

## Chapitre 1

# Couvertures Factorielles Zéro-Coupon

Ce premier chapitre présente les techniques de couverture zéro-coupon multi-factorielles des portefeuilles taux. Par portefeuille taux on entend tout portefeuille constitué d'instruments cash ou dérivés, fermes ou optionnels et dont l'évolution dépend directement des taux zéro-coupon Etat (ce qui n'exclut d'ailleurs pas les obligations corporates). Pour des raisons pratiques, nous nous plaçons cependant dans le cadre simple de portefeuilles obligataires Etat à taux fixes. Nous commençons par décrire notre problème et présentons les techniques de couverture en sensibilité zéro-coupon mono-factorielle (shift). Nous explicitons ensuite les fondements théoriques et empiriques des approches factorielles de modélisation de la dynamique des courbes de taux zéro-coupon Etat. Ces fondements légitiment les techniques de couvertures multi-factorielles (en général les trois premiers facteurs : shift, twist et butterfly) utilisées entre autre par les market-makers et les gérants obligataires. Les techniques de couvertures multi-factorielles zéro-coupon et le Value-at-Risk paramétrique partagent le même cadre théorique sous-jacent (facteurs de risque gaussiens multi-variés). Après avoir détaillé le calcul d'une couverture par minimisation du Value-at-Risk paramétrique (VaR Best Hedge), on montrera que la couverture multi-factorielle zéro-coupon est une approximation de ce VaR Best Hedge. Enfin, on terminera ce chapitre par l'exposé de la méthode de couverture dite par « time buckets » qui est une couverture locale et de proche en proche (technique du bootstrap) qui nous permettra de conclure sur quelques remarques d'ordre générales et comparatives sur les techniques de macro-couverture.

### 1.1 Couverture Mono-Factorielle

La couverture mono-factorielle n'est rien d'autre qu'une couverture en sensibilité zéro-coupon d'un instrument financier par un autre. Dans cette première section nous commençons par rappeler ce qu'est un taux zéro-coupon, comment il se justifie économiquement et en quoi il est un concept central en finance de marché. On décrit ensuite la technique de couverture mono-factorielle (hedge ratio) ainsi que les limites de ce type de couverture.

#### 1.1.1 Zéro-Coupon (Rappels)

On appelle « zéro-coupon » (sans risque) un titre qui « paye » uniquement un Euro dans  $t$  années (de façon certaine).

L'échéancier de cashflows de ce zéro-coupon (cf. Graphique 1.1) est particulièrement simple puisqu'il ne comprend que deux cashflows :

- Le cashflow « sortant » qui correspond à la somme payée par l'investisseur en date 0 (aujourd'hui)
- Le cashflow « rentrant » qui correspond à la somme reçue par l'investisseur à la date (future)  $t$

On se place ici du point de (la trésorerie de) l'investisseur (le prêteur).

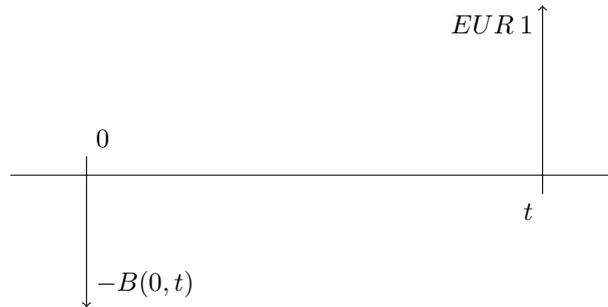


FIG. 1.1 – Cashflows d'un zéro-coupon

**Pour cet investissement qui lui rapporte 1 Euro dans  $t$  années, quel va être le prix payé par l'investisseur en date 0 ?** Si le prix réellement payé dépend des conditions de marché, on peut néanmoins avancer que ce prix est en toute logique inférieur à 1 Euro.

Les deux raisons couramment avancées dans la littérature économique pour justifier cette inégalité sont :

1. La préférence pour le présent qui veut qu'un agent « rationnel » préfère recevoir 1 Euro aujourd'hui à un Euro dans  $t$  années (a fortiori si  $t$  est grand) de sorte que le montant que notre investisseur est prêt à se déssaisir aujourd'hui pour récupérer 1 Euro dans  $t$  années est strictement inférieur à 1 Euro
2. La croissance économique qui veut que le montant reçu par l'emprunteur va être réinvesti « dans l'économie » sur la durée du prêt et croître en moyenne au même rythme que cette économie sur cette période<sup>1</sup>

Il est donc possible de définir le taux d'intérêt  $z(0, t)$  du prêt « zéro-coupon » précédent départ 0 et durée  $t$ , comme le taux à appliquer au :

- Montant initial prêté  $B(0, t)$  pour retrouver l'Euro reçu en  $t$  (capitalisation)
- Montant de 1 Euro reçu en  $t$  pour retrouver le montant initial prêté  $B(0, t)$  (actualisation)

Par « appliquer », on désigne la convention de calcul à utiliser en pratique qui intègre le taux d'intérêt (annualisé) et la durée du prêt en années. Si le taux  $z(0, t)$  est en convention « taux continus »<sup>2</sup>, la valeur actuelle d'1 Euro dans  $t$  années (qui correspondait précisément à la valeur de marché de ce zéro-coupon), s'écrit :

$$B(0, t) = e^{-t \times z(0, t)}$$

1. Dans un monde neutre au risque, le taux d'intérêt (réel) sans risque doit être égal au taux de croissance (réel) de l'économie

2. Les trois principales conventions de taux sont monétaires, actuarielles et continu, elles seront étudiées au Chapitre 2

Le taux  $z(0,t)$  ou plus simplement  $z_t$  de ce « zéro-coupon » est appelé taux zéro-coupon pour la maturité  $t$ .

La donnée des taux zéro-coupon pour les maturités croissantes  $t_1 < t_2 < \dots < t_N$  est appelée courbe des taux zéro-coupon. En pratique, les taux zéro-coupon pour des maturités  $t \neq t_i$  ( $i=1\dots N$ ) sont calculés par interpolation à partir des taux existants.

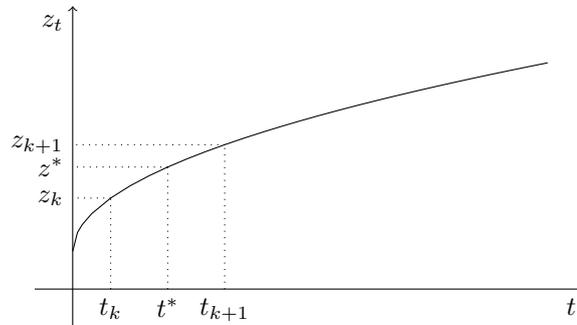


FIG. 1.2 – Courbe des taux zéro-coupon

Les taux zéro-coupon Etat (cf. chapitre 3) et Swap (cf. chapitres 2 & 5) sont les « briques de base » du pricing des produits financiers en général et des produits de taux en particulier que les cashflows soient certains (cas des obligations à taux fixes) ou incertains (cas de la plupart des produits dérivés, structurés ou hybrides)<sup>3</sup>.

### 1.1.2 Couverture Mono-Factorielle

On décrit dans ce premier paragraphe le problème de couverture en sensibilité « zéro-coupon » d'un portefeuille obligataire (couverture contre les mouvements uniformes de la courbe des taux).

Afin de simplifier l'exposé mais sans perte de généralité on fait les deux hypothèses suivantes :

1. On est long d'un portefeuille d'obligations en Euros émises par un Etat souverain AAA. Ce portefeuille peut être analysé comme un échéancier de cashflows dont on connaît avec certitude les montants et les dates de versements.
2. Les cashflows tombent sur des dates (ou plutôt des durées) fixes constituant un échéancier de référence pour les vecteurs de sensibilités zéro-coupons ainsi que pour les facteurs de risques.

