le marché action alors qu'il est de nature actuariel sur le marché obligataire

18. On note que α ne dépend pas de t

Plus généralement, la société C et son synthétique créé à partir des sociétés A et B sont deux sociétés identiques dans le cadre du modèle de Merton :

$$Société\ C \underset{Merton}{\Longleftrightarrow} Synthétique\ \alpha \times A + (1-\alpha) \times B$$

Compte tenu des hypothèses sur les actifs des trois sociétés et de la contrainte de couverture, on montre facilement que les profils (au sens de Merton) des deux sociétés sont les mêmes :

$$\begin{cases} V_t^C &= V_t^{\alpha \times A + (1-\alpha) \times B} = V_t \\ \sigma_V^C &= \sigma_V^{\alpha \times A + (1-\alpha) \times B} = \sigma_V \\ l_t^C &= l_t^{\alpha \times A + (1-\alpha) \times B} \end{cases}$$

Enfin, si la société C et son synthétique $Synt - C = \alpha \times A + (1-\alpha) \times B$ sont identiques au sens de Merton, les valeurs de leurs actions respectives doivent êtres les mêmes [19] :

$$\boxed{S_t^C \equiv S_t^{Synt-C}}$$

Supposons que l'on constate à une date t quelconque que la capitalisation boursière de la société C est sous-évaluée par rapport à sa valeur théorique calculée dans le cadre du modèle de Merton à partir des capitalisations boursières des sociétés A et B.

$$S_t^C < S_t^{Synt-C}$$

Cette situation s'interprète comme un mis-pricing au sein du marché action entre les sociétés « équivalentes » (au sens de Merton) A, B et C.

Pour « jouer » ce mis-pricing, nous allons donc monter la position suivante :

- Long Actions Société C
- Short Actions « Synthétique » Société C

On est donc simultanément long d'un Call sur la valeur des actifs de la société C et short d'un Call sur la valeur des actifs de la société Synt-C avec :

$$Actifs\ C \underset{Merton}{\equiv} Actifs\ Synt - C$$

Ces deux Call ont la même date d'échéance et le même prix d'exercice.

Cette position est un arbitrage parfait et peut être débouclée à l'échéance des options avec une valeur nulle :

$$V_{Arb,\,T} \equiv 0 \qquad (par\ construction)$$

Le P/L de cette position sur [t, T] est précisément égal à la différence entre la valeur de la société C dans le marché et sa valeur théorique :

$$P/L_{t \to T}^{Arb.} = S_t^{Synt-C} - S_t^C > 0$$

Notons que dans le cadre du modèle de Merton, l'existence d'une date d'échéance garantie le P/L de cette stratégie à cette date. Dans le cadre des modèles Moody's-KMV et CreditGrades (et a fortiori dans le monde réel) les actions sont des options à barrière de type « down-out » perpétuelles qui par nature n'offrent pas de garantie de retour à zéro de la valorisation de la position d'arbitrage à une date future donnée.

19. Cette propriété résulte trivialement des égalités précédentes sur la valeur des actifs et le nominal de la dette

10.3 Application au Pricing des Obligations Convertibles

Les obligations convertibles en actions ont été créé au 19ème siècle aux Etats-Unis afin d'obtenir des produits financiers hybrides « attractifs » combinant :

– Gain potentiel « illimité » des actionnaires
– Risque « limité » des créanciers

Cette attractivité apparente des obligations convertibles a néanmoins un coût lié au pricing de l'option de conversion qui se matérialise par un prix plus élevé que l'obligation équivalente non convertible.

10.3.1 Généralités sur les Obligations Convertibles

Une obligation convertible[20] est une obligation à taux fixe et amortissement « in fine » émise par un émetteur privé (corporate) à laquelle est attachée un droit de convertibilité en actions de la société émettrice (contrairement à une obligation corporate classique non convertible).

Le profil « rendement-risque » hybride des obligations convertibles est obtenu grâce à l'option de conversion qui permet au détenteur d'obligations convertibles de convertir ses titres en un nombre prédéfini d'actions de la société émettrice. On appelle Ratio de Conversion (RC) le nombre d'actions obtenues lors de la conversion d'une obligation, il est défini contractuellement à l'émission de l'obligation convertible.

$$\boxed{1\ Obligation\,Convertible \quad \underset{Conversion}{\Longrightarrow} \quad RC\ Actions}$$

Ce ratio de conversion est normalement fixe pendant toute la durée de vie de l'obligation convertible (pour les structures « plain vanilla ») mais doit évidemment être modifié dans certains cas d'opérations sur titres (OST).

Outre la convertibilité, les obligations convertibles se distinguent des obligations corporate non convertibles sur trois autres points :

– Cotation : Les obligations convertibles sont généralement cotées en bourse tout comme leur « sous-jacent » action alors que les obligations corporate classiques se négocient généralement sur le marché OTC
– Rang de Créance : Les obligations convertibles sont généralement junior par rapport aux obligations corporates non convertibles (mais bien évidemment sénior par rapport aux actions de la société émettrice). Ce point prend toute son importance pour des sociétés en difficulté ou en en restructuration pour lesquelles la probabilité d'occurrence d'un défaut n'est pas négligeable
– Prime de remboursement : Les obligations convertibles sont remboursées soit « au pair » soit à un prix de remboursement supérieur au pair. Dans ce dernier cas, l'écart entre le prix de remboursement effectif et le pair calculé en pourcentage du pair est appelé prime de remboursement

Toutes choses égales par ailleurs, le taux de coupon d'une obligation convertible à l'émission est inférieur à son équivalent non convertible du fait de l'option de conversion attachée à l'obligation convertible dont ne bénéficie pas le détenteur d'obligations non convertibles.

