Chapitre 2

Prêt-Emprunts, Forward-Forwards & FRAs

Introduction aux techniques de valorisation et de pricing (actualisation vs capitalisation, latent vs réalisé, etc.), aux risques financiers (risque de marchés, risque de crédit, risque de liquidité) et aux techniques d'arbitrages (FRA vs Forward-Forward) dans le contexte simple des instruments de taux à court terme (prêts-emprunts, forward-forward et FRA). Ce chapitre introduit en particulier le concept de taux forward et montre son importance fondamentale en tant que scénario central pour la valorisation d'une position de taux. Les Forward Rate Agreement (FRA) sont abordés de façon exhaustive (description des contrats, valorisation d'une position en cours de vie, applications en gestion de trésorerie). L'arbitrage simple entre un FRA et un Forward-Forward (de mêmes caractéristiques) sert de même à introduire les notions de produit « synthétique » et de pricing sous hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage (AOA). Enfin, l'étude complète de cet arbitrage est réalisé (montage et débouclage) afin d'illustrer les notions récurrentes de P/L anticipé, de risques couverts et de risques résiduels.

2.1 Marché Monétaire, Prêt/Emprunt et Conventions

Cette première section va nous permettre de présenter le marché interbancaire (composante du marché monétaire), les prêt-emprunts en blanc (principal instrument du marché interbancaire) et les conventions utilisées (taux et durées) sur les marchés de taux.

2.1.1 Le Marché Monétaire

Le marché monétaire est le lieu virtuel où les agents économiques placent leurs excédents de trésorerie ou financent leurs déficits de trésorerie. Il permet le financement à court terme (moins d'un an) des agents économiques principalement par le biais de prêts/emprunts négociés de gré-à-gré entre un prêteur et un emprunteur [1].

La rémunération du prêteur dépend du taux d'intérêt négocié, qui rémunère :

1. La privation de liquidité

1. A ce titre, les dettes à court terme des agents économiques ne se dinstinguent pas uniquement des dettes long termes par leurs maturités plus courtes. Les dettes à court terme correspondent à des besoins de trésoreries liées aux décalages ponctuels ou structurels entre les dépenses et les recettes de l'activité. Alors que les dettes à long terme sont avec les capitaux propres les contreparties (passif) des investissements réalisés par ces agents économiques pour la bonne marche de leurs activités (actif).

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

2. L'insolvabilité anticipée de l'emprunteur sur la période du prêt
3. L'inflation anticipée sur la période du prêt

Les principaux intervenants du marché monétaire sont les banques (banque centrale et banques commerciales), les investisseurs institutionnels (assureurs, sociétés de gestion, fonds de pension, etc.), les (grandes) entreprises et, bien sûr, le ou les Etats.

Le marché monétaire n'est pas une structure plate mais au contraire hiérarchisée dans laquelle le marché interbancaire tient un rôle primordial.

Dans la suite du cours nous nous intéresserons au seul marché interbancaire[2].

Le marché interbancaire est comme son nom l'indique la composante du marché monétaire réservée aux seules banques. Sur ce marché, les banques commerciales s'échangent, principalement au jour-le-jour mais aussi sur des maturités plus longues, leurs excédents/déficits de trésorerie.

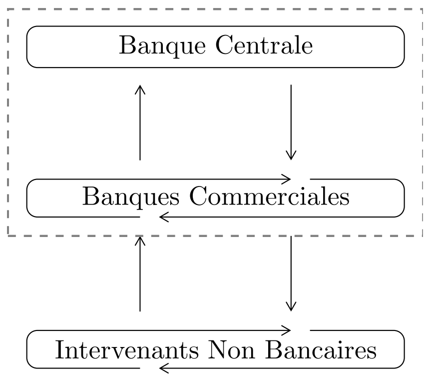

FIG. 2.1 – *Marchés Monétaire et Interbancaire*

Le solde du marché interbancaire est réalisé par un acteur fondamental des économies modernes : la banque centrale.

A ce stade[3], on peut considérer que les banques centrales ont pour principal objectif le contrôle du mix macroéconomique « croissance-inflation ». L'objectif intermédiaire des banques centrales est le contrôle de la liquidité bancaire à travers leur principal instrument, le taux directeur, qui détermine le taux payé par les banques commerciales pour des opérations de financement au jour-le-jour auprès de la banque centrale.

Les trois principales banques centrales dans le monde sont la Federal Reserve Bank (New York), l'European Central Bank (Francfort) et la Bank of Japan (Tokyo) qui interviennent sur les marchés interbancaires du dollar US, de l'Euro et du Yen, respectivement.

Notons que les marchés interbancaires sont directement liés à la monnaie dans laquelle les opérations de prêt-emprunt sont négociées. Ils sont la plupart du temps domestiques, à l'exception notable du marché monétaire de la zone Euro qui est commun à l'ensemble des pays membres.

Le marché interbancaire de la zone Euro dispose d'un indice de référence appelé Euribor (EURopean InterBank Offered Rate) qui est l'indice des taux interbancaires libellés en Euros. Plus précisement :

- C'est le taux moyen en Euro offert pour un dépôt à terme entre des banques de « première catégorie » ayant une activité significative sur le marché interbancaire en Euros.

2. Sauf mention contraire, on se placera dans le cas de grandes banques commerciales de la zone Euro dont le risque de crédit peut être négligé en première approximation.

3. Nous y reviendront au chapitre 5.

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

– Il est publié par la Fédération des Banques Européennes (EBF) tout les jours à 11:00 am CET pour des taux valeur Spot (J+2), diffusé en temps réel par Telerate et disponible sur www.euribor.org

Depuis son introduction en 1998, l'Euribor est devenu un indice « benchmark » qui sert de « sous-jacent » à de nombreux produits dérivés OTC ou organisés :

– Forward Rate Agreement (cf. pragraphe 2.4 dans ce chapitre)
– Swaps de taux d'intérêt (cf. Chapitre 5)
– Futures CT (cf. Chapitre 6)

L'indice Euribor n'est pas unique, il existe en fait 15 indices Euribor différents correspondants aux maturités suivantes :

– 1, 2, 3 semaines
– 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 mois

Les taux Euribor sont des taux de type « Spot/Period ».

Notons enfin que l'Euribor « Spot/Next » (S/N) n'existe pas, il est « remplacé » par un indice spécifique des taux au jour le jour (O/N) appelé Eonia (Euro OverNight Index Average)[4].

2.1.2 Structure d'un Prêt/Emprunt

L'instrument privilégié négocié sur le marché interbancaire (qui seul nous intéressera ici) est le prêt/emprunt[5].

Dans une opération de prêt-emprunt classique, une banque A prête à une banque B un montant N de devises (Euros dans la suite sauf mention contraire) à partir d'une date t_1 (date de valeur) et jusqu'à une date t_2 (date de maturité ou d'échéance).

En échange de ce prêt, la banque B conscent à payer, un montant d'intérêt I proportionnel au montant nominal et à la durée du prêt, calculé sur la base d'un taux d'intérêt « normalisé » (voir plus bas). Le prêt est à intérêts post-comptés lorsqu'ils sont payés en date de maturité et à intérêts pré-comptés lorsqu'ils sont payés en date de valeur.