On note :

- Date générique de l'échéancier :  $t_i$
- Cashflow générique :  $CF_i$
- Taux ZC continue de maturité  $t_i$  :  $z_i$

Si l'on suppose que l'échéancier de référence est constitué de  $N$  dates ou durées ( $i=1\dots N$ ), la valeur actuelle  $V$  de notre portefeuille pricée dans la courbe des taux zéro-coupon s'écrit :

$$V = \sum_{i=1}^N V_i \quad \text{avec} \quad V_i = CF_i \times \exp(-z_i \times t_i)$$

3. La connaissance de ses taux est donc indispensable pour réaliser tout calcul de pricing et par extension tout calcul de risques sur les produits de taux que nous allons traiter dans ce cours. Les méthodes de calcul des taux zéro-coupon à partir des taux des instruments cotés sur le marché (obligations et swaps principalement) sont présentées au Chapitre 3

On appelle vecteur des sensibilités zéro-coupon  $S_{ZC}$  le vecteur des sensibilités  $S_{ZC,i}$  correspondants à chacun des cashflows  $CF_i$  :

$$S_{ZC} = \begin{bmatrix} S_{ZC,1} \\ \vdots \\ S_{ZC,N} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad S_{ZC,i} = \frac{dV_i}{dz_i}$$

Tout scenario de déformation de la courbe des taux zéro-coupon  $\Delta z$  s'écrit sous forme vectorielle :

$$\Delta z = \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \vdots \\ \Delta z_N \end{bmatrix}$$

$\Delta z_i$  est la variation du taux zéro-coupon de maturité  $t_i$  sur la période de temps considérée<sup>4</sup>.

On appelle mouvement uniforme de la courbe des taux zéro-coupon (shift), les scénarios pour lesquels les variations individuelles de chaque taux zéro-coupon sont identiques et égales à  $\alpha$  :

$$\Delta z = \alpha \times \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Pour un mouvement uniforme d'amplitude  $\alpha$  de la courbe des taux zéro-coupon, la variation de la valeur actuelle de notre portefeuille obligataire  $\Delta V$  est égale à :

$$\Delta V = S_{ZC}^* \times \alpha$$

$S_{ZC}^*$  est la sensibilité zéro-coupon (totale) du portefeuille obligataire :

$$S_{ZC}^* = \langle S_{ZC} | 1_N \rangle \quad \text{avec} \quad 1_N = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Considérons maintenant une obligation de couverture dont le prix zéro-coupon unitaire (pour EUR 1 de nominal) est  $P_0$ , le vecteur de sensibilité zéro-coupon  $S_{ZC,0}$  et la sensibilité zéro-coupon totale  $S_{ZC,0}^*$ .

Supposons que l'on vende cette obligation pour un montant nominal  $N_0$  alors le vecteur de sensibilité zéro-coupon du portefeuille couvert  $S_{ZC,H}$  s'écrit :

$$S_{ZC,H} = S_{ZC} - N_0 \times S_{ZC,0}$$

4. Exemple: overnight ou 1 jour ouvré

La variation de valeur du portefeuille couvert pour un scénario quelconque  $\Delta z$  de déformation de la courbe des taux zéro-coupon s'écrit (en première approximation) :

$$\Delta V_H = \langle S_{ZC} - N_0 \times S_{ZC,0} | \Delta z \rangle$$

On appelle couverture zéro-coupon du portefeuille obligataire<sup>5</sup>, le montant nominal  $N_0$  d'obligations de couverture qu'il faut vendre pour couvrir notre portefeuille obligataire contre un scénario de shift.

En remplaçant  $\Delta z$  par sa valeur spécifique dans l'équation ci-dessus et en égalisant à zéro on trouve :

$$N_0 = \frac{S_{ZC}^*}{S_{ZC,0}^*}$$

Par construction, ce type de couverture n'est efficace que pour des mouvements uniformes parallèles de la courbe des taux zéro-coupon (shift). Pour un déplacement non uniforme de la courbe des taux zéro-coupon (cf. Graphique 1.3), une couverture mono-factorielle (Shift) n'est plus efficace par construction.

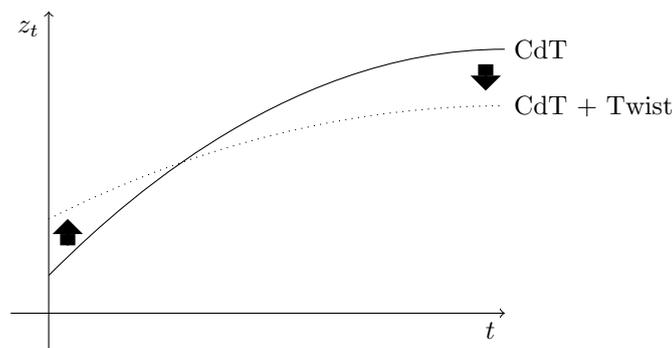


FIG. 1.3 – Déplacement Non Uniforme de la CdT ZC (Twist)

Une bonne couverture se doit d'être efficace pour tous les facteurs prépondérants de déformation de la courbe des taux zéro-coupon d'où la nécessité d'identifier ces facteurs autant d'un point de vue théorique qu'empirique.

## 1.2 Couvertures Multi-Factorielles

Dans cette section nous allons présenter les couvertures multi-factorielles zéro-coupon d'un point de vue théorique dans un premier temps (modèle de Vasicek), puis d'un point de vue empirique (détermination des facteurs de déformation d'une courbe de taux zéro-coupon à partir de données de marchés) et enfin pratique (calcul de la couverture).

<sup>5</sup>. Cette couverture « zéro-coupon » est une version moderne de la classique couverture en « duration » bien connue des gérants obligataires

### 1.2.1 Modèle de Vasicek : Aspects Formels

Le modèle de Vasicek<sup>6</sup> est le plus connu des modèles d'équilibre de la courbe des taux zéro-coupon. Sa popularité tient à sa (relative) simplicité mais aussi et surtout aux nombreux travaux empiriques qui ont validés ses conclusions<sup>7</sup>. Nous allons dans ce paragraphe nous contenter de rappeler dans les grandes lignes les hypothèses et les résultats du modèle.

On fait l'hypothèse que le taux sans risque instantané  $r_t$  (unique source d'incertitude du modèle) suit un processus stochastique d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$dr_t = \alpha \times (\beta - r_t) \times dt + \sigma \times dW_t$$

La dynamique du taux sans risque instantané  $r_t$  décrite par l'équation différentielle stochastique précédente est la résultante de deux composantes :

1. Une composante déterministe qui suit un processus de « retour à la moyenne » de vitesse  $\alpha$  et de moyenne  $\beta$ .
2. Une composante stochastique qui suit un processus dit de Ito ( $r_{t+h} - r_t$  suit une gaussienne de moyenne nulle et de variance  $h \times \sigma^2$ )

On se propose de calculer le prix  $B(T)$  d'une obligation zéro-coupon de date valeur 0 et de date de maturité  $T$ .

Dans le cadre de la théorie de l'évaluation des actifs financiers sous probabilité risque-neutre (risk-neutral pricing), le prix de ce zéro-coupon s'écrit :

$$B(T) = E_Q \left[ e^{-\int_0^T r(s) ds} \right]$$

Soit  $z(T)$  le taux zéro-coupon de l'obligation zéro-coupon précédente, on a par définition du taux zéro-coupon :

$$B(T) = e^{-T \times z(T)}$$

La solution du modèle de Vasicek permet de définir la courbe des taux zéro-coupon en fonction des paramètres du processus stochastique qui régit la dynamique du taux sans risque instantané :

$$z(T) = z_\infty + (r_0 - z_\infty) \times \frac{\phi(T)}{T} + \frac{\sigma^2}{4\alpha^3} \times \frac{\phi(T)}{T} \quad \text{avec} \quad \phi(\tau) = \frac{1 - e^{-\alpha \times \tau}}{\alpha}$$

Les taux zéro-coupon aux deux extrémités de la courbe des taux sont :

$$z_0 = \lim_{T \rightarrow 0} z(T) = r_0 \quad (\text{Taxe CT})$$

et

$$z_\infty = \lim_{T \rightarrow +\infty} z(T) = \beta - \frac{\sigma^2}{2 \times \alpha^2} \quad (\text{Taxe LT})$$

On a donc trois facteurs explicatifs de la forme de la courbe des taux :

1. Le taux CT :  $r_0$

6. Vasicek O. (1977), « An Equilibrium Characterization of the Term Structure », Journal of Financial Economics (Vol. 5)

7. Voir sur ce sujet l'article de Chan K.C., Haroly G.A., Longstaff F.A., Sanders A.B. (1992), « An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short Term Interest Rate », Journal of Finance (Vol. 47)

2. La pente:  $r_0 - z_\infty = s$
3. La convexité:  $\sigma$

Dans le cadre du modèle de Vasicek, la valeur actuelle de notre portefeuille calculée dans la courbe des taux zéro-coupon s'écrit :

$$V = \sum_{i=1}^N CF_i \times B_i(z_\infty, s, \sigma^2) \quad \text{avec} \quad B_i(z_\infty, s, \sigma^2) = e^{-t_i \times B_i(z_\infty, s, \sigma^2; t_i)}$$