20. On pourra consulter l'ouvrage de Cazaubieilh F. (2002), Théorie et Pratique des Obligations Convertibles en Actions et des Produits Assimilés, Maxima Ed., pour une introduction générale sur les obligations convertibles

$$\boxed{C_{Convertible} < C_{Non\,Convertible} \qquad (\textit{toutes choses égales par ailleurs})}$$

L'écart correspond à la « prime » payée par l'investisseur pour bénéficier des avantages liés à l'option de conversion (participation à la hausse du cours de l'action).

- L'investisseur abandonne ainsi une part de rendement (coupon moindre) pour l'espoir d'une plus-value (potentiellement illimité) selon l'évolution du cours de l'action sur la durée de vie de l'obligation
- L'émetteur peut obtenir un financement à moindre coût auprès d'investisseurs qui n'auraient ni souscrit à l'introduction en bourse ou à une augmentation de capital (trop risquée), ni à l'émission d'obligations classiques (aucune participation au succès éventuel de l'entreprise)

Le graphique 10.5 décrit l'évolution du prix théorique d'une obligation convertible en fonction du cours de l'action sous-jacente en considérant les autres paramètres constants (date de pricing, courbe des taux Etat, spread de crédit). L'écart correspond à la « prime » payée par l'investisseur pour bénéficier des avantages liés à l'option de conversion (participation à la hausse du cours de l'action).

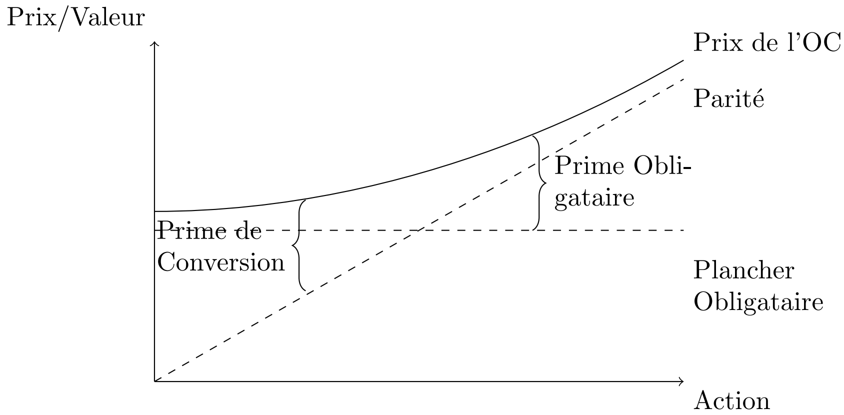

FIG. 10.5 – *Prix d'une Obligation Convertible / Prix de l'Action « Sous-Jacente »*

On constate que le prix de l'obligation convertible est borné inférieurement par les deux quantités suivantes :

- <u>Plancher Obligataire :</u> La valeur V_{OBL} d'une obligation classique ayant les mêmes caractéristiques que l'obligation convertible (taux de coupon, maturité, prix de remboursement, rang de créance, etc.) mais sans l'option de conversion
- <u>Parité :</u> La valeur du portefeuille constitué de RC actions de la société émettrice, appelée aussi « valeur de conversion » de l'obligation convertible

La valeur d'une obligation convertible V_{OC} est toujours supérieure au maximum du plancher obligataire et de la parité (en l'absence d'opportunités d'arbitrages) :

$$\boxed{V_{OC} > Max\,(V_{OBL}, RC \times P_{ACT})}$$

Pour le démontrer, raisonnons par l'absurde en distinguant deux cas.

<u>Si $V_{OC} \leq V_{OBL}$</u>, les porteurs d'obligations classiques ont intérêt à arbitrer en vendant leurs obligations non convertibles et en achetant simultanément des obligations convertibles ce qui mécaniquement fait remonter la valeur de l'obligation convertible au delà du plancher obligataire.

Si $V_{OC} \leq RC \times P_{ACT}$, les opérateurs peuvent réaliser l'arbitrage sans risque suivant :

- Achat d'1 obligation convertible au prix V_{OC}
- Exercice de l'option de conversion (échange d'1 OC contre RC Actions)
- Revente des RC Actions sur le marché

Au total le gain sans risque pour l'investisseur est de $RC \times P_{ACT} - V_{OC} \geq 0$

Dans les deux cas, le marché ne price pas l'option de conversion attachée à l'obligation convertible ce qui n'est pas possible sous hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). On note, de plus, que l'exercice de l'option de conversion par anticipation n'est pas optimale.