Dans la suite du cours seuls les prêts à intérêts post-comptés sont traités.

La date t_0 à laquelle les banques A et B se mettent d'accord sur les conditions du prêt-emprunt est la date de négociation. On a donc :

$$\boxed{\text{Date de Négociation } (t_0) < \text{Date de Valeur } (t_1) < \text{Date de Maturité } (t_2)}$$

On représente généralement les échéanciers de cashflows des prêts-emprunts (et des instruments de taux en général) sous forme graphique. On distingue deux types de flux :

– Les flux rentrants correspondent à des encaissements (trésorerie), ils sont représentés par une flêche vers le haut
– Les flux sortants correspondent à des décaissements (trésorerie), ils sont représentés par une flêche vers le bas

4. Tout comme l'Euribor, L'Eonia est un un indice « benchmark » qui sert notamment de sous-jacent aux Overnight Index Swap qui sont des swap de taux court terme cotés sur les mêmes maturités que celles des indices Euribor

5. Plus précisément, il s'agit du prêt/emprunt « en blanc », c'est-à-dire non gagé par des actifs financiers livrables à la contrepartie prêteuse en cas de défaut de l'emprunteur

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

Le graphique ci-dessous représente la situation du point de vue du prêteur (A). Le graphique représentant la situation du point de vue de l'emprunteur est identique au sens des flèches et aux signes des montants prés.

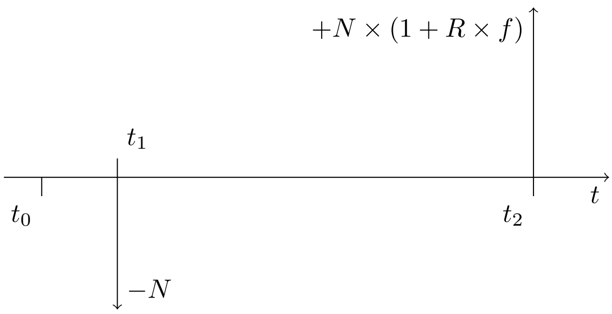

FIG. 2.2 – *Structure de Cashflows d'un Prêt-Emprunt*

Conformément à ce qui a été dit précédemment, le montant total remboursé par la banque B à la banque A est la somme du montant (nominal) emprunté N et des intérêts I, avec :

$$\boxed{I = N \times R \times f}$$

Avec les notations suivantes :

- N : Montant nominal du prêt
- R : Taux d'intérêt négocié pour ce prêt
- f : Fraction d'année correspondant à la durée du prêt

Les dates t_0, t_1 et t_2 correspondent toujours à des jours d'ouverture des marchés appelés « jours ouvrés » (hors weekends et jours fériés).

Notons enfin que les prêts dit « période » (sur au moins 2 jours) se négocient principalement sur des dates de valeurs égales à leur date de négociation plus 2 jours (J+2). Les taux correspondants sont dits « Spot/Period » (Spot = 2J).

Les prêts sur une journée (1J) se négocient plutôt sur les dates de valeur « J » (On parle de « JJ » pour « jour-le-jour ») et « Jour+1 » (Cf. tableau 2.1 ci-dessous).

Date de Valeur	Type de Taux	Acronyme
J	Overnight	O/N
J+1	Tom/Next	T/N
J+2	Spot/Next	S/N

TAB. 2.1 – Prêt/Emprunt sur 1 Journée

A titre d'exemple, le 01/12/03 (date de négociation), une Banque X (AAA) prête EUR 1M à une banque Y (AAA) au taux de 2% du 03/12/03 (date de valeur) au 24/12/03 (date de maturité) :

- Le 01/12/03 : X et Y négocient les conditions du prêt
- Le 03/12/03 : X crédite Y de EUR 1M
- Le 24/12/03 : Y crédite X de EUR 1,001,666.67

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

Le montant d'intérêt (coût du crédit) pour Y est calculé comme suit (taux linéaire et base Exact/360) :

$$I = EUR\,1M \times 2\% \times \left[\frac{21}{360}\right] = EUR\,1666.67$$

2.1.3 Conventions

Les marchés de taux font usages de conventions notamment pour le calcul des taux d'intérêt et des fractions d'années. Notons que ces conventions qui varient généralement selon les marchés, les produits et les devises n'ont cependant qu'un impact quantitif limité sur les quantités calculées et n'ont surtout aucun impact qualitatif sur la validité des formules générales de pricing et les raisonnements d'arbitrage donnés dans ce document. Ce paragraphe n'a pas pour vocation de couvrir le sujet de façon exhaustive mais souhaite simplement donner au lecteur les clés pour la prise en compte des ses conventions dans un cadre professionnel [6].

2.1.3.1 Conventions de Calcul des Durées

Ce sous-paragraphe est principalement basé sur une note interne de la Banque Internationale de Placement [7].

La fraction d'année entre deux dates (d'une même année) est calculée en divisant le nombre de jours entre ces deux dates par le nombre de jours total de l'année :

$$\boxed{f = \frac{Nombre\ de\ jours\ entre\ t_1\ et\ t_2}{Nombre\ de\ jours\ total\ dans\ l'année}}$$

La convention du calcul des fractions d'années est définie par deux « bases »:

- La base numérateur
- La base dénominateur

La base numérateur permet de calculer le nombre de jours entre les dates t_1 et t_2. Les principales bases numérateurs sont :

- NJE : On prend en compte le nombre de jours exact
- 30 : On considère que tous les mois font 30 jours

L'algorithme de calcul du nombre de jours entre les dates t_1 et t_2 lorsque la base numérateur est « 30 » est celui-ci :

```
SOIENT Y_i, M_i, D_i
(l'année, le mois et le jour de la date t_i  pour i=1,2)
SI D_1 = 31 ALORS D_1 = 30
SI D_2 = 31 ET D_1 = 30 ALORS D_2 = 30
NBJ = (Y_2 - Y_1)*360+(M_2 - M_1)*30+(D_2 - D_1)
```

La base dénominateur permet de calculer le nombre de jours total de l'année. Les principales bases dénominateurs sont :

- 360 : Une année a 360 jours

6. Notons qu'une troisième convention doit être prise en compte (mais ne sera pas évoquée dans ce cours), elle concerne le calcul des dates lorsque les dates « théoriques » de versement des coupons ne tombent pas sur des jours ouvrés. Dans la suite du cours, on ne tient pas compte des jours feriés.

7. Valérie Devers (1996), Documentation financière pour les courbes de taux, Département Analyse - Arbitrage, Informatique Front Office (Banque Internationale de Placement)

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

- 365 : Une année a 365 jours
- NBJ : Nombre de jours exact de l'année

Notons que lorsque la base dénominateur est « 360 » ou « 365 », la généralisation du calcul des fractions pour des dates t_1 et t_2 n'appartenant pas à la même année est immédiate.