Calculons les sensibilités de notre portefeuille par rapport à chacun de ces trois facteurs. On trouve :

$$\frac{\partial V}{\partial z_\infty} = \sum_{i=1}^N S_{ZC,i} \times \frac{t_i}{t_i} = \langle S_{ZC} | Shift \rangle$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \sum_{i=1}^N S_{ZC,i} \times \frac{\phi(t_i)}{t_i} = \langle S_{ZC} | Twist \rangle$$

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma^2} = \sum_{i=1}^N S_{ZC,i} \times \frac{1}{4\alpha^3} \frac{\phi^2(t_i)}{t_i} = \langle S_{ZC} | Butterfly \rangle$$

Les facteurs de Shift, Twist et Butterfly sont les trois facteurs « implicites » de déformation de la courbe des taux zéro-coupon du modèle de Vasicek :

1. Shift : Mouvement parallèle uniforme
2. Twist : Mouvement de pentification
3. Butterfly : Mouvement de torsion

Le graphique 1.4 ci-dessous permet de visualiser la forme de ces facteurs théoriques de déformation de la courbe des taux zéro-coupon.

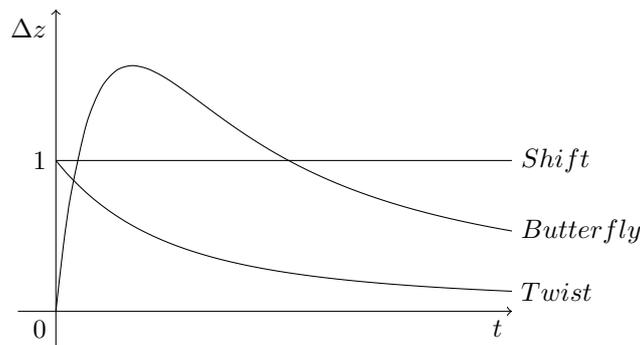


FIG. 1.4 – Facteurs de déformation de la CdT ZC (Vasicek)

Le fait que ces trois facteurs permettent de « reproduire » assez fidèlement l'ensemble des déformations observées des courbes de taux zéro-coupon (notamment dans le cas Français) explique le succès rencontré par ce modèle auprès des professionnels. Deux approches sont couramment utilisées pour « extraire » les facteurs de déformation de la courbe des taux zéro-coupon :

1. L'approche paramétrique consiste à estimer les paramètres du modèle de Vasicek  $(r_0, z_\infty, \sigma)$  sur des données de marchés

2. L'approche non paramétrique consiste à extraire les facteurs (implicites) à partir de données de marchés sans présupposé théorique sous-jacent

C'est cette seconde approche que nous allons décrire dans le paragraphe qui suit.

### 1.2.2 Modèle de Vasicek : Validation Empirique

L'application de l'analyse en composantes principales (ACP) aux vecteurs de variations des taux zéro-coupon observés sur une période donnée permet d'extraire les facteurs empiriques qui expliquent le mieux (au sens de la variance) les co-mouvements des taux zéro-coupon de maturités différentes.

La première application de l'ACP à l'étude des facteurs de déformation des courbes de taux zéro-coupon est à mettre au crédit de Litterman R. et Scheinkman J.<sup>8</sup>. Leur méthodologie a été ensuite appliquée par d'autres chercheurs sur des courbes de taux et des périodes différentes. Ce paragraphe est adapté de Bennani K et Bertrand J.C.<sup>9</sup> qui ont appliqué cette méthodologie au marché Français sur la période 1988- 1997 (cf. p.72-76)<sup>10</sup>.

Soit  $\Delta z_{t,t+1}$  le vecteur des variations des taux zéro-coupon observées sur la période  $[t, t+1]$  :

$$\Delta z_{t,t+1} = \begin{bmatrix} \Delta z_{1;t,t+1} \\ \vdots \\ \Delta z_{N;t,t+1} \end{bmatrix}$$

$\Delta z_{i;t,t+1}$  est la variation du taux zéro-coupon de maturité  $t_i$  sur la période de temps considérée (exemple : overnight ou 1 jour ouvré).

On définit la dispersion du vecteur aléatoire  $\Delta z$  par rapport à une droite de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^N$  engendrée par le vecteur directeur  $v$  par :

$$d_v(\Delta z) = v^t \Sigma v$$

$\Sigma$  est la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire  $\Delta z$ . Ainsi, la dispersion de  $\Delta z$  par rapport au  $i$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^N$  est simplement la variance du taux de maturité  $t_i$ .

L'idée sous-jacente de l'ACP est de trouver un ensemble d'axes principaux qui expliquent le maximum de variance. Mathématiquement, il s'agit donc de résoudre le problème de maximisation suivant :

$$\max_{\|v\|=1} d_v(\Delta z)$$

On montre que ce problème est équivalent à trouver les vecteurs et valeurs propres de la matrice  $\Sigma$ <sup>11</sup>. Le vecteur  $v$  cherché est simplement le vecteur propre  $v_1$  associé à la plus grande valeur propre  $\lambda_1$  de la matrice  $\Sigma$ .

8. R. & Scheinkman J. (1991), « Common Factors Affecting Bond Returns », Journal of Fixed Income, 1

9. Bennani K., Bertrand J.C. (1998), Les Obligations à Taux Variables, Economica

10. On pourra consulter l'ouvrage de Bertier P., Bouroche J.M. (1981), Analyse des Données Multi-Dimensionnelles, Presses Universitaires de France (ed.), pour un exposé rigoureux et complet des techniques classiques d'analyse des données en général et de l'ACP en particulier

11.  $\Sigma$  est symétrique définie positive donc diagonalisable.

Les vecteurs  $(v_1, v_2, \dots, v_N)$  forment une base orthogonale de vecteurs propres de la matrice  $\Sigma$  associés aux valeurs propres  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ . On suppose que ces vecteurs propres sont ordonnés par valeurs propres décroissantes :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$$

On définit enfin le pourcentage  $\theta_i$  de la variance totale expliquée par le  $i$ -ème vecteur propre par :

$$\theta_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^N \sigma_j^2} = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^N \lambda_j} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^N \theta_i = 1$$

L'ACP permet de décrire la dynamique de la courbe des taux zéro-coupon par le sous-ensemble des  $p$  premiers facteurs qui contribuent le plus à la variance totale.

Bennani K et Bertrand J.C. ont appliqué cette méthode aux taux Etat Français sur la période 1988-1997. Les résultats obtenus sont conformes à ceux obtenus par ailleurs par Litterman R. et Scheinkman J. et par d'autres chercheurs après eux. Trois facteurs expliquent 99% de la variance totale : le shift, le twist et le butterfly. Ces facteurs empiriques sont qualitativement identiques aux facteurs théoriques du modèle de Vasicek.

Le graphique 1.5 ci-dessus permet de visualiser la forme de ces facteurs empiriques de déformation de la courbe des taux zéro-coupon. On peut aussi y lire le pourcentage de la variance totale expliquée par chacun des facteurs.

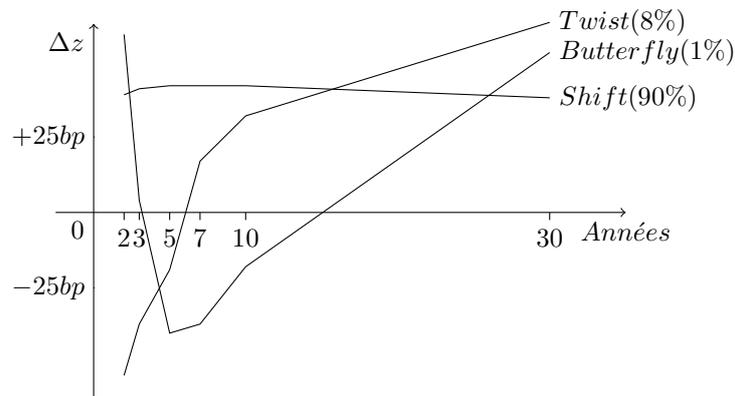


FIG. 1.5 – Facteurs de déformation de la Cdt ZC (ACP)

Sans surprise, le Shift (mouvement parallèle uniforme de la courbe des taux) explique en grande partie (90%) la variance totale des variations de la courbe des taux zéro-coupon considérée. Ce chiffre relativement élevé s'explique par deux arguments de natures différentes :

- D'une part, le faible nombre de maturités prises en compte dans la courbe des taux ( $N=6$ )
- D'autre part, les politiques de lutte contre l'inflation qui ont permis de faire baisser significativement les taux d'intérêts sur toutes maturités (sur la période d'étude)

Il paraît évident que la même étude réalisée sur un plus grand nombre de maturités et sur la période postérieure à la création de l'Euro devrait aboutir une plus grande importance du twist au détriment du shift. Cette spécificité du Shift explique le succès des techniques de couvertures mono-factorielle qu'elles soient « zéro-coupon » ou plus classiquement « actuarielles » (couverture en durée).