Les obligations convertibles se négocient donc avec une prime au dessus du plancher obligataire et de la parité. On appelle :

- Prime de Conversion : La sur-valeur de l'obligation convertible au dessus de la parité
- Prime Obligataire : La sur-valeur de l'obligation convertible au dessus du plancher obligataire

Ces primes sont souvent exprimées sous formes relatives (en %) :

$$\begin{cases} Prime\, de\, Conversion & = \frac{V_{OC} - RC \times P_{ACT}}{RC \times P_{ACT}} \\ Prime\, Obligataire & = \frac{V_{OC} - V_{OBL}}{B_{OBL}} \end{cases}$$

10.3.2 Pricing des Obligations Convertibles

Nous allons appliquer le principe de pricing par arbre binomial, développé initialement par J.A. Cox, S.A. Ross et M. Rubinstein dans le cadre des options [21], pour pricer les obligations convertibles [22].

Pour rappel, le principe du pricing par arbre binomial est composé de deux étapes principales :

- Simulation de la variable d'état de l'instrument à pricer sur un nombre fini de périodes et en considérant deux états du monde possibles à chaque nœud (étape « Forward »)
- Pricing récursif de l'instrument à pricer où à chaque nœud on applique la méthode de valorisation par actualisation au taux sans risque des cashflows futurs sous probabilité risque-neutre (étape « Backward »)

La valorisation théorique de l'instrument financier est la valeur obtenue à la racine de l'arbre (en date de pricing).

Cette méthode de pricing peut être appliquée au cas des obligations convertibles avec les précisions suivantes :

- Variable d'état : Cours de l'action sous-jacente
- Horizon : Maturité de l'obligation convertible
- Périodicité (minimale) : Dépend de la structure de l'instrument

Notons qu'en pratique, le nombre de périodes à prendre en compte résulte d'un arbitrage entre la précision désirée et le temps de calcul.

21. Cox J.C., Ross S.A., and Rubinstein M. (1979), "Option Pricing: A Simplified Approach." Journal of Financial Economics 7

22. Le lecteur est invité à se référer à l'ouvrage de Colmant B. & Delfosse V. (2005), « Les Obligations Convertibles - Mathématique financière et comptabilisation », Larcier Editeur, pour un exposé exhaustif des méthodes de pricing et de valorisation des obligations convertibles

10.3.2.1 Simulation du Cours de l'Action (Forward)

On suppose que le cours de l'action de la société suit un processus stochastique de type mouvement Brownien géométrique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r \times dt + \sigma_S \times dB_t$$

avec

- S_t : Cours de l'actions
- σ_S : Volatilité des actions
- r : Taux sans risque

dB_t est un processus de Weiner standard.

La méthode binomiale consiste à créer une version simplifiée de ce processus stochastique dans laquelle :

- Le temps est discrétisé en un nombre fini de dates (t=0... T)
- S_{t+1} ne peut prendre que deux valeurs possibles fonctions de S_t

Si S_0 est la valeur de l'action connue avec certitude à la date t_0 (date de pricing), les deux règles de construction précédentes impliquent que les valeurs possibles pour le processus simplifié $\{S_t\}_{t=0...T}$ peuvent être représentées par un arbre binaire de profondeur T.

Notons que pour un arbre binaire quelconque de profondeur T, le nombre total de nœuds est de l'ordre de T^3. Afin de limiter le nombre de nœuds (et donc le temps le calcul) dans des conditions normales de pricing (T grand), il est d'usage d'utiliser un type particulier d'arbre binaire appelé arbre binaire recombinant. Un arbre binaire recombinant est un arbre binaire pour lequel les deux nœuds « fils » (date t+1) obtenus à partir du même nœud père (date t) par les séquences « up => down » et « down => up » sont identiques[23]. Le nombre total de nœuds dans un arbre binaire recombinant est de l'ordre de T^2.

Plaçons-nous à un nœud quelconque de l'arbre binaire (date t) pour lequel la valeur de l'action est S_t. Les valeurs possibles pour les deux nœuds fils (date t+1) qui garantissent le caractère recombinant de l'arbre sont données par les formules :

$$\begin{cases} S_{t+1}^u = u \times S_t & u > 1, proba = p_u \\ S_{t+1}^d = d \times S_t & d < 1, proba = p_d \end{cases}$$

Les trois paramètres u, d, p_u (p_d = 1- p_u) sont des constantes dépendants des paramètres du processus stochastique initial.

23. Le nombre total de nœuds pour un arbre binaire recombinant de profondeur T est de l'ordre de T^2 ce qui représente un gain important en terme de temps calcul lorsque T devient grand.

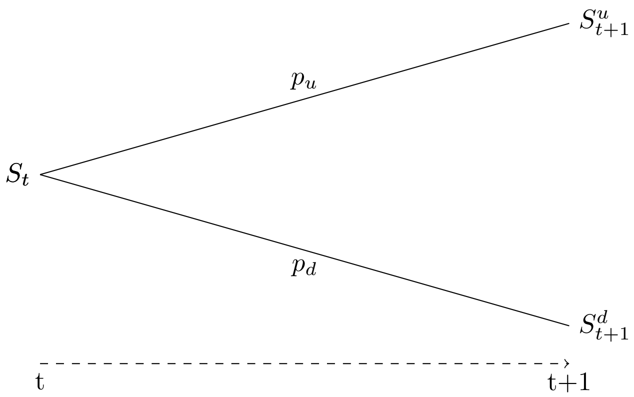

FIG. 10.6 – *Un Noeud Générique de l'Arbre Binaire*

Le graphique 10.6 ci-dessus décrit un noeud quelconque de l'arbre binaire.