Lorsque la base dénominateur est NBJ, la base numérateur est obligatoirement NBJ et le calcul de la fraction d'année consiste à décomposer la période $[t_1;\ t_2]$ en trois périodes contigues :

$$[t_1;\ t_2] = [t_1;\ 31/12/Y_1] \cup [01/01/Y_1+1;\ 31/12/Y_2-1] \cup [01/01/Y_2;\ t_2]$$

La fraction d'année de la période $[t_1;\ t_2]$ est logiquement définie comme la somme des fractions d'année correspondants à chaque sous-période :

$$f_{[t_1;\,t_2]} = f_{[t_1;\,31/12/Y_1]} + f_{[01/01/Y_1+1;\,31/12/Y_2-1]} + f_{[01/01/Y_2;\,t_2]}$$

avec de façon évidente :

$$f_{[01/01/Y_1+1;\,31/12/Y_2-1]} = Y_2 - Y_1 - 1$$

2.1.3.2 Conventions de Taux

On distingue généralement trois types de **conventions de taux** pour le calcul du montant d'intérêts et des facteurs d'actualisation :

1. Monétaire
2. Actuarielle
3. Continue

Pour une durée f donnée, le facteur d'actualisation (unique) DF s'écrit différemment selon la convention utilisée pour le calcul du taux[8]. :

$$\boxed{DF = \underbrace{\frac{1}{(1+f\times R_{mon})}}_{Monétaire} = \underbrace{\frac{1}{(1+R_{act})^f}}_{Actuarielle} = \underbrace{e^{-R_{cont}\times f}}_{Continue}}$$

On notera que la valeur actuelle du cashflow unique N+I (où I est le montant d'intérêts et N le montant nominal) est ègal à N dans les trois cas uniquement lorsque f est égal à 1 :

$$N = (N+I)\times DF$$

Ce n'est plus le cas lorsque f est strictement inférieur à 1 sauf pour la convention de taux « monétaire ».

Néanmoins, cette propriété n'est plus vraie pour un instrument dont le coupon annuel est versé en plusieurs fois car la convention de taux « monétaire » n'est pas techniquement compatible avec le principe d'actualisation :

8. Notons qu'il est parfois nécessaire de passer d'une convention de taux à une autre. C'est la cas en particulier lorsque l'on doit construire des courbes de taux zéro-coupon à partir d'instruments hétérogènes en terme de conventions de taux. Les formules de passage peuvent êtres directement obtenues à partir des formules données dans l'encadré ci-dessous

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

$$N \neq \frac{N \times R_{mon}}{1 + R_{mon}} + \frac{N + N \times R_{mon}}{1 + 2 \times R_{mon}}$$

Ces remarques expliquent pourquoi la convention de taux « monétaire » [9], la plus simple à comprendre et à calculer, est utilisée pour les instruments à court-terme typiques du marché monétaire qui :

- Se négocient sur des périodes inférieures à 1 an non standardisées
- Ne servent pas de coupons intermédiaires

Par contre, on utilise la convention de taux « actuarielle » pour les instruments « couponnés » comme les obligations (cf. Chapitre 3). La raison est essentiellement mathématique puisqu'en convention de taux « actuarielle », on a bien :

$$N = \frac{N \times R_{act}}{(1 + R_{act})^1} + \frac{N + N \times R_{act}}{(1 + R_{act})^2}$$

A noter, qu'un taux actuariel dépend de la période sur laquelle il s'applique qui est de 1A dans les formules précédentes. Si l'on considère le taux actuariel bi-annuel (applicable à une période de 6M), cette formule devient (par convention) pour le montant d'intérêt et le facteur d'actualisation respectivement :

$$I = N \times \frac{R_{act}^{bi-annuel}}{2} \qquad et \qquad DF = \left(1 + \frac{R_{act}^{bi-annuel}}{2}\right)^i \qquad avec \qquad i = 1{,}2$$

On montre facilement que la somme des valeurs actuelles des cashflows tombants à 6M et à 1A est précisément égal à N lorsque les taux sont « actuariels »:

$$N = \frac{N \times \frac{R_{act}^{bi-annuel}}{2}}{\left(1 + \frac{R_{act}^{bi-annuel}}{2}\right)} + \frac{N \times \frac{R_{act}^{bi-annuel}}{2} + N}{\left(1 + \frac{R_{act}^{bi-annuel}}{2}\right)^2}$$

Cette propriété se généralise à une périodicité quelconque p :

$$N = \sum_{k=1}^{p} \frac{N \times \frac{R_{act}^{p-annuel}}{p}}{\left(1 + \frac{R_{act}^{p-annuel}}{p}\right)^k} + \frac{N}{\left(1 + \frac{R_{act}^{p-annuel}}{p}\right)^p}$$

Dans ce cadre, le taux « continue » se défini comme le taux pour lequel le flux de coupon est continue, ce qui mathématiquement correspond à un taux actuariel de périodicité infinie.

$$R_{continue} = \underset{p \to +\infty}{Lim} R_{actuariel}^{p-annuel}$$

Les taux continus sont principalement utilisés dans la littérature académique du fait d'une simplicité d'écriture accrue liée aux « bonnes » propriétés de la fonction exponentielle.

Dans la suite de ce chapitre, on utilisera les conventions du marché monétaire, à savoir des taux « monétaires » et une base 30/NJE.

9. Cette convention de taux est dite « monétaire » par abus de langage, il s'agit en effet de la convention de taux « linéaire » qui est devenu « monétaire » du fait de son application unique sur le marché monétaire

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

2.2 Valorisation, Pricing & Risques

Les notions de valorisation, de pricing et de risques sont récurrentes en finance de marchés et constituent une part importante du travail quotidien des « Front Office » des banques et ce quel que soient les marchés et les instruments financiers traités. Valorisation et calcul des risques des positions sont aussi deux prérogatives des « Services de Contrôle des Risques » qui sont sensés donner à la direction générale des banques ainsi qu'aux autorités de contrôle une vision indépendante du « Front Office ».

2.2.1 Valorisation vs Pricing

Les notions de valorisation et de pricing sont parfois utilisées de façon subsituables pour décrire une même réalité.

Pourtant, ces deux notions ne sont absolument pas équivalentes.

On appelle **pricing** le processus qui consiste à calculer un (juste) « prix » pour un instrument financier donné.

Le concept de « prix » peut prendre des formes différentes selon les instruments traités. Il peut s'agir d'un montant en devises pour une action mais aussi pour une devise vis-à-vis d'une autre (on parle de taux de change), d'un pourcentage pour une obligation (prix pied de coupon exprimé en pourcentage du nominal de l'obligation) ou pour un contrat futures (CT ou LT), d'un taux d'intérêt pour un prêt/emprunt (taux spot) ou un FRA (taux forward) ou encore d'un spread (on parle aussi de marge) pour un asset-swap (marge au dessus du taux Euribor) ou un credit default swap par exemple[10].

Pricer c'est donc donner un « prix » unitaire et « mid-market » (prix milieu de fourchette) pour un instrument financier donné où le concept de « prix » dépend des spécificités de l'instrument (techniques, conventionnelles et/ou contractuelles). Ce « prix » est théoriquement indépendant du montant nominal souhaité mais en pratique la liquidité nécessairement imparfaite des marchés impose souvent de devoir donner un prix en « bid/ask spread » (fourchette achat/vente) qui peut varier en fonction du montant nominal souhaité.

De façon triviale, pricer un instrument financier c'est donc répondre à la question suivante :

Quel est le juste « prix » de cet instrument ?