Néanmoins, l'efficacité des couvertures « zéro-coupon » mono-factorielles peut être significativement améliorée par l'introduction de facteurs supplémentaires.

### 1.2.3 Couvertures Multi-Factorielles

Reprenons le problème de couverture de notre portefeuille tel que nous l'avons décrit au début ce chapitre. Nous allons cette fois le couvrir contre les trois facteurs principaux de déformation de la courbe des taux zéro-coupon décrits ci-dessus. Afin de simplifier l'exposé, on notera ces facteurs  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ .

On se donne trois obligations de couverture  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  dont les vecteurs de sensibilité zéro-coupon sont respectivement  $S_{ZC,-1}$ ,  $S_{ZC,-2}$  et  $S_{ZC,-3}$ . Supposons que l'on vende des montants nominaux  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  des obligations de couverture respectives  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$ . Le vecteur de sensibilité zéro-coupon du portefeuille couvert  $S_{ZC,H}$  s'écrit :

$$S_{ZC,H} = S_{ZC} - \sum_{k=1}^3 N_{-k} \times S_{ZC,-k}$$

La variation de valeur du portefeuille couvert pour un scénario quelconque  $\Delta z$  de déformation de la courbe des taux zéro-coupon s'écrit maintenant :

$$\Delta V_H = \left\langle S_{ZC} - \sum_{k=1}^3 N_{-k} \times S_{ZC,-k} \middle| \Delta z \right\rangle$$

On appelle couverture multi-factorielle du portefeuille obligataire, les montants nominaux  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  des obligations de couverture respectives  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  qu'il faut vendre pour couvrir notre portefeuille obligataire contre les facteurs  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  de déformation de la courbe des taux zéro-coupon.

Le problème consiste donc à trouver  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  qui vérifient la contrainte de couverture précédente pour le sous-espace vectoriel des variations des taux zéro-coupon engendré par les facteurs  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  :

$$\Delta z = \sum_{i=1}^3 \Delta z_i \times f_i \quad \text{avec} \quad \Delta z_i \in \mathbb{R}$$

En remplaçant  $\Delta z$  par sa valeur dans la contrainte de couverture, en développant l'expression obtenue puis en factorisant par rapport aux scalaires  $\Delta z_i$  ( $i=1\dots 3$ ) on trouve :

$$\Delta V_H = \left\langle S_{ZC} - \sum_{k=1}^3 N_{-k} \times S_{ZC,-k} \middle| f_i \right\rangle \times \Delta z_i$$

La condition nécessaire et suffisante pour que  $\Delta V_H$  soit nul pour tout  $\Delta z$  tels que définis ci-dessus s'écrit :

$$\left\langle S_{ZC} - \sum_{k=1}^3 N_{-k} \times S_{ZC,-k} \middle| f_i \right\rangle = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3$$

En développant ces trois expressions et en factorisant par rapport aux montants nominaux cherchés  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  on trouve un système linéaire de trois équations à trois inconnues :

$$\sum_{k=1}^3 N_{-k} \times \langle S_{ZC,-k} | f_i \rangle = \langle S_{ZC} | f_i \rangle \quad \text{pour } i = 1, 2, 3$$

Ce système peut aussi s'écrire sous forme matricielle :

$$M_H \times N = S$$

avec les notations évidentes :

$$M_H = \begin{bmatrix} \langle S_{ZC,-1} | f_1 \rangle & \langle S_{ZC,-2} | f_1 \rangle & \langle S_{ZC,-3} | f_1 \rangle \\ \langle S_{ZC,-1} | f_2 \rangle & \langle S_{ZC,-2} | f_2 \rangle & \langle S_{ZC,-3} | f_2 \rangle \\ \langle S_{ZC,-1} | f_3 \rangle & \langle S_{ZC,-2} | f_3 \rangle & \langle S_{ZC,-3} | f_3 \rangle \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} N_{-1} \\ N_{-2} \\ N_{-3} \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} \langle S_{ZC} | f_1 \rangle \\ \langle S_{ZC} | f_2 \rangle \\ \langle S_{ZC} | f_3 \rangle \end{bmatrix}$$

Sous réserve que M soit inversible, la solution de ce système est donnée par :

$$N = M_H^{-1} \times S$$

M est inversible si et seulement si les vecteurs de sensibilité zéro-coupon des obligations de couvertures sont linéairement indépendants. Autrement dit, M est inversible si les profils de risque des obligations de couvertures sont significativement différents. D'un point de vue pratique, il suffit de prendre des obligations de maturités significativement différentes (CT, MT et LT) pour que M soit inversible.

Notons qu'en pratique, on couvre les portefeuilles taux avec des contrats Futures et non avec des obligations. Les coûts de transaction et les fourchettes « bid-ask » sont, en effet, moindres sur les marchés organisés que sur les marchés de gré-à-gré sur lesquels se négocient les obligations d'Etat. Il suffit donc de remplacer les profils de risque des obligations CT, MT et LT par les profils de risque des contrats futures correspondants obtenus à partir des relations d'arbitrage classiques de type « cash & carry »<sup>12</sup>. En gestion taux Euro, par exemple, on utilisera les contrats Bund, Bobl et Schatz de l'Eurex.

### 1.3 Couvertures « VaR Best Hedge »

Cette section montre comment utiliser le Value-at-Risk Paramétrique comme outil de couverture de portefeuilles multi-actifs et multi-devises<sup>13</sup>. Nous commençons par rappeler les

<sup>12</sup>. Cf. Chapitre 7

<sup>13</sup>. Cette partie est basée sur des recherches réalisées par l'auteur dans le cadre de ses fonctions chez Trema Group (cf. Leroy F. (2002), VaR Best Hedge: A Comparison of Value-at-Risk and Risk Factors-based hedging methods, R&D Working Paper, Trema Group)

principes de calcul du VaR paramétrique dans le cas général avant de restreindre l'analyse au cas des portefeuilles taux mono-devises (une seule courbe de taux). Il s'agit d'une restriction de pure forme puisque la nature des facteurs de risques n'intervient pas dans le calcul de la couverture optimale d'un portefeuille donné. Cette restriction nous permet de faire le lien entre cette couverture optimale au sens du VaR (que l'on appelle « VaR Best Hedge » dans la suite) et les couvertures zéro-coupon multifactorielles qui par nature ne s'appliquent qu'aux portefeuilles taux mono-devises. Nous montrons, en effet, que ces couvertures ne sont que des approximations du VaR Best Hedge dont la qualité dépend du pourcentage de la variance totale expliquée par les facteurs utilisés (shift, twist et butterfly).

### 1.3.1 Introduction au VaR Paramétrique

Par définition le Value-at-Risk (VaR) d'un portefeuille donné, est la perte maximale pour un intervalle de confiance  $\alpha$  donné (Le VaR est calculé à un horizon  $H$  et exprimé dans une devise CCY). En d'autres termes, on peut écrire :

$$\text{Proba} [\Delta V < -\text{VaR}] = 1 - \alpha$$

$\Delta V$  est la variation absolue du mark-to-market  $V$  du portefeuille entre aujourd'hui et l'horizon  $H$ .

Trois approches sont couramment utilisées pour le calcul du VaR<sup>14</sup> :

1. Paramétrique
2. Historique
3. Monte Carlo

L'approche paramétrique (qui seule nous intéresse ici) autorise un calcul simple et direct de l'écart-type  $\sigma_{\Delta V}$  de la variable aléatoire  $\Delta V$  à partir des deux hypothèses suivantes :

1. Le vecteur des returns  $r$  (sur les facteurs de risque) est un vecteur Gaussien de matrice de variances- covariances  $\Sigma$
2. La variation de valeur  $\Delta V$  du portefeuille est approximée (linéarisation) par le produit scalaire du vecteur des deltas  $\delta$  par le vecteur des returns  $r$ .