En pratique, on utilise les valeurs de u et d suivantes :

$$u = e^{\sigma_S \times \sqrt{\Delta t}} \qquad et \qquad d = e^{-\sigma_S \times \sqrt{\Delta t}}$$

Δt est le pas de la discrétisation.

On calcule finalement la probabilité risque-neutre $\{p\}_{u,d}$ qui permet le passage d'un nœud à ses deux nœuds fils en appliquant la formule générale de valorisation par actualisation au taux sans risque de l'espérance des cashflows futurs sous probabilité risque-neutre :

$$S_t = e^{-r \times \Delta t} \times E_{\{p\}}\left[S_{t+1}\right]$$

En remplaçant l'espérance de S_{t+1} sous la probabilité $\{p\}$ par sa valeur :

$$E_{\{p\}}\left[S_{t+1}\right] = p_u \times u \times S_t + p_d \times d \times S_t$$

On en déduit finalement les probabilités p_u et p_d :

$$p_u = \frac{e^{r \times \Delta t} - d}{u - d} \qquad et \qquad p_d = \frac{u - e^{r \times \Delta t}}{u - d}$$

A ce stade, on est donc en mesure de construire un arbre binaire recombinant simulant les valeurs possibles du cours de l'actions S_t à chaque date t (t=0. . . T) et à chacun des nœuds corresponds à ces dates.

10.3.2.2 Pricing Récursif de l'Obligation Convertible (Backward)

L'étape suivante consiste à calculer la valeur théorique de l'obligation convertible de façon « backward » en passant des feuilles de l'arbre binaire (en date T) jusqu'à la racine de l'arbre (en date t_0) en procédant de façon récursive.

Les valeurs théoriques de l'obligation convertible aux nœuds terminaux sont simples à calculer du fait que ces nœuds correspondent à la date de maturité T de l'obligation convertible et que la valeur d'une obligation convertible est définie contractuellement à cette date.

Plus précisément, la valeur V_T de l'obligation convertible en date de maturité T correspond au maximum entre sa parité et son prix de remboursement :

$$V_T = Max\,(RC \times S_T, P_T + C)$$

avec

- RC : Ratio de conversion
- S_T : Cours de l'action en T
- P_T : Prix de remboursement de l'obligation en T

Le calcul des valeurs terminales de l'obligation convertible est le point de départ du pricing de l'obligation convertible dans l'arbre binaire. L'étape suivante consiste à calculer la valeur théorique de l'obligation convertible aux nœuds de date T-1 et ainsi de suite de façon récursive jusqu'à la racine de l'arbre en date t_0.

Plaçons-nous maintenant à un nœud quelconque de l'arbre binaire (date t) pour lequel les valeurs de l'obligation convertible aux nœuds fils (date t+1), précédemment calculés, sont respectivement V_{t+1}^u et V_{t+1}^d. On obtient la valeur théorique de l'obligation convertible V_t en calculant d'abord l'espérance mathématique de la valeur théorique de l'obligation convertible en t+1 sous la probabilité risque-neutre $\{p\}_{u,d}$ puis en actualisant le résultat obtenu au taux sans risque ajusté d'un spread de crédit Sp_t :

$$V_t = e^{-(r+Sp_t)\times\Delta t} \times \left[p_u \times V_{t+1}^u + p_d \times V_{t+1}^d\right] + C$$

Notons que l'actualisation n'est pas réalisée au seul taux sans risque r car la probabilité {p} est risque-neutre pour la dynamique de l'action sous-jacente à l'obligation convertible. Le risque de crédit associé à l'obligation n'est pas pris en compte dans la probabilité {p}. Notons enfin que ce spread de crédit exogène Sp_t est, en toute généralité, fonction du nœud considéré[24].

Comme l'option de conversion est de type « américaine », on doit intégrer l'hypothèse de conversion anticipée dans l'équation précédente qui devient :

$$V_t = Max\,(RC \times S_t, V_t)$$

S_t est le cours de l'action au nœud considéré.

En appliquant cette formule récursivement des nœuds de date t+1 vers les nœuds de date t jusqu'à la racine de l'arbre, on obtient finalement la valeur théorique de l'obligation convertible qui n'est autre que V_0.

10.3.3 Endogénéisation du Spread de Crédit

L'étude du modèle de Merton réalisée au début de ce chapitre nous a montré que le cours de l'action d'une société et le spread de crédit de la dette de cette société sont deux quantités interdépendantes. Il semble donc cohérent d'utiliser, dans la formule de pricing donnée au paragraphe 10.3.2 (partie « backward » de la méthode de pricing par arbre binomial), un spread de crédit Sp_t qui soit fonction du cours de l'action S_t.

On commence par se donner une structure de bilan en intégrant au passif les obligations convertibles émises par la société.

24. L'intégration dans le modèle d'un spread de crédit variable cohérent avec le prix de l'action sous-jacente à chaque nœud est étudiée au paragraphe 10.3.3.