On appele **valorisation** le processus qui consiste à calculer la « valeur de liquidation » d'une position donnée en cours de vie. Cette valeur est toujours exprimée dans la devise de la position (ou parfois dans la devise comptable de l'entité détentrice de la position si ces deux devises diffèrent). Cette valeur dépend donc directement du montant nominal ou de la taille de la position (elle est de fait propotionnelle à la taille de la position).

De façon générale, deux approches sont envisageables pour valoriser une position :

- En <u>inversant</u> (fictivement) la position en prenant une position de sens contraire (même instrument et même marché) sur le marché secondaire. Par exemple, le détenteur d'obligations pourra vendre ses obligations au prix du marché et en déduire son gain ou sa perte compte tenu du prix d'achat initial, du différentiel de coupon couru et du montant nominal de la position
- En <u>couvrant</u> (fictivement) la position en construisant une couverture via un ou plusieurs instruments éventuellement différents (de l'instrument à couvrir) sur un ou plusieurs marchés éventuellement différents (du marché de l'instrument à couvrir). C'est la cas notamment lorsqu'il n'y a pas de marché secondaire comme pour les prêt/emprunts négociés sur le marché interbancaire, par exemple

10. Cette liste n'est pas exhaustive, on pense en particulier à la volatilité pour les options et, plus exotique, à la corrélation pour les CDO

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

De façon triviale, valoriser une position en cours de vie c'est répondre à la question suivante :

Qu'est-ce que je gagne/perd si je « solde » ma position aujourd'hui ?

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons essentiellement nous intéresser au processus de valorisation. [11]

Par exemple, la Banque A peut, à une date t ($t_1 < t < t_2$), vouloir valoriser la position que constitue le prêt en cours de vie octroyé à la banque B.

Ainsi, notre banque A pourra chercher à :

- Inverser (et donc annuler) sa position auprès de la banque B avec paiement ou réception d'une soulte qui représente la valorisation du latent de la position (voir plus bas). Notons que cette solution annule simultanément le risque de taux et le risque de crédit
- Couvrir sa position en prenant une position se sens contraire vis-à-vis d'une banque tièrce C. Notons que cette solution annule le risque de taux mais pas le risque de crédit [12]

Dans le paragraphe suivant nous allons décrire le processus de valorisation d'un prêt-emprunt par couverture de la position résiduelle.

2.2.2 Valorisation : Latent & Réalisé

La valorisation d'une position en cours de vie (quel que soit l'instrument financier) est la somme de deux composantes faisant l'objet de deux calculs séparés :

- La **valeur latente** (« le latent ») qui correspond à la capitalisation (au jour de valorisation) des cashflows passés de la position
- La **valeur réalisée** (« le réalisé ») qui correspond à l'actualisation (au jour de valorisation) des cashflows futurs de la position

On peut donc écrire :

$$\boxed{V_{Total} = V_{Réalisé} + V_{Latent}}$$

Avant d'illustrer ces concepts dans le cadre simple du prêt/emprunt, faisons deux remarques d'ordre général :

- Le calcul du réalisé inclue généralement un financement « théorique » de la position lorsque cette position est prise dans le cadre d'une activité pour « compte propre » (trading pour compte propre). Ce n'est pas le cas lorsque la position est prise dans le cadre d'une activité pour « compte de tiers » (gestion pour compte de tiers)
- Le calcul du latent n'est pas toujours réalisable par actualisation simple des cashflows futurs car cette technique est envisageable uniquement lorsque les cashflows sont certains. Par « actualisation des cashflows futurs », on entend donc toutes les techniques qui généralisent le concept d'actualisation des cashflows certains aux cashflows incertains. Cette valeur latente est par ailleurs calculée à la date de valeur conventionnelle pour l'instrument en question (J+2 pour un prêt-emprunt « période », par exemple). Le calcul en valeur « jour » revient à ramener cette valeur latente de la date de valeur à la date du jour de valorisation via un ou plusieurs emprunts (resp. prêts) successifs si cette valeur latente est positive (resp. négative)

11. Les exemples de pricing évoqués plus haut seront abordés plus loins dans ce chapitre et très largement dans les chapitres suivants

12. Néanmoins, comme indiqué au début de ce chapitre, on suppose que le risque de crédit est négligeable pour les banques de première catégorie

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

Passons maintenant à la valorisation du prêt de la Banque A à la banque B. On se place donc du point de vue de la banque A à une date de valorisation t_3 (dont la date de valeur spot est t_4) :

$$t_0 < t_1 < t_3 < t_4 < t_2$$

On commence par **calculer la valeur latente du prêt**, ce qui revient à calculer la valeur actuelle du cashflow futur correspondant au remboursement du montant nominal du prêt et du paiement des intérêts.

La banque A va donc négocier auprès d'une banque C un emprunt pour un montant nominal N_2 au taux R_2 et de date maturité t_2 (date de maturité du prêt originel). L'objectif de la banque A est donc d'annuler le cashflow en date de maturité.

Sur le graphique 1.3 ci-dessous, on représente les cashflows du prêt originel en traits pleins et les cashflows du nouvel emprunt en traits pointillés.

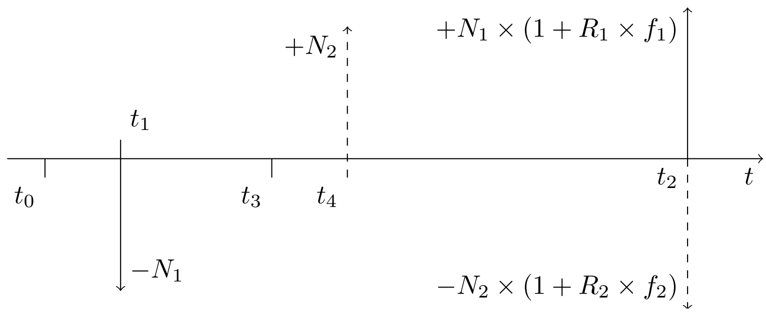

FIG. 2.3 – *Inversion d'une Position de Prêt-Emprunt*

Quel montant Nominal N_2 la banque A doit-elle emprunter ?

Un calcul simple nous donne :

$$N_2 = -N_1 \times \frac{(1 + R_1 \times f_1)}{(1 + R_2 \times f_2)}$$

Notons que cette procédure revient (en quelque sorte) à « ramener » le cashflow d'origine de la date de maturité t_2 à la date de valeur de l'emprunt t_4.

Afin de calculer une valorisation en valeur « jour », il est nécessaire de ramener ce cashflow en date de négociation de l'emprunt t_3, date à laquelle se pose le problème de valorisation. Pour ce faire, la banque A pourra contracter :

- Un emprunt valeur « J » et date maturité valeur « J + 1 » appelé emprunt « overnight » (ON)
- Un emprunt valeur « J + 1 » et date maturité valeur « J + 2 » appelé emprunt « Tom-Next » (TN)

Au final, la valeur réalisée du prêt correspond au montant emprunté via les 3 emprunts successifs et contigus est donnée par :

$$V_{Latent} = \frac{-N_2}{\left(1 + R_{ON}^{t_3} \times f_{ON}^{t_3}\right) \times \left(1 + R_{TN}^{t_3} \times f_{TN}^{t_3}\right)}$$

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

Ce montant n'est autre que la valeur latente du cashflow d'origine $+N_1 \times (1 + R_1 \times f_1)$ calculé en valeur « jour ».