La valeur du portefeuille  $V$  s'écrit comme une fonction des facteurs de risques :

$$V = V(f_1, f_2, \dots, f_K)$$

En différenciant  $V$ , on obtient :

$$\Delta V \approx \sum_{k=1}^K \frac{\partial V}{\partial f_k} \times \Delta f_k = \sum_{k=1}^K \delta_k \times r_k$$

avec :

14. Ces techniques de calcul du VaR se sont développées à partir du milieu des années 90 lorsque les banques ont mis en conformité leurs méthodologies de suivie des risques de marchés et de calcul des fonds propres réglementaires (amendement de 1996 à l'accord Bâle 1 de 1988). Les VaR Historiques et Monte-Carlo sont deux exemples de « full-valuation » VaR dans le sens où les positions individuelles qui composent le portefeuille sont « repricées » à l'horizon  $H$  en utilisant les formules de pricing appropriées et des scénarios (historiques ou simulés) pour les facteurs de risques. Dans les deux cas, le VaR est estimé pour un intervalle de confiance  $\alpha$  donné à partir de l'histogramme des  $\Delta V$  (calculés à l'horizon  $H$  et exprimés dans une devise CCY). Le VaR Paramétrique nous intéresse ici pour ses accointances formelles avec les techniques de couverture multi-factorielles zéro-coupon

$$\delta_k = f_k \times \frac{\partial V}{\partial f_k} \quad \text{avec} \quad r_k = \frac{\Delta f_k}{f_k}$$

En notation vectorielle, on obtient :

$$\Delta V = {}^t \delta r$$

Si de surcroît, le vecteur des returns des facteurs de risques  $r$  vérifie :

$$r \longrightarrow \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

Alors, compte tenu des bonnes propriétés mathématiques des lois normales, on en déduit que :

$$\Delta V \longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_{\Delta V}^2) \quad \text{avec} \quad \sigma_{\Delta V} = \sqrt{{}^t \delta \Sigma \delta}$$

Connaissant l'écart-type  $\sigma_{\Delta V}$  de la variable aléatoire normale  $\Delta V$ , le VaR correspondant pour un intervalle de confiance  $\alpha$  s'écrit simplement comme :

$$VaR_\alpha = t_\alpha \times \sigma_{\Delta V}$$

$t_\alpha$  est un coefficient multiplicateur permettant de passer d'un VaR à 84% d'intervalle de confiance (1 écart-type) à un VaR à  $\alpha\%$  d'intervalle de confiance ( $t_\alpha$  écart-type). Par exemple,  $t_{95} \approx 1.65$ .

Nous avons utilisé les returns en pourcentage dans les formules de calcul du VaR. On utilise plus généralement des returns logarithmiques car ces derniers ont les propriétés empiriques les plus proches des lois normales. Dans la pratique, cela ne pose pas de problème puisque qu'il est possible de passer d'un type de return à un autre par l'approximation :

$$\ln \left( \frac{f_{k,1}}{f_{k,2}} \right) \simeq \frac{f_{k,1} - f_{k,2}}{f_{k,1}} \quad \text{pour} \quad \left| \frac{f_{k,1} - f_{k,2}}{f_{k,1}} \right| \text{ petit}$$

Dans la suite, nous allons restreindre l'analyse à des portefeuilles taux mono-devises<sup>15</sup>. Dans ce cadre, il est possible de calculer les deltas par rapport :

1. Aux variations absolues des taux zéro-coupon continus
2. Aux returns logarithmiques des prix des zéro-coupon

En effet, si la position est constituée d'un simple zéro-coupon de montant nominal  $N$ , de maturité  $T$  et dont le taux zéro-coupon est  $z_T$  alors le prix de ce zéro-coupon à la date  $t$  s'écrit :

$$V = N \times \rho_{t,T} \quad \text{avec} \quad \rho_{t,T} = e^{-(T-t) \times z_{t,T}}$$

On en déduit facilement les deux formules suivantes :

$$\Delta V_{t \rightarrow t+\Delta T} \simeq -V_t \times T \times \Delta z_{t \rightarrow t+\Delta T, T} \quad \text{et} \quad \Delta V_{t \rightarrow t+\Delta T} \simeq -V_t \times \frac{\Delta \rho_{t \rightarrow t+\Delta T, T}}{\rho_{t,T}}$$

En cohérence, la matrice de variance-covariances  $\Sigma$  doit être calculée (1) à partir :

1. Des variations absolues des taux zéro-coupons
2. Des returns logarithmiques des prix des zéro-coupons<sup>16</sup>

15. Le calcul de la couverture optimale au sens du VaR pour un portefeuille taux mono-devises que nous allons décrire ci-après se généralise directement à tout portefeuille multi-assets et multi-devises.

16. En vertu de l'approximation donnée précédemment

### 1.3.2 « VaR Best Hedge » : Notations et Définitions

Le VaR est une mesure globale du risque pour un portefeuille donné. Il est usuellement utilisé à des fins de comparaison inter-portefeuilles ou d'analyse intra-portefeuille. En d'autres termes, il s'agit toujours de calculer un VaR pour un portefeuille donné. Nous allons dans cette partie nous intéresser au problème « inverse », à savoir, trouver la couverture optimale au sens du VaR pour un portefeuille donné que l'on appellera VaR Best Hedge.

Soient donc  $P$  un portefeuille quelconque et  $\{P_n\}_{n=1\dots N}$  un ensemble de  $N$  instruments de couverture. On appelle portefeuille de couverture  $H_\lambda$  toute combinaison linéaire des instruments de couvertures :

$$H_\lambda = \sum_{n=1}^N \lambda_n \times P_n$$

$\lambda_n$  représente la « taille » (montant nominal) de la position pour l'instrument  $P_n$ . Tout vecteur  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$  donné représente un portefeuille de couverture  $H_\lambda$  et tout portefeuille de couverture  $H_\lambda$  peut être associé à un tel vecteur.

On définit le VaR Best Hedge du portefeuille  $P$  par le portefeuille de couverture  $\lambda^*$  solution du problème de minimisation suivant :

$$\min_{\lambda} VaR(P_\lambda) \quad \text{avec} \quad P_\lambda = P - \sum_{n=1}^N \lambda_n \times P_n$$

$P_\lambda(P - H_\lambda)$  est le portefeuille total incluant la position et couvrir ( $P$ ) ainsi que sa couverture ( $H_\lambda$ ).

L'existence d'une solution au problème de minimisation est garantie par les bonnes propriétés de la fonction qui à un vecteur  $\lambda \in \mathbb{R}^N$  associe le nombre réel  $VaR(P_\lambda)$  :

$$VaR(P_\lambda) \geq 0 \quad \text{pour} \quad \lambda \in \mathbb{R}^N$$

et

$$VaR(P_\lambda) \rightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad \|\lambda\| \rightarrow +\infty$$

En d'autres termes, il existe au moins un vecteur  $\lambda^* \in \mathbb{R}^N$  pour lequel  $VaR(P_\lambda)$  est minimal.

A titre d'exemple, nous allons illustrer le concept de VaR Best Hedge à l'aide d'un exemple simple dans lequel le nombre d'instruments de couverture est volontairement réduit à deux ( $N=2$ ).

Supposons donc que l'on souhaite couvrir un cashflow unique sur la maturité 3M par deux cashflows adjacents de maturités respectives 1M et 6M. En d'autres termes, on cherche à couvrir un « bullet » par un « barbell ». Pour simplifier, on travaille au niveau des market-values (et non au niveau des montants nominaux). On cherche donc  $\lambda^*$  pour lequel le VaR de notre position couverte (bullet plus barbell) est minimal.

Ce problème implique donc deux instruments de couverture (les cashflows 1M et 6M) et trois facteurs de risques (les cashflows 1M, 3M et 6M).