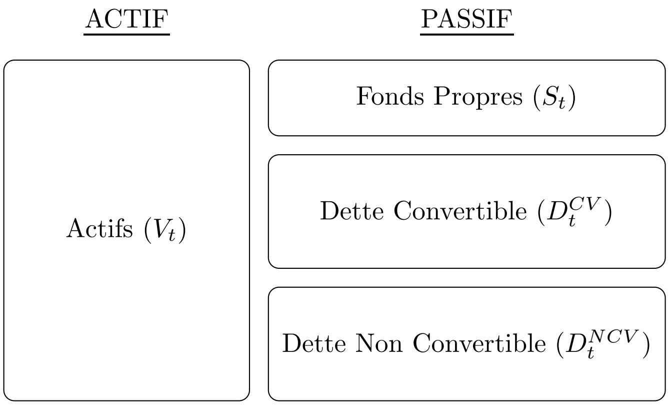

FIG. 10.7 – *Bilan Economique (Modifié) d'une Entreprise*

Il s'agit d'un bilan « économique » comme défini au paragraphe 10.1.1 avec les précisions suivantes :

- D_t^{CV} est la valorisation économique de la dette convertible
- D_t^{NCV} est la valorisation économique de la dette non convertible

On suppose que les dettes convertibles et non convertibles ont la même date de maturité T.

Deux modèles sont envisageables pour endogénéiser le spread de crédit :

1. Modèle hybride
2. Modèle structurel

L'approche usuelle consiste à utiliser un **modèle hybride** permettant d'exprimer le spread le crédit $\mathrm{Sp_t}$ comme une fonction paramétrique du cours de l'action $\mathrm{S_t}$:

$$Sp_t = F_\lambda (S_t)$$

Cette approche a le mérite de la simplicité mais pose deux problèmes :

- Quid du choix de la forme fonctionnelle F et surtout de l'estimation du paramètre λ (scalaire ou vectoriel) associé
- Impossibilité de tenir compte des changements de la structure du passif de la société liés à la convertibilité de l'obligation convertible

Une façon élégante, bien que plus complexe, de résoudre ces deux problèmes consiste à endogénéiser le calcul du spread de crédit dans l'algorithme de pricing par arbre binaire en le couplant avec un **modèle structurel**. Par rapport à l'algorithme présenté au paragraphe 10.3.2, les changements ne concernent que la partie Forward.

On se donne σ_{V} la volatilité des actifs de la société supposée constante.

Plaçons-nous à un nœud quelconque de l'arbre binaire (date t) pour lequel la valeur de l'action est $\mathrm{S_t}$.

L'algorithme modifié comporte trois étapes successives :

1. Calcul de la valeur des actifs $\mathrm{V_t}$ et la volatilité du cours des actions $\sigma_{\mathrm{S,t}}$ en appliquant le modèle structurel à l'horizon t+1
2. Calcul du spread de crédit $\mathrm{Sp_t}$ à appliquer sur l'intervalle [t, t+1] à partir de la valeur des actifs $\mathrm{V_t}$ et la volatilité des actifs σ_{V}

3. Calcul des scenarii S^u_{t+1} et S^d_{t+1} à partir du cours de l'action $\mathrm{S_t}$ et de la volatilité du cours des actions $\sigma_{\mathrm{S,t}}$

On utilisera (à l'étape 1) la somme des valeurs de remboursement (en T) des deux types de dette (convertible et non convertible) pour l'application du modèle structurel.

Cet algorithme doit être appliqué en partant de la racine de l'arbre en date $\mathrm{t_0}$ jusqu'aux feuilles de l'arbre en date T. Une fois l'arbre binaire construit (partie Forward), le pricing de l'obligation convertible est réalisé comme présenté au paragraphe 10.3.2 (partie Backward) en utilisant les spreads de crédit précédemment calculés (à chaque nœud).

Notons que cette technique permet d'intégrer de façon simultanée deux relations présentées au paragraphe 10.2.1 :

- Entre le cours de l'action et le spread de crédit
- Entre le cours de l'action et la volatilité du cours de l'action

Notons enfin que la rupture avec l'hypothèse de volatilité des actions constante fait perdre à l'arbre binaire son caractère recombinant.

Conclusion : Risques et Valorisation... du Point de Vue de L'Actionnaire

Nous allons prendre un peu de recul dans cette « conclusion » et nous interroger sur les concepts de risques et de valorisation, non du point de vue interne (celui de l'équipe de trading pour compte propre) que nous avons largement évoqué dans ce document mais du point de vue externe, celui de l'actionnaire (de long terme).

On pourrait penser, a priori, que le sort des équipes de trading pour compte propre des banques et des actionnaires des mêmes banques sont intimement liés de sorte qu'il assument les mêmes risques et sont intéressés aux mêmes profits. Il n'en est rien et c'est la cause de disfonctionnements largement exacerbés lors des crises qui secouent régulièrement la sphère financière depuis le crack boursier d'octobre 1987.

Les actionnaires d'une banque sont de fait en situation d'asymétrie d'information (quant aux risques réellement pris) et de conflit d'intérêt (du fait du mode de rémunération des traders) vis-à-vis des équipes de trading de cette banque. Cette situation pose la question de l'efficacité mais surtout de la pertinence du paradigme « techniciste » actuel (régulation et contrôle) comme unique solution à ce problème.