Calculons maintenant **la valeur réalisée du prêt** c'est-à-dire la valeur actuelle des cashflows passés.

Le prêt en lui-même n'a pas généré de cashflow entre les dates t_1 et t_2. Mais comme le calcul est effectué par une banque, nous allons calculer la valeur du financement théorique du prêt.

Rappelons que la banque A est prêteuse vis-à-vis de la banque B d'un montant nominal N_1. Le calcul du financement théorique du prêt revient à supposer que la banque A « finance » cette sortie de cash par des emprunts overnight successifs. La valeur « jour » du latent est donc simplement égale au montant prêté N_1 capitalisé aux taux overnight successifs :

$$V_{Réalisé} = -N_1 \times \prod_{i=0}^{t-1} (1 + R_{i,i+1} \times f_{i,i+1})$$

Insistons sur le fait que dans ce calcul, seul le calcul du latent en date de valeur (J+2) est spécifique à notre position de prêt-emprunt. Par contre, le calcul du réalisé (J) et le calcul du latent en date de valorisation (J) sont génériques, c'est-à-dire les mêmes pour tous les instruments financiers.

2.2.3 Typologie des Risques et Risque de Taux

Le concept de risque en général et de risque de taux en particulier est omniprésent tout au long de ce cours. Nous décrivons ici les risques de taux, de crédit et de liquidité dont l'interprétation diffère selon qu'ils s'appliquent à la gestion du latent ou du réalisé.

Soit V_t la valorisation de la position en t (où t est la date du jour) et $\tilde{V}_{t+k}$ la valorisation ex-ante de la position en t+k (où k est un nombre quelconque strictement positif de jours ouvrés).

On appelle « Profit & Loss » (P/L) ex-ante la différence entre ces deux quantités :

$$\boxed{\widetilde{P/L}_{t,t+k} = \tilde{V}_{t+k} - V_t}$$

Le risque est fondamentalement lié à l'incertitude sur la valorisation de la position à horizon t+k. Plus présisément, il y a risque du fait de l'incertitude sur les facteurs qui rentrent dans le calcul de la valorisation de la position à cette date t+k.

Il nous faut distinguer les risques portant sur le réalisé (risques de financement) des risques portant sur le latent qui sont de natures différentes :

1. Le financement des positions (réalisé) est en général géré de façon agrégé (par devise) par les desks « marchés monétaires » ou les trésoreries des banques tandis que les positions elles-mêmes (latent) sont en général gérées par des desks spécialisés (par types d'instruments financiers ou par types de marchés ou encore par types de stratégies)
2. Les risques sur les positions résiduelles (latent) sont en général bien plus importants en terme de moins-value potentielle (exprimée dans la devise de la position) que les risques liés au financement de ces positions (réalisé) [13]

13. Cette différence d'ordre de grandeur entre les risques sur le latent et les risques sur le réalisé est évidemment assumée puisque ces risques sur le latent sont la contrepartie des gains attendus sur les desks en charge de ses positions, desks qui constituent des centres de profit pour les banques tandis que les activités de gestion de trésorerie sont des activités importantes certe mais secondaires qui ne participent que marginalement aux résultats des banques

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

Concernant **le réalisé de la position**, le risque porte sur le taux d'intérêt auquel la trésorerie de la position pourra être refinancée. Ce risque est logiquement appelé risque de (re-)financement et peut se décliner en trois composantes :

- Le <u>risque de « spread/marge de crédit »</u> est le risque de devoir refinancer une trésorerie « short » à des taux plus plus élévés du fait d'une dégradation de la solvabilité de la banque (perçue par le marché interbancaire et éventuellement mais pas obligatoirement sanctionnée par les agences de notation) entraînant le marché interbancaire à exiger une prime pour rémunérer le risque de crédit
- Le <u>risque de liquidité</u> est le risque de devoir refinancer une trésorerie « short » (resp. « long ») à des taux plus élevés (resp. faibles) du fait d'un reflu de la liquidité sur le marché. Notons que ce risque est de fait limité pour les banques commerciales dont la liquidité est assurée par la banque centrale en dernier ressort
- Le <u>risque de taux</u> est le risque de devoir refinancer une trésorerie « short » (resp. « long ») à des taux plus élevés (resp. faibles) indépendamment des deux facteurs précédents. Le facteur principal qui conditionne les variations des taux interbancaires est la perception par le marché des changements de politique monétaire de la banque centrale

Ces différents risques sont toujours les mêmes quelles que soient les positions sous-jacentes.

Par contre, les risques qui portent sur le latent des positions sont intimement liés aux types d'instruments utilisés (cash, dérivés, options ...) ainsi qu'aux types de marchés « sous-jacents » (taux, action, change, matières premières, ...) sur lesquels ses instruments sont traités. L'étude de ces risques doit être réalisée par types d'instruments ce qui sera fait dans les chapitres qui suivent pour les instruments de taux.

Pour le moment, regardons les risques qui portent sur le réalisé de notre position de prêt-emprunt.

Concernant **le latent de la position** de prêt (on se place toujours du point de vue de la banque A), le risque porte principalement sur le taux d'intérêt qui sert à l'actualisation du montant à recevoir en date de maturité du prêt (remboursement du montant nominal et paiement des intérêts du prêt) mais pas uniquement puisque le risque de défaut de la contrepartie (la banque B) ne peut être totalement exclue. Ces risques peuvent se décliner à travers trois composantes :

- Le <u>risque de crédit</u> a deux sous-composantes distinctes :
  - Le risque de « spread/prime de crédit » qui est le risque de devoir actualiser le cashflow à un taux plus élevé du fait d'une dégradation de la solvabilité de la banque B (perçue par le marché interbancaire et/ou sanctionnée par les agences de notation) entraînant le marché interbancaire à exiger une prime pour rémunérer le risque de crédit
  - Le risque de défaut qui est précisément le risque que la banque B fasse défaut sur tout ou partie des intérêts à payer et/ou sur tout ou partie du montant nominal du prêt
- Le <u>risque de liquidité</u> est le risque de devoir actualiser le cashflow à un taux plus élevé du fait d'un reflu de la liquidité sur le marché interbancaire. Notons que ce risque est de fait limité pour les banques commerciales dont la liquidité est assurée par la banque centrale en dernier ressort
- Le <u>risque de taux</u> est le risque de devoir actualiser le cashflow à un taux plus élevé indépendamment des deux facteurs précédents. Le facteur principal qui conditionne les variations des taux interbancaires est la perception par le marché des changements de politique monétaire de la banque centrale

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

Dans la suite du cours, nous nous intéresserons essentiellement aux risques portants sur le latent des positions dont le risque de taux qui est le sujet principal du cours.

Terminons par plusieurs remarques d'ordre général sur le risque de taux (latent).

La valeur latente d'une position (quel que soit l'instrument financier) est sensible aux variations du taux d'intérêt (effet d'actualisation). Toutes choses égales par ailleurs, les valorisations évoluent en sens inverse des taux d'intérêt :

$$\begin{cases} R \downarrow \Rightarrow \quad V_{Latent} \uparrow \qquad (risque\,de\,l'emprunteur/vendeur) \\ R \uparrow \Rightarrow \quad V_{Latent} \downarrow \qquad (risque\,du\,prêteur/acheteur) \end{cases}$$

Dans le cas des prêt-emprunts et des obligations à taux fixe (cf. Chapitre 3), la relation entre les deux quantités est déterministe [14].