### 1.3.3 « VaR Best Hedge » : Aspects Formels

On considère une matrice de variance-covariances  $\Sigma$  de taille  $K \times K$  où  $K$  est le nombre de facteurs de risques considérés ( $K > N$ ). En vertu des définitions données au début de cette section, le VaR de notre portefeuille total  $P_\lambda$  est donc :

$$VaR(P_\lambda) = \sqrt{{}^t \delta \Sigma \delta}$$

Regardons comment s'écrit  $\delta_\lambda$  le vecteur des deltas du portefeuille  $P_\lambda$ . Puisque :

$$P_\lambda = P - \sum_{n=1}^N \lambda_n \times P_n$$

On a donc :

$$\delta_\lambda = \begin{bmatrix} \delta_{\lambda,1} \\ \vdots \\ \delta_{\lambda,K} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \delta_{\lambda,k} = \alpha_k - \sum_{n=1}^N \lambda_n \times \beta_{n,k}$$

et les notations suivantes :

- $\delta_{\lambda,k}$  est le delta du portefeuille couvert  $P_\lambda$  (pour le facteur de risque  $k$ )
- $\alpha_k$  est le delta du portefeuille initial  $P$  (pour le facteur de risque  $k$ )
- $\beta_{n,k}$  est le delta unitaire de l'instrument de couverture  $P_n$  (pour le facteur de risque  $k$ )

Puisque la fonction qui à  $x \in \mathbb{R}^+$  associe  $\sqrt{x}$  est monotone croissante, notre problème de minimisation peut être simplifié de la façon suivante :

$$\min_{\lambda} f(\lambda) \quad \text{avec} \quad f(\lambda) = {}^t \delta \Sigma \delta \quad \text{et} \quad f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

Nous savons en vertu des résultats de l'Analyse Mathématique que si  $\lambda^*$  est une solution de notre problème de minimisation alors  $\lambda^*$  doit vérifier :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \lambda_n} \right|_{\lambda=\lambda^*} = 0 \quad \text{pour} \quad n = 1 \dots N$$

Puisque  $f(\lambda)$  est quadratique, l'ensemble des équations précédentes constituent un système de  $N$  équations linéaires à  $N$  inconnues :  $\lambda_n$  ( $n=1 \dots N$ ). Ecrivons ce système à l'aide de la décomposition de  $\delta_\lambda$  donnée ci-dessus.

Nous pouvons réécrire  $f(\lambda)$  comme suit :

$$f(\lambda) = {}^t [\alpha + \beta \lambda] \Sigma [\alpha + \beta \lambda]$$

avec les notations suivantes :

- $\alpha$  est un vecteur de dimension  $K$
- $\beta$  est une matrice à  $K$  lignes et  $N$  colonnes
- $\lambda$  est un vecteur de dimension  $N$

On peut donc écrire :

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = 2^t \beta \Sigma [\alpha + \beta \lambda]$$

Le VaR Best Hedge  $\lambda^*$  du portefeuille P doit donc vérifier :

$$\left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda^*} = 0_N$$

Notre système de N équations à N inconnues s'écrit directement sous forme matricielle en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\lambda$  :

$${}^t \beta \Sigma [\alpha + \beta \lambda] = 0_N$$

Si la matrice  ${}^t \beta \Sigma \beta$  de dimension  $N \times N$  est inversible alors le VaR Best Hedge  $\lambda^*$  du portefeuille P est donné par :

$$\lambda^* = - [{}^t \beta \Sigma \beta]^{-1} \beta \Sigma \alpha$$

Une solution triviale à notre problème est obtenue lorsque  $\delta_\lambda$  est nul. Cette propriété est vérifiée si et seulement si :

$$\alpha = -\beta \times \lambda^*$$

Littéralement, cette équation signifie que le vecteur des deltas du portefeuille P peut être reproduit par une combinaison linéaire des vecteurs des deltas des N instruments de couverture (Propriété 1).

Cette propriété peut être obtenue dans les deux situations suivantes :

- Les cashflows du portefeuille P peuvent être reproduits par une combinaison linéaire des N instruments de couverture (Propriété 2)
- Le portefeuille P lui-même peut être reproduit par une combinaison linéaire des N instruments de couverture (Propriété 3)

On a les causalités évidentes suivantes :

$$\text{Propriété 3} \implies \text{Propriété 2} \implies \text{Propriété 1}$$

Ces couvertures que l'on peut qualifier de « parfaites » sont rarement envisageables dans le monde réel du fait de la complexité des portefeuilles à couvrir et des différences de fait entre ces portefeuilles (le plus souvent constitués de produits cash) et les instruments de couvertures usuels (produits dérivés).

Dans le monde réel donc, où les propriétés précédentes ne peuvent être reproduites, nous avons de bonnes chances de trouver une unique solution  $\lambda^*$  à notre système de N équations linéaires :

$$[{}^t \beta \Sigma \beta] \lambda^* = -\beta \Sigma \alpha$$

si et seulement si la matrice  ${}^t \beta \Sigma \beta$  est inversible.

La résolution d'un système d'équations linéaires est un problème mathématique bien connu. De nombreux algorithmes et librairies scientifiques ont été développées et sont à disposition des ingénieurs financiers. On pourra, par exemple, se référer à l'ouvrage classique de Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A. and Vetterling W.T.<sup>17</sup> pour plus d'information sur ce sujet.

Notons cependant que, d'un point de vue numérique, deux problèmes peuvent se poser lors de la résolution de tels systèmes :

1.  $\beta\Sigma\beta$  est théoriquement inversible mais les erreurs d'arrondi machine la rendent non inversible en pratique (auquel cas la procédure numérique échoue). On peut prévenir ce type de problème en choisissant des instruments de couverture  $\{P_n\}_{n=1\dots N}$  qui soient les plus indépendants possibles. Mathématiquement, on devra choisir les instruments  $\{P_n\}_{n=1\dots N}$  de sorte que  $\beta$  soit de plein rang ( $\text{rang}(\beta) = N$ )
2. L'accumulation des erreurs d'arrondi au cours du processus de résolution peut aboutir à une solution numérique erronée (ce problème est particulièrement sensible si  $N$  est grand). On peut prévenir ce type de problème en limitant autant que possible le nombre d'instruments de couvertures ( $N$  petit)

Notons que ces deux heuristiques sont cohérentes avec les pratiques en matière de couverture où l'on cherche effectivement à utiliser le plus petit nombre d'instruments possibles (pour limiter les coûts de transaction et les risques d'exécution) et à prendre des instruments ayant des profils de risques les plus différents possibles (afin d'accroître l'efficacité des couvertures).

Reprenons notre exemple numérique débuté au paragraphe 1.3.2.

Nous pouvons maintenant donner les valeurs numériques que nous allons utiliser pour notre exemple.

$$\Sigma = 10^{-5} \times \begin{bmatrix} 2.5 & 3.75 & 7.5 \\ 3.75 & 10 & 27 \\ 7.5 & 27 & 90 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Sigma$  est la matrice de variances-covariances (fictive) des returns logarithmiques quotidiens pour les zéro-coupons de maturités 1M, 3M et 6M.

Notre problème maintenant posé, nous allons calculer le VaR Best Hedge  $\lambda^* = (\lambda_1^* \lambda_2^*)$  de notre 1 cashflow 3M (pour un mark-to-market de EUR 1). Les valeurs exactes de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  qui minimisent le VaR de notre portefeuille couvert sont obtenues en appliquant la formule :

$$\lambda^* = - [{}^t\beta\Sigma\beta]^{-1} \beta\Sigma\alpha$$

Numériquement, on obtient :

$$\lambda_1^* = -0.8 \quad \text{et} \quad \lambda_2^* = -0.2333$$

En termes financiers, il est donc nécessaire d'être short de EUR 0.8 sur le 1M et de EUR 0.2333 sur le 6M (en mark-to-market) pour obtenir une couverture optimale « au sens du VaR » de notre cashflow 3M (pour un mark-to-market de EUR 1).

Le  $\text{VaR}_{1\sigma}$  du portefeuille couvert est approximativement de EUR 0.00265 à comparer à un  $\text{VaR}_{1\sigma}$  initial de EUR 0.01 pour le seul cashflow 3M.

Ceci représente une réduction du VaR de 73.5%.

17. Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A. and Vetterling W.T. (2002), Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press

### 1.3.4 « VaR Best Hedge » vs Couverture Multi-Factorielle

Dans cette dernière partie, nous allons montrer que les couvertures obtenues à l'aide des approches multi-factorielles zéro-coupon sont des approximations des couvertures de type VaR Best Hedge. De surcroît, la qualité de l'approximation dépend directement du pourcentage de la variance totale expliquée par les facteurs utilisés (shift, twist et butterfly).