Asymétrie d'Information

Les risques « internes » que l'on a largement évoqué dans ce document (taux, crédit et action) sont des risques qui intéressent au premier chef les équipes de trading pour compte propre des banques. Il existe d'autres risques dits « externes » dont l'analyse et la gestion ne relèvent pas directement des équipes de trading des banques[25] :

- Risques de valorisation
- Risques opérationnels
- Risques d'obsolescence des stratégies

Ces risques lorsqu'ils se réalisent peuvent impacter négativement les P/L des portefeuilles de trading pour compte propre et par conséquent la rémunération des actionnaires.

Il y a **risque de valorisation** lorsque les positions prises ne sont plus seulement des actifs cotés sur des grandes places financières sécurisées et liquides. Dans ce cas, le mode de

25. Ils relèvent de la direction des risques, de la direction des ressources humaines et du top management des BFI principalement

valorisation au « juste » prix du marché (mark-to-market) n'est simplement plus applicable en l'état :

1. Les positions peuvent être valorisées en mark-to-market direct mais l'illiquidité des marchés introduit un risque de liquidité
2. Les positions peuvent être valorisées en mark-to-market indirect (pricing) ce qui mécaniquement introduit un risque supplémentaire de modélisation

Dans les deux cas, le non pricing des primes de risque (liquidité et modélisation) impliquent une survalorisation (sur les parties longues des positions).

Comme toutes les autres activités industrielles ou de services, l'activité de trading pour compte propre n'est pas exempte de **risques opérationnels**. On distingue deux types de risques :

1. Il y a d'une part les risques opérationnels classiques liés aux hommes (fraudes, démission d'un collaborateur clé, maladie, etc.), aux systèmes informatiques (pannes, bugs, etc.), aux contrats (risques juridiques), à l'environnement réglementaire (fiscalité, réglementation, etc.)
2. Il y a d'autre part les risques opérationnels propres aux activités de trading et d'arbitrage pour compte propre dues aux (inévitables) erreurs de conception, d'implémentation ou d'exécution des stratégies [26]

Ces risques opérationnels, lorsqu'ils se réalisent, ont un impact négatif sur le P/L du portefeuille de trading pour compte propre.

Enfin, deux phénomènes concourent à l'**obsolescence des stratégies** d'arbitrages, il s'agit de la modification du comportement du système financier et des crises récurrentes du système financier.

Les stratégies d'arbitrages sont essentiellement basées sur l'exploitation d'anomalies dans la structure des facteurs de risques ou de régularités dans l'évolution de ces facteurs de risques. Dans les deux cas, la compétition entre les acteurs (prop-trading des banques, fonds alternatifs, etc.) tend à :

- Faire disparaître certaines anomalies et donc à rendre les stratégies inopérantes du fait du non déclenchement des signaux de prise de position. Les stratégies ne s'appliquant plus, leur P/L devient nul et le coût des ressources nécessaires à leur suivi constitue une perte nette
- Modifier certaines régularités de sorte que les signaux générés sont bien plus fréquemment de faux signaux que de vrais signaux. Les pertes résultantes seront plus ou moins importantes du fait de l'application ou non de stop-loss sur les « trades » (stop-loss de niveau 1 : arrêt du trade)

Toute la difficulté réside ici dans la mise en place de stop-loss sur les stratégies (stop-loss de niveau 2 : arrêt de la stratégie).

Les crises financières, récurrentes depuis le crack d'octobre 1987, offrent un contexte propice à la réalisation de pertes de trading spectaculaires comme nous le prouve le newsflow sur le secteur bancaire depuis le début de la crise des subprimes. Lors d'une crise financière, les hypothèses sur lesquelles sont basées les budgets prévisionnels risques et P/L sont invalidées [27].

26. Erreurs de conception (données, modèles, interprétation, etc.), d'implémentation (développement de feuilles de calcul ou de logiciels propriétaires) et d'exécution (montage et débouclage des positions, gestion dynamique des couvertures, etc.)

27. Marchés devenus illiquides, stress exacerbés au sein des équipes et défiance réciproque entre les différents acteurs du marché sont autant d'éléments explicatifs

Au final, **les portefeuilles de trading et d'arbitrages pour compte propre des banques, souvent présentés comme des rentes par les équipes qui les gèrent, doivent êtres requalifiés dés lors que l'on souhaite prendre en compte les risques que nous venons brièvement de décrire** :

LONG Portefeuille de trading/arbitrages (auto-financées)
<==>
SHORT Roll-over d'options portant sur la réalisation des risques externes

Les P/L prévisionnels des portefeuilles de trading pour compte propre des banques ont donc pour contreparties des risques « externes » qui, lorsqu'ils se réalisent, peuvent entraîner des pertes importantes supportées par les actionnaires des banques.

Conflit d'Intérêt

Les équipes de trading pour compte propre des banques ont une structure de rémunération de type « fixe + variable » :

- La partie fixe correspond au salaire versé au mois
- La partie variable (bonus annuel) est indexée sur le P/L annuel

Outre l'aspect « conventionnel » au sein du système bancaire (mondialisé) qui rend difficile son abandon unilatéral[28], le principal argument (positif) en faveur du maintien de ce système de rémunération est son caractère incitatif.

En d'autres termes, ce système de rémunération aurait un impact positif sur le P/L généré par les équipes de trading pour compte propre de sorte que le manque à gagner pour les actionnaires (total des bonus versés aux équipes de trading) serait largement compensé par le surcroît de P/L généré du fait de l'incentive.