La **sensibilité** est généralement mesurée par la dérivée mathématique de la valeur latente de la position par rapport au taux d'intérêt intervenant dans le facteur d'actualisation :

$$Sensibilité = \frac{dV_{Latent}}{dR}$$

On montre que la sensibilité des instruments à taux fixes (prêt-emprunts et obligations) augmente avec la maturité des dits instruments. **Ces instruments sont donc d'autant plus risqués que leur maturité est lointaine.** En particulier, le risque de taux sur les instruments du marché monétaire (prêt-emprunts à moins d'1A) est en général considéré comme négligeable ou tout au moins secondaire comparé au risque de taux sur les instruments du marché obligataire dont les maturités vont du 2A au 30A [15].

La sensibilité est un indicateur de risque très utilisé sur les marchés de taux du fait de sa simplicité. Il faut néanmoins garder à l'esprit, qu'il s'agit d'un indicateur « local » qui ne tient évidemment pas compte de la convexité de la relation prix-taux ainsi que du passage du temps.

2.3 Forward-Forward et Taux Forward

On appelle « Forward-Forward » un prêt-emprunt dont la date de valeur n'est pas une date spot conventionnelle mais une date plus lointaine appellée date forward. Par opposition aux taux d'intérêts « spots » des prêts-emprunts « spots », le taux d'intérêt d'un « Forward-Forward » est appellé « Taux Forward ».

2.3.1 Montage et Calcul

Les « Forward-Forwards » ne sont généralement pas cotés dans le marché interbancaire mais il est possible de créer un « synthétique » d'un prêt Forward-Forward (T_1,T_2) à partir d'un prêt de maturité T_2 et d'un emprunt de maturité T_1 (cf. tableau 2.2).

14. Aux risques de crédit et de liquidité prés

15. Ce constat est renforcé par le fait que les positions de trading et d'arbitrage sur le marché obligataire (secondaire) ont des horizons (bien) plus courts les maturités résiduelles des titres traités alors que les positions sur le marché monétaire (primaire) sont généralement tenues jusqu'à échéance

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

	T_0	T_1	T_2
Forward-Forward		$-N$	$+N \times \left(1 + R_{1,2}^{Fwd} \times f_{1,2}\right)$

TAB. 2.2 – Cashflows d'un Forward-Forward

On montre qu'un tel prêt est équivalent (en terme de cashflows) aux deux opérations combinées décrites dans le tableau 2.3 ci-dessous :

	Opération 1	Opération 2
Sens	Prêt	Emprunt
Date de valeur	T_0	T_0
Date de maturité	T_2	T_1
Taux	$R_{0,2}^0$	$R_{0,1}^0$
Nominal	$\frac{N}{1+R_{0,1}^0 \times f_{0,1}}$	$\frac{N}{1+R_{0,1}^0 \times f_{0,1}}$

TAB. 2.3 – Forward-Forward Synthétique (Détail des Opérations)

Pour le prouver, il suffit de comparer les structures de cashflows de l'opération Forward-Forward et de son « synthétique ».

	T_0	T_1	T_2
Opération 1	$+\frac{N}{1+R_{0,1}^0 \times f_{0,1}}$	$-N$	
Opération 2	$-\frac{N}{1+R_{0,1}^0 \times f_{0,1}}$		$+N \times \frac{1+R_{0,2}^0 \times f_{0,2}}{1+R_{0,1}^0 \times f_{0,1}}$
Total		$-N$	$+N \times \frac{1+R_{0,2}^0 \times f_{0,2}}{1+R_{0,1}^0 \times f_{0,1}}$

TAB. 2.4 – Forward-Forward Synthétique (Cashflows)

On a donc reproduit un prêt forward « synthétique » dont le taux forward « implicite » est donné par la formule ci-dessous (obtenue par identification des cashflows en date T_2 donnés dans les tableaux 2.2 et 2.4) :

$$\boxed{R_{1,2}^{fwd} = \frac{1}{f_{1,2}} \times \left[\frac{1 + R_{0,2} \times f_{0,2}}{1 + R_{0,1} \times f_{0,1}} - 1\right]}$$

Le taux forward est dit « implicite » car du fait de l'absence d'un marché des « Forward-Forward » il est calculé implicitement à partir des taux spots.

2.3.2 Propriétés Remarquables des Taux Forwards

Nous allons dans ce paragraphe énoncer et démontrer deux propriétés fondamentales des taux forwards.

Si les taux forwards implicites dans la courbe des taux interbancaires se réalisent systématiquement alors la valorisation d'un prêt/emprunt (latent plus réalisé) est nulle à chaque date de valorisation quel que soit le mode de financement.

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

Pour le prouver, considérons un prêt négocié à une date T_0 quelconque, de date de valeur T_1 (spot) et de date de maturité T_2. Plaçons-nous à une date t quelconque comprise entre T_1 et T_2 et démontrons que la valorisation du prêt est nulle à cette date quel que soit le mode financement.

Cas n°1 : On finance le prêt par un emprunt de T_1 à t

Pour le latent (valable dans les trois cas), on peut écrire en appliquant notre hypothèse de réalisation des taux forwards :

$$\begin{aligned} V_{Latent} &= N \times \frac{1+R^{spot}_{T_1,T_2} \times f_{T_1,T_2}}{1+R^{spot}_{t,T_2} \times f_{t,T_2}} \\ &= N \times \frac{1+R^{spot}_{T_1,T_2} \times f_{T_1,T_2}}{1+R^{fwd}_{t,T_2} \times f_{t,T_2}} \\ &= N \times \left(1+R^{spot}_{T_1,t} \times f_{T_1,t}\right) \end{aligned}$$

Le réalisé s'écrit simplement dans ce cas :

$$V_{Réalisé} = -N \times \left(1+R^{spot}_{T_1,t} \times f_{T_1,t}\right)$$

Au total, on a donc bien :

$$V_{Total} = V_{Latent} + V_{Réalisé} = 0$$

Cas n°2 : On finance le prêt par K emprunts successifs entre T_1 et t

Dans ce cas et avec des notations évidentes, le montant du réalisé s'écrit :

$$V_{Réalisé} = -N \times \prod_{k=0}^{K-1} \left(1+R^{spot}_{t_k,t_{k+1}} \times f_{t_k,t_{k+1}}\right)$$

Par hypothèse puisque les forwards se réalisent, on peut reécrire cette expression en remplaçant les taux spots par les taux forwards correspondants :

$$V_{Réalisé} = -N \times \left(1+R^{spot}_{t_0,t_1} \times f_{t_0,t_1}\right) \times \prod_{k=1}^{K-1} \left(1+R^{fwd}_{t_k,t_{k+1}} \times f_{t_k,t_{k+1}}\right)$$

Par définition d'un taux forward, on peut reécrire cette expression en ne faisant intervenir que le taux spot sur la période $[T_1; t]$:

$$V_{Réalisé} = -N \times \left(1+R^{spot}_{T_1,t} \times f_{T_1,t}\right)$$

On retrouve donc le cas n° 1.