Reprenons le problème de couverture tel que nous venons de le décrire mais en fixant cette fois le nombre d'instruments de couverture à trois ( $N=3$ ). On cherche donc :

$$\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)$$

unique solution du problème de minimisation suivant :

$$\min_{\lambda} f(\lambda) \quad \text{avec} \quad f(\lambda) = {}^t [\alpha + \beta\lambda] \Sigma [\alpha + \beta\lambda]$$

On suppose ici que la matrice de variances- covariances  $\Sigma$  est une matrice de dimension  $K$  dont les composantes  $\sigma_{T,T'}^2$ , sont les covariances entre  $\Delta z_T$  et  $\Delta z_{T'}$  où  $z_T$  est le taux continu d'un zéro-coupon de maturité  $T$ .

Depuis l'article fondateur de Litterman et Scheinkman (1991), de nombreuses études ont été réalisées afin de déterminer les principaux facteurs de déformation des courbes de taux zéro-coupon. Et à l'aide d'une analyse en composante principale sur les matrices de variances-covariances  $\Sigma$ . Les  $K$  facteurs  $\Delta f_k$  sont les vecteurs propres de la matrice  $\Sigma$  et les  $K$  valeurs propres  $\sigma_k^2$  sont les variances associées aux facteurs  $\Delta f_k$  :

$$\Sigma \times \Delta f_k = \sigma_k^2 \times \Delta f_k$$

Puisque que cette diagonalisation revient à effectuer un changement de base (on passe de la base canonique à la base constituée des vecteurs propres de la matrice  $\Sigma$ ), on a <sup>18</sup> :

$$\Sigma = P D^t P$$

$D$  est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les variances  $\sigma_k^2$  et  $P$  est la matrice de passage dont les colonnes sont les vecteurs propres  $\Delta f_k$ .

Ayant posé le problème, on peut maintenant réécrire  $f(\lambda)$  de la façon suivante :

$$f(\lambda) = {}^t [{}^t P [\alpha + \beta\lambda]] D^t P [\alpha + \beta\lambda]$$

Puisque  $D$  est une matrice diagonale dont le terme diagonal générique  $\sigma_k^2$  est la variance du facteur  $\Delta f_k$  et puisque la colonne  $n^o k$  de la matrice  $P$  est le vecteur propre  $\Delta f_k$  de la matrice  $\Sigma$  on peut donc écrire :

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 (\alpha + \beta\lambda | \Delta f_k)^2$$

Si l'on considère maintenant que seuls les trois premiers facteurs (shift, twist et butterfly) sont pertinents dans l'analyse des déformations de la courbe des taux zéro-coupon, on peut donc réécrire  $f(\lambda)$  en deux dans parties distinctes :

18. Les  $K$  vecteurs propres  $\Delta f_k$  ( $k=1\dots K$ ) forment une base orthonormée de  $\mathbb{R}^K$  :  $P^{-1} = {}^t P$ .

$$f(\lambda) = f_{\text{facteurs principaux}}(\lambda) + f_{\text{facteurs résiduels}}(\lambda)$$

avec :

$$f_{\text{Facteurs principaux}}(\lambda) = \sum_{k \in \{\text{Shift}, \text{Twist}, \text{Butterfly}\}} \sigma_k^2 \langle \alpha + \beta \lambda | \Delta f_k \rangle^2$$

De ce qui précède, on conclue logiquement qu'une « bonne » approximation du VaR Best Hedge peut être obtenue en résolvant le système de trois équations linéaires à trois inconnues ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) suivants :

$$\begin{cases} \langle \alpha + \beta \lambda | \Delta f_{\text{Shift}} \rangle & = 0 \\ \langle \alpha + \beta \lambda | \Delta f_{\text{Twist}} \rangle & = 0 \\ \langle \alpha + \beta \lambda | \Delta f_{\text{Butterfly}} \rangle & = 0 \end{cases}$$

Cette solution approchée n'est rien d'autre que la couverture obtenue par les méthodes zéro-coupon multifactorielles lorsque les facteurs sont calculés à partir de la matrice de variances-covariances  $\Sigma$  des variations des taux zéro-coupon.

## 1.4 Couverture par « Time Bucket »

Nous terminons ce chapitre sur les couvertures multifactorielles zéro-coupon par une présentation des techniques de couverture dite par « time bucket » qui sont des couvertures locales étendues globalement de proche en proche par la méthode du bootstrap<sup>19</sup>.

Le problème consiste à couvrir à l'aide d'obligations au pair donc de maturités entières un échéancier de cashflows  $E$  tombant sur des dates quelconques :

$$E = \{F_i\}_{i=1 \dots I}$$

On suppose que les cashflows  $F_i$  tombent à des dates non nécessairement entières  $t_i$  et qu'ils sont ordonnés par maturités croissantes :

$$t_i < t_{i+1} \quad (i = 1 \dots I - 1)$$

Nous allons procéder en trois étapes :

1. Projection ou « barbellisation » des cashflows individuels (bullet) sur les maturités entières adjacentes
2. Agrégation des nouveaux cashflows issus des barbells sur l'échéancier « au pair »
3. Calcul du portefeuille de couverture exact par la méthode du bootstrap

<sup>19</sup>. Pour les étudiants du Master IMAFA ayant suivi mon cours, cette section correspond à l'ancien exercice 4 (application des butterfly à la couverture d'un échéancier de cashflows)

## 1.4.1 « Barbellisation » d'un Zéro-Coupon (Cashflow)

On considère les trois cashflows suivants :

	Bullet	Gauche	Droite
Maturité	$T < t < T+1$	$T$	$T+1$
Montant	$F_t$	$F_T$	$F_{T+1}$
Taux Zéro-Coupon	$z_t$	$z_T$	$z_{T+1}$
Facteur d'Actualisation	$\rho_t$	$\rho_T$	$\rho_{T+1}$
Duration Modifiée	$D_t^{mod}$	$D_T^{mod}$	$D_{T+1}^{mod}$

TAB. 1.1 – Caractéristiques des Cashflows

On veut « barbelliser » le cashflow bullet sur les maturités adjacentes  $T$  et  $T+1$  de telle sorte que le synthétique constitué des deux cashflows adjacents ait les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} V_t = V_T + V_{T+1} & (\text{market value inchangée}) \\ S_t = S_T + S_{T+1} & (\text{sensibilité inchangée}) \end{cases}$$

avec :

$$V = F \times \rho \quad \text{et} \quad S = -F \times \rho \times D^{mod}$$

Par « barbelliser », on entend bien sûr « remplacer le cashflow existant sur la maturité  $t$  par deux cashflows sur les maturités adjacentes ( $T$  et  $T+1$ ) ».

Calculons les montants  $F_T$  et  $F_{T+1}$  qui respectent les deux contraintes ci-dessus.

En remplaçant  $V$  et  $S$  par leurs expressions respectives dans les deux propriétés ci-dessus, on trouve :

$$\begin{cases} F_t \times \rho_t & = F_T \times \rho_T + F_{T+1} \times \rho_{T+1} \\ F_t \times \rho_t \times D_t^{mod} & = F_T \times \rho_T \times D_T^{mod} + F_{T+1} \times \rho_{T+1} \times D_{T+1}^{mod} \end{cases}$$

La résolution formelle de ce système de deux équations à deux inconnues nous donne les montants  $F_T$  et  $F_{T+1}$  recherchés :

$$\begin{cases} N_T & = N_t \times \frac{\rho_t}{\rho_T} \times \frac{(D_{T+1}^{mod} - D_t^{mod})}{(D_{T+1}^{mod} - D_T^{mod})} \\ N_{T+1} & = N_t \times \frac{\rho_t}{\rho_{T+1}} \times \frac{(D_t^{mod} - D_T^{mod})}{(D_{T+1}^{mod} - D_T^{mod})} \end{cases}$$

Remarque: Il s'agit d'un barbell « zéro-coupon » de type « Cash-neutral ». On renvoie le lecteur au Chapitre 4 pour une étude des barbells et des stratégies de butterfly associées dans le contexte des obligations d'Etat à taux fixe et amortissement « in fine ».