Cet argument apparaît avec le recul très discutable car le mode de rémunération des équipes de trading qui les intéresse aux gains sans les mettre à contribution en cas de perte constitue une incitation manifeste à prendre plus de risques.

Le graphique 10.8 ci-dessous compare les profils de rémunération (annuelle) « fixe-only » et « fixe + variable ».

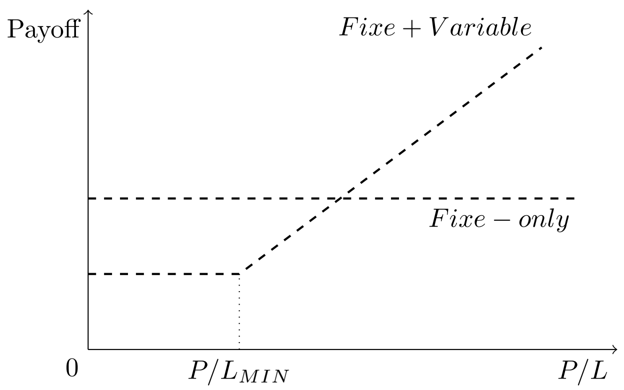

FIG. 10.8 – *Comparaison des Modes de Rémunération*

28. Du fait de la « concurrence » entre banques pour attirer des profils sensés êtres rares et mobiles

On constate que ce mode de rémunération correspond à une option implicite dont les caractéristiques sont :

- Sous-jacent : P/L du portefeuille de trading
- Strike : Un niveau de P/L minimal à dépasser pour être « bonussé »
- Prime : Différentiel sur la partie fixe des deux modes de rémunération [29]
- Volatilité : Volatilité du P/L du portefeuille de trading
- Maturité : 1 An

Cette option est (implicitement) vendue aux équipes de trading par les actionnaires des banques.

$$\boxed{\quad Actionnaires \quad \underset{Option\ sur\ le\ P/L\ du\ portefeuille}{\Longrightarrow} \quad Equipes\ de\ Trading \quad}$$

Rappelons que la prime d'une option est, toutes choses égales par ailleurs, d'autant plus importante que la volatilité du sous-jacent (le caractère plus moins risqué du sous-jacent) est importante. Ceci tient au caractère asymétrique du profil de gain (payoff) d'une option qui garantie à son détenteur une participation à la hausse du sous-jacent tout en le protégeant contre une baisse.

Cette option n'est pas équitable car le sous-jacent (le portefeuille de trading) est contrôlé par les équipes de prop-trading qui précisément gèrent ce portefeuille et peuvent donc en modifier le profil de risque (à la hausse) de façon à accroître la valeur de l'option au détriment de l'actionnaire (la prime étant calculée sur un niveau de risque moindre).

Cette situation constitue un cas manifeste de conflit d'intérêt au détriment des actionnaires des banques (qui assument les pertes) et au bénéfice des équipes de trading (qui ne sont pas mis à contribution en cas de perte).

Comment Rétablir une « Equité » de Traitement ?

La solution mise en place pour gérer cette double problématique d'asymétrie d'information et de conflits d'intérêt consiste à réglementer et à contrôler avec un double objectif « théorique » :

1. Réduire et idéalement supprimer les risques « externes »
2. Concevoir des modèles plus précis et idéalement exacts de calcul des risques « internes »

Arguant que sous ces deux hypothèses, les deux problèmes évoqués précédemment ne se posent plus.

Mais le moins que l'on puisse dire avec le recul c'est que cette approche ne fonctionne pas.

Le **premier objectif** de suppression des risques externes est techniquement impossible à atteindre. Ce constat a d'ailleurs été officiellement validé lors de l'intégration dans la réglementation « Bâle 2 » en 2004 d'une contribution supplémentaire aux fonds propres réglementaires pour couvrir le risque opérationnel [30].

29. On suppose que le salaire fixe de la structure de rémunération « fixe + variable » est moins élevé que le salaire fixe de la structure de rémunération « fixe-only » équivalente du fait précisément de l'absence de partie variable. Ce differentiel de salaire fixe correspond à la prime de l'option « payée » par les équipes de trading pour compte propre des banques aux actionnaires des mêmes banques

30. Rappelons ici que la réglementation bancaire (Comité de Bâle, Banque des Réglements Internationaux) ne vise pas explicitement à protéger les actionnaires des banques mais plutôt les créanciers des banques contre des prises de risques excessives dans tous les métiers bancaires (et non uniquement dans le métier « banque de financement et d'investissement »)

La solution consisterait à réduire non pas les risques pris mais l'asymétrie d'information quant aux risques pris.

Il faudrait donc réformer la réglementation en matière d'information légale à fournir aux actionnaires pour obliger les banques à plus de transparence sur leurs activités de trading pour compte propre en divulgant des informations précises sur ces activités (nature et quantification des risques « externes »), sur les engagements correspondants au bilan et au hors bilan (nature et quantification des risques « internes ») ainsi que sur la contribution des ses activités aux résultats des banques (P/L et coûts de la structure).

Le **deuxième objectif** consiste en pratique à développer des modèles de calcul des risques suffisamment forts de sorte qu'ils n'offrent pas de « backdoors » aux équipes de trading. Cet objectif a été régulièrement mis en défaut lors des crises financières de ces 25 dernières années car à chaque crise les contrôles des risques des banques (organisations, méthodologies et modèles) ont été « upgradé » pour tenir compte des enseignements de la dernière crise mais jamais de celle à venir.