Cas n°3 : On finance le prêt par K emprunts successifs entre T_1 et t dont le dernier (en cours) a une date de maturité comprise (strictement) entre t et T_2

En appliquant le résultat précédent au calcul du réalisé en date $t_{K\text{-}1}$, on trouve :

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

$$V_{Réalisé,t_{K-1}} = -N \times \left(1 + R^{spot}_{T_1,t_{K-1}} \times f_{T_1,t_{K-1}}\right)$$

Cette valeur est le montant qui a été emprunté de t_{K-1}à t_K ($t_{K-1}< t < t_K$).

Le calcul du réalisé en date t nécessite d'actualiser le cashflow correspondant au remboursement du nominal et au paiement des intérêts de t_K à t :

$$V_{Réalisé} = \frac{-N \times \left(1 + R^{spot}_{T_1,t_{K-1}} \times f_{T_1,t_{K-1}}\right) \times \left(1 + R^{spot}_{t_{K-1},t_K} \times f_{t_{K-1},t_K}\right)}{\left(1 + R^{spot}_{t,t_K} \times f_{t,t_K}\right)}$$

Par définition d'un taux forward, on peut reécrire cette expression en faisant intervenir le taux forward sur la période [t_K; t] :

$$V_{Réalisé} = -N \times \left(1 + R^{spot}_{T_1,t_{K-1}} \times f_{T_1,t_{K-1}}\right) \times \left(1 + R^{fwd}_{t_{K-1},t} \times f_{t_{K-1},t}\right)$$

Et finalement, toujours par définition d'un taux forward, cette expression se réduit à :

$$V_{Réalisé} = -N \times \left(1 + R^{spot}_{T_1,t} \times f_{T_1,t}\right)$$

Ce qui termine la preuve de la propriété.

Cette propriété a un corrolaire tout aussi fondamental :

Les taux forwards sont des estimateurs non biaisés des taux spots futurs correspondants.

Ce résultat se démontre simplement par un raisonnement par l'absurde.

Supposons pour fixer les idées que les taux forwards sont des estimateurs biaisés par défaut des taux spots futurs[16] :

$$R^{spot}_{t,t'} = R^{fwd}_{t,t'} + \epsilon \qquad avec \qquad \epsilon > 0$$

Dans ce cas, une stratégie évidente consiste à prêter « à taux fixe » et à financer ce prêt par une suite d'emprunts successifs, ce qui revient (par abus de langage) à être emprunteur « à taux variable ».

On est précisément dans le cadre de la propriété 1.

Pour conclure cette démonstration sans effort superflu, il suffit de remarquer que notre hypothèse revient à dire que les taux forwards se réalisent à ε-prés (ε > 0). En conséquence, la valeur réalisée (financement) peut s'écrire (dans les trois cas) comme la somme de deux composantes :

- La composante « réalisation des taux forwards »
- La composante « biais systématique »

Au final, la valorisation totale de la position se réduit à la composante « biais systématique » qui est positive par hypothèse.

Il est donc possible de « jouer » ce biais systématique pour générer (en moyenne) un profit sans risque ce qui n'est pas possible sous hypothèse AOA.

Ce qui termine la preuve de la propriété.

On constate donc que le risque ne porte donc pas sur la variation des taux d'intérêts par rapport à leurs niveaux actuels (comme on pourrait le penser a priori) mais sur la différence entre les taux réalisés et les taux forwards.

16. Notons que l'on parle bien ici de taux (spots) futurs et non de taux Futures c'est-à-dire des taux des contrats Futures CT (cf. Chapitre 6)

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

2.4 Forward Rate Agreement

Les Forward Rate Agreements (FRAs) sont probablement les instruments dérivés de taux les plus simples. On commence par en donner les caractéristiques principales puis on explique comment valoriser une position de FRA en cours de vie et comment pricer un FRA.

2.4.1 Définition d'un FRA

Un FRA est une **garantie de taux d'intérêt pour un emprunt (achat) ou un prêt (vente) à terme** dont le montant, la date de départ et la durée sont pré-déterminés[17].

Contrairement aux Forward-Forwards, les FRAs sont des instruments « hors bilan » dans la mesure où il n'y a pas de prêt ou d'emprunt (cash) à l'échéance du FRA (date de départ du prêt/emprunt). Le prêt/emprunt, appelé sous-jacent du FRA, sert simplement de référence (fictive) à la construction du FRA.

A l'échéance, le FRA est liquidé (cash settlement) par le versement du différentiel entre le taux R_{FRA} (taux du FRA défini en date de négociation) et le taux constaté sur le marché R_{FIXING} (taux du « fixing Euribor » en date d'échéance du FRA) actualisé et ajusté par le montant négocié et la durée du prêt-emprunt sous-jacent :

$$\boxed{Cash\ Settlement = \frac{N \times (R_{FIXING} - R_{FRA}) \times f}{(1 + R_{FIXING} \times f)}}$$

A des fins de transparence et de normalisation, le taux R_{FIXING} qui sert de référence au calcul du cash settlement n'est pas un « vrai » taux de marché mais un indice représentatif des taux du marché interbancaire, l'Euribor. On rappelle que cet indice est calculé une fois par jour sur les principales maturités standards du marché interbancaire et publié à heure fixe, on parle de « fixing Euribor » (cf. paragraphe 2.1.1).

Les FRA servent essentiellement à la gestion du risque de taux CT que ce soit sur le latent ou sur le réalisé (cf. Tableau 2.5).

	Latent	Réalisé
Achat	Se couvrir contre une hausse des taux CT	Se garantir un taux d'emprunt à terme
Vente	Se couvrir contre une baisse des taux CT	Se garantir un taux de prêt à terme

Tab. 2.5 – Gestion du risque de taux CT

A titre d'exemple, considérons qu'une banque A « achète » un FRA à une banque B. Les caractéristiques du FRA sont :

- Nominal : EUR 1M
- Taux : 2,5%
- Echéancier : 3M dans 1M (Taux 3 mois départ dans 1 mois)

A l'échéance du FRA (un mois plus tard), le fixing Euribor 3M est à 2%. En conséquence, le cash settlement du FRA est de EUR -1243.78. A savoir :

17. Contrairement aux contrats Futures CT (cf. Chapitre 6), les FRA sont des produits dérivés négociés de gré-à-gré et cotés par certains acteurs du marché interbancaire.

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

$$Cash\ Settlement = \frac{EUR\,1M \times (2\% - 2.5\%) \times 0.25}{(1 + 2\% \times 0.25)} = -EUR\,1243.78$$

La banque A va donc verser EUR 1243.78 à la banque B en date d'échéance du FRA.

On montre que la banque A a ainsi fixé ou cristalisé le taux auquel elle pourrait emprunter EUR 1M sur 3M. En d'autres termes, si elle montait effectivement l'emprunt à l'échéance du contrat de FRA au taux du Fixing Euribor alors l'opération combinée FRA + Emprunt serait équivalente à un Emprunt au taux de 2,5%.

On formalisera ce résultat au paragraphe 2.5.1.