## 1.4.2 Barbellisation et Agrégation de l'Echéancier

En utilisant le résultat obtenu au paragraphe 1.4.1, on va « barbelliser » les cashflows de l'échéancier de cashflows  $E$  donné en introduction de cette section de façon à le transformer en un échéancier de cashflows  $E^*$  ne comportant que des maturités entières :

$$E^* = \{F_k^*\}_{k=1\dots K}$$

On suppose que les cashflow  $F_k^*$  tombent à des dates  $t_k$  entières :

$$t_k = k \quad (k = 1\dots K)$$

En toute généralité, le processus de « barbellisation » du cashflow générique  $F_i$  de l'échéancier de cashflows initial  $E$ , consiste à projeter ce cashflow sur l'échéancier  $\{t_k\}_{k=1\dots K}$  de façon à obtenir un échéancier de cashflows  $F_i^*$  défini par :

$$E_i^* = \{F_{i,k}^*\}_{k=1\dots K}$$

avec de façon évidente<sup>20</sup> :

$$F_{i,k}^* = \begin{cases} F_{Ent[t_i]} & \text{si } k = Ent[t_i] \\ F_{Ent[t_i]+1} & \text{si } k = Ent[t_i] + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Au final, notre échéancier de cashflows barbellisé  $E^*$  est obtenu par sommation des échéanciers de cashflows  $E_i^*$  ( $i=1\dots I$ ) :

$$E^* = \bigcup_{i=1\dots I} E_i^* \quad \text{et} \quad F_k^* = \sum_{i=1}^I F_{i,k}^*$$

Notons que puisque notre barbell « zéro-coupon » conserve la sensibilité et la market value (localement), ces deux propriétés sont de façon triviale vérifiées sur l'échéancier global (les market values et les sensibilités sont additives).

### 1.4.3 Couverture : Méthode du Bootstrap

On se propose maintenant de couvrir le nouvel échéancier de cashflows  $E^*$  calculé au paragraphe 1.4.2 à l'aide de  $K$  obligations au « pair » de maturités  $k$  ( $k=1\dots K$ ) et dont les taux de coupon  $C_k$  ( $k=1\dots K$ ) sont donnés.

La méthode du bootstrap consiste à couvrir le cashflow de plus grande maturité  $K$  avec l'obligation de maturité correspondante  $K$  puis à passer au cashflow de maturité  $K-1$  et ainsi de suite jusqu'au 1A. Cependant à l'étape  $k$ , il est nécessaire de compléter l'échéancier de cashflows de l'étape  $k+1$  par les coupons versés par l'obligation utilisée pour couvrir le cashflow de maturité  $k+1$ .

Calculons les montants nominaux  $N_k$  ( $k=1\dots K$ ) des obligations de maturités  $k$  ( $k=1\dots K$ ) nécessaires pour couvrir cet échéancier.

Procédons par étape de la maturité  $K$  à la maturité 1A :

<sup>20</sup>.  $Ent[x]$  désigne la partie entière de  $x$

$$\begin{cases} F_K^* &= N_K \times (1 + C_K) \\ F_{K-1}^* &= N_K \times C_K + N_{K-1} \times (1 + C_{K-1}) \\ \vdots & \vdots \\ F_k^* &= \sum_{i=k+1}^K N_i \times C_i + N_k \times (1 + C_k) \\ \vdots & \vdots \\ F_1^* &= \sum_{i=2}^K N_i \times C_i + N_1 \times (1 + C_1) \end{cases}$$

Avec les notations suivantes :

- Les  $F_k^*$  sont les cashflows à couvrir
- Les  $N_k$  sont les montants nominaux des obligations de couverture
- Les  $C_k$  sont les taux de coupon (en %) des obligations de couverture

Avec, dans les trois cas,  $k=1\dots K$ .

On peut écrire ce système d'équations sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 + C_K & 0 & \cdots & 0 \\ C_K & 1 + C_{K-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_K & C_{K-1} & \cdots & 1 + C_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} N_K \\ N_{K-1} \\ \vdots \\ N_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_K^* \\ F_{K-1}^* \\ \vdots \\ F_1^* \end{bmatrix}$$

soit :

$$F^* = M \times N$$

Comme M est inversible car triangulaire, on peut finalement écrire :

$$N = M^{-1} \times F^*$$

Cette couverture est a priori parfaite dans le sens où on inverse les cashflows de l'échéancier initial. La qualité du hedge dépend de la périodicité de l'échéancier sur lequel on mappe les cashflows initiaux :

- Plus cette périodicité est petite, meilleur sera le hedge mais au prix d'un (trop) grand nombre de transactions
- Plus elle est grande, moins le hedge sera efficace mais plus il sera facile à mettre en place (et moins couteux en frais de transactions)

Ce type de hedge peut être utilisé pour couvrir des portefeuilles de type :

- Swap de taux car les swaps sont cotés au pair (quotidiennement) et sont des instruments « hors bilan » négociables facilement et à moindre coût (cf. Chapitre 5)
- Obligataires en utilisant les marchés de futures CT, MT et LT (lorsqu'ils existent) et seulement trois points dans la courbe pour le mapping (cf. Chapitre 7)

Dans la pratique, il faudra arrondir les nominaux obtenus de façon à avoir des multiples entiers de Million d'Euros (les marchés financiers sont des marchés de « gros » et non de « détails »). Cette remarque est d'ailleurs d'ordre générale et s'applique donc à tous les montages étudiés dans ce cours.

#### 1.4.4 Remarques et Prolongements

Dans ce chapitre, nous avons présenté les techniques de couvertures zéro-coupon multi-factorielles pour des portefeuilles obligataires à taux fixes. Nous terminons par quelques remarques importantes permettant de situer ces techniques dans l'univers plus large des techniques de couverture tout en précisant leurs champs d'application.

##### **Il existe différentes techniques de couvertures des instruments et/ou des portefeuilles taux.**

On distingue généralement les couvertures instantannées en sensibilité (delta) ou en sensibilité et convexité (delta/gamma) des couvertures à horizon. Contrairement aux couvertures instantannées, les couvertures « à horizon » tiennent compte du temps (portage). On distingue de même les couvertures globales ou macro-couvertures (cas plus spécifiquement traité dans ce chapitre) des couvertures analytiques ou micro-couvertures fondées sur des relations d'arbitrages (cas traités plus généralement dans cet ouvrage). Enfin, parmi les couvertures globales on distingue des couvertures par « time bucket » (bootstrap) des couvertures multi-factorielles. Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Chazot C. et Claude P.<sup>21</sup> pour un exposé relativement exhaustif de ces techniques dans le contexte des swaps (Chap. 13).

Les techniques de couvertures zéro-coupon multi-factorielles peuvent être (sous réserve d'un traitement séparé des risques spécifiques) appliquées à tout types de portefeuilles taux mono-devises. Les techniques de couvertures zéro-coupon multi-factorielles peuvent être appliquées aux portefeuilles taux mono-devises incorporants des obligations corporate, des repos, des futures CT, des futures LT ou des options.

Le principe général consiste à projeter ou « mapper » notre portefeuille sur un ensemble de taux zéro-coupon Etat/Swap correspondants à des dates de maturité pré-définies. Ce mapping s'effectue en deux étapes :

- Dans un premier temps, on remplace toutes les positions par leurs « équivalent-risques » en utilisant les relations d'arbitrages classiques largement décrites dans cet ouvrage. A ce stade on dispose d'un échancier de cashflows certains (positifs ou négatifs) tombant à des dates quelconques
- Dans un deuxième temps, on va projeter chaque cashflow individuellement sur un échancier fixe. Cette étape appelée « cashflow mapping » est décrite, entre autre, dans l'article de recherche de Mina J.<sup>22</sup> du Groupe RiskMetrics

Notons que ces deux projections ne sont pas neutres en terme de risque puisque certains risques spécifiques ne sont pas pris en compte (on pense en particulier au risque de volatilité sur les options, au risque de base sur les contrats futures LT ou au risque de credit spread sur les obligations corporate, par exemple). Il est bien évident que ces risques doivent être identifiés et faire l'objet d'un traitement spécifique (analyse, mesure et couverture éventuelle).

##### **Les couvertures multi-factorielles ont pour principal avantage de combiner des effets de couvertures (compensation des sensibilités par facteur de risque) et les effets de diversification (compensation des sensibilités entre différents facteurs de risque via les corrélations).**

Cette flexibilité permet de simplifier la construction des couvertures mais ces dernières sont néanmoins dépendantes des scénarios utilisés qui eux-mêmes dépendent des périodes sur lesquelles les variations de taux ont été observé. A contrario les techniques de couverture par « time bucket » sont exclusivement fondées sur les effets de « couvertures » et ne dépendent donc pas de scénarios prédéfinis. Par contre, elle sont plus « lourdes » à mettre en œuvre et ne sont vraiment opérationnelles que dans certains cas particuliers.

21. Chazot C. & Claude P. (1999), Les Swaps : Concepts et Applications, Economica (Collection Gestion)

22. Mina J. (1996), « Improved Cash Flow Map », Working Paper, RiskMetrics Group