La stratégie consistant à accroître les efforts de R&D au sein des banques et des universités, le niveau de formation en mathématique des futurs professionnels des risques financiers (quants) et les moyens mis à disposition des équipes de contrôle des risques est-elle la bonne ? N'y a-t-il pas une raison plus prosaïque que le sempiternel « manque de moyens » à ce problème récurrent ?

Il faut bien dire ici que les contrôles des risques des banques n'ont jamais « fait le poids » face aux équipes de prop-trading. Bien que les managements des banques s'en défendent publiquement lorsqu'ils sont interrogés sur ce thème, les équipes de prop-trading en tant que « profit center » ont très souvent gain de cause en cas de conflit sur un calcul de valorisation ou un calcul de risque face aux équipes de contrôle et de calcul des risques qui eux sont considérés comme des « cost center ». Si il y a problème ce n'est probablement pas un problème de moyens mais très certainement un problème de management. Les dirigeants des banques sont incités du fait de la structure de leur rémunération et des modalités de leur nomination à privilégier les profits à court terme au détriment des risques à long terme.

Une solution à ce problème consisterait à aligner le traitement des dirigeants sur ceux des actionnaires de long terme[31].

Les modalités précises sont évidemment discutables mais il me semble que la partie variable de la rémunération des dirigeants de banques devrait être exclusivement versée en actions des banques qu'ils dirigent et la cession de ces actions ne pourrait être réalisée qu'au terme de leur mandat avec un délai de carence de plusieurs années. Cet « alignement » du traitement des dirigeants sur ceux des actionnaires les obligerait à adopter un style de gestion plus équilibré entre profits à court terme (trading pour compte-propre) et risques à long terme (contrôle des risques).

31. Partant du principe que l'argument avancé pour les professionnels du trading pour compte propre (marché mondial très concurrentiel) ne s'applique en aucun cas aux dirigeants des grandes banques (marchés nationaux cloisonnés et faiblement concurrentiels)

Bibliographie Indicative

Les références bibliographiques sont directement inclues dans le corps du texte.

Cette bibliographie indicative est une sélection de livres et de documents qui m'ont pour la plupart accompagné dans mon parcours professionnel et dont ce polycopié est en partie redevable.

Ouvrages Généraux

Demarolle A. & Quinet A. (1996), Economie des Taux d'Intérêt, Presses Universitaire de France

Fage P. (1986), Yield Calculations, CSFB Research

Finacor (1990), Arbitrages, Vous avez dit Arbitrage, Equipe Courtage Marchés Monétaires Internationaux, Document Interne (Finacor)

Lévy-Lang A. (2006), L'Argent, la Finance et le Risque, Odile Jacob

Martellini L. & Priaulet P. (2004), Les Produits de Taux d'Intérêts, Economica

Nicholas J.G. (2000), Market Neutral Investing, Bloomberg Professional Library

Poncet P., Portrait R. & Hayat S. (1996), Mathématiques Financières, Dalloz

Tuckman B. (2002), Fixed Incomes Securities, John Wiley & Sons

Wong M.A. (1993), Fixed Income Arbitrage: Analytical Techniques and Strategies, John Wiley & Sons

Ouvrages Spécialisés

Bennani K. & Bertrand J.C. (1998), Les Obligations à Taux Variables, Economica (Collection Gestion)

Bertier P. & Bouroche J.M. (1981), Analyse des Données Multi-Dimensionnelles, Presses Universitaires de France

Bluhm C., Overbeck L. & Wagner C. (2002), An Introduction to Credit Risk Modeling, Chapman & Hall/CRC

Calamos N.P. (2003), Convertible Arbitrage: Insights and Techniques for Successful Hedging, John Wiley & Sons

Caouette J.B., Altman E.I. & Narayanan P. (1998), Managing Credit Risk: The Next great Financial Challenge, John Wiley & Sons, Inc.

Chazot C. & Claude P. (1999), Les Swaps : Concepts et Applications, Economica (Collection Gestion)

Colmant B. & Delfosse V. (2005), Les Obligations Convertibles, Larcier Ed. (Cahiers Financiers)

Davidson S.A., Herskovitz A.D. (1993), Mortgage-Backed Securities: Investment Analysis & Advanced Valuation Techniques, Probus Professional

Gorrod M. (2004), Risk Management Systems: Process, Technology and Trends, Palgrave MacMillan

Jorion P. (2001), Value at Risk, McGraw-Hill

JP Morgan (1999), The J.P. Morgan Guide to Credit Derivatives, RISK Publications

Koskas D. (1990), Comprendre un Bilan, Village Mondial

Marteau D. et Dehache D. (2001), Les Produits Dérivés de Crédit, Editions ESKA

Mina J. & Xiao J.Y. (2001), Return to RiskMetrics: The Evolution of a Standard, RiksMetrics Group

Roure F. (1988), Les Mécanismes du MATIF, Les Editions d'Organisation

Roure F. & Butery A. (1989), Les Options Négociables, Presses Universitaires de France

Thauvron A. (2005), Evaluation d'Entreprise, Economica