2.4.2 Valorisation d'un FRA

On se donne une position de FRA (Achat) X mois dans Y mois négociée au taux R^1_{FRA} et on se place à Z mois de l'échéance du FRA (Z < Y).

Comment calculer la valeur actuelle pour cette position FRA?

La valorisation est réalisée en trois étapes[18] :

1. Couverture du FRA initial par un FRA de sens contraire
2. Remplacement du taux $\mathrm{R_{FIXING}}$ (inconnu) par le taux Forward équivalent (connu)
3. Actualisation du cashflow (connu) de la date d'échéance du FRA à la date de valorisation

La **première étape** consiste à couvrir cette position de FRA initiale par un FRA de mêmes caractéristiques (prêt-emprunt sous-jacent) que le FRA initial à l'exception du sens (Vente), de la période « forward » (Z mois) et du taux R^2_{FRA}.

Le total des cash settlement des deux FRA est donc :

$$Total_{CS} = \frac{N \times \left(R^1_{FRA} - R^2_{FRA}\right) \times f}{(1 + R_{FIXING} \times f)}$$

La somme des deux cash settlements élimine le taux du Fixing du numérateur de l'expression.

La **deuxième étape** consiste à éliminer l'incertitude sur le taux du fixing au dénominateur en utilisant la technique dite de « projection des taux forward » pour l'estimation de taux spots futurs. Cette technique se justifie par la deuxième propriété énoncée au paragraphe 2.3.2 qui veut que les taux forwards sont des estimations non biaisés des taux spots futurs.

En conséquence, le cashflow agrégé en date d'échéance des deux positions de FRA est maintenent parfaitement connu en date de valorisation et s'écrit :

$$Total_{CS} = \frac{N \times \left(R^1_{FRA} - R^2_{FRA}\right) \times f}{(1 + R_{FWD} \times f)}$$

Le taux $\mathrm{R_{FWD}}$ est le taux forward X mois dans Z mois calculé à partir des taux Euribor spots X mois et Z mois.

La **troisième et dernière étape** consister à ramener ce cashflow en date de valorisation.

18. En tant que contrat « hors bilan » ne générant pas de cashflow initial, la volarisation d'une position de FRA est réduite à sa seule valeur latente

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

Il suffit donc de l'actualiser en utilisant le taux Euribor spot Z mois, ce qui par définition du taux forward revient à actualiser le numérateur de l'expression précédente en utilisant le taux Euribor spot Z + X mois ce qui termine le calcul de la valeur de notre position de FRA :

$$V_{FRA} = \frac{N \times \left(R^1_{FRA} - R^2_{FRA}\right) \times f}{\left(1 + R^{Z+X}_{SPOT} \times f_{Z+X}\right)}$$

On a supposé dans ce calcul qu'il était possible de prêter ou d'emprunter au taux du fixing. Rappelons que ce n'est vrai qu'en première approximation et pour les banques de première catégorie.

2.4.3 Pricing d'un FRA

Le pricing d'un FRA consiste à calculer le taux forward équivalent sur le marché interbancaire (cash). L'équivalence en le taux d'un FRA et le taux forward (toutes choses égales par ailleurs) fait l'objet du paragraphe 2.5.1.

2.5 Arbitrage FRA vs Forward-Forward

On montre dans cette dernière section que les taux de FRA et les taux Forwards correspondants doivent être égaux sous hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). On illustre aussi le concept de stratégie d'arbitrage en expliquant comment tirer partie d'un écart significatif entre ces deux taux.

2.5.1 Equivalence FRA/Forward-Forward

Nous avons vu au sous-paragraphe 2.3.1 comment était construit un Forward-Forward à partir de deux opérations de prêt-emprunt spots de sens contraires.

Nous allons montrer ici que ce Forward-Forward peut être obtenu à partir d'une opération combinant un FRA, la mise en place du prêt-emprunt sous-jacent et le « portage » du cash settlement en date de maturité du prêt-emprunt sous-jacent.

Plus précisément, on a l'équivalence suivante :

Prêter un montant $\frac{N}{(1+R_{0,1}\times f_{0,1})}$ au taux $R_{0,2}$ sur la période [T_1, T_2]
+
Emprunter un montant $\frac{N}{(1+R_{0,1}\times f_{0,1})}$ au taux $R_{0,1}$ sur la période [T_0, T_1]
<==>
Vendre un FRA pour un montant N au taux $R^{FRA}_{1,2}$ sur la période [T_1, T_2]
+
Prêter un montant N au taux $R_{1,2}$ sur la période [T_1, T_2] (opé. réalisée en T_1)
+
« Porter » le cash settlement du FRA de T_1 à T_2 (opé. réalisée en T_1)

Pour prouver qu'il y a bien équivalence, nous allons procéder comme précédemment en comparant les structures de cashflows des deux montages aux dates T_1 et T_2 (aucun flux en T_0) :

- La structure de cashflow du Forward-Forward est donnée dans le tableau 2.2 du paragraphe 2.3.1

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

– La structure de cashflow de la position de FRA est donnée dans le tableau 2.6 ci-dessous

	T_1	T_2
Vente FRA	$\frac{N\times\left(R^1_{1,2}-R^{FRA}_{1,2}\right)\times f_{1,2}}{\left(1+R^1_{1,2}\times f_{1,2}\right)}$	
Prêt à terme	$+N$	$-N\times\left(1+R^1_{1,2}\times f_{1,2}\right)$
Portage du CS	$-\frac{N\times\left(R^1_{1,2}-R^{FRA}_{1,2}\right)\times f_{1,2}}{\left(1+R^1_{1,2}\times f_{1,2}\right)}$	$N\times\left(R^1_{1,2}-R^{FRA}_{1,2}\right)\times f_{1,2}$
Total	$+N$	$-N\times\left(1+R^1_{1,2}\times f_{1,2}\right)$

TAB. 2.6 – Equivalence FRA vs Forward-Forward

Les deux structures sont donc équivalentes et sous hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrages (AOA), on doit avoir égalité entre les taux Forward et les taux de FRAs de mêmes caractéristiques :

$$\boxed{R^{FRA}_{1,2} \equiv R^{FWD}_{1,2}}$$

2.5.2 Arbitrage FRA/Forward-Forward

Dans ce paragraphe, nous allons supposer que l'AOA n'est pas vérifiée et plus précisément que le taux du FRA est plus grand que le taux Forward :

$$R^{t,FRA}_{1,2} > R^{t,FWD}_{1,2}$$

t est une date quelconque t < T_1 < T_2.

Afin de profiter de ce « mis-pricing » entre les taux de FRA et les taux Forward, on va logiquement mettre en place l'arbitrage suivant :

1. « Prêt au taux du FRA » (Vente du « FRA »)
2. « Emprunt au taux Forward » (Emprunt Fwd-Fwd)

Les deux opérations sont réalisées simultanément pour un montant nominal N sur le sous-jacent du FRA.

Le P/L de ce montage en date T_2 est connu et certain en date t :

$$\boxed{P/L_{T_2} = N \times \left(R^{t,FRA}_{1,2} - R^{t,FWD}_{1,2}\right) \times f_{1,2}}$$

Il s'agit d'un arbitrage (presque) « parfait » puisqu'il nous procure un gain sans risque (en date T_2) pour un investissement initial nul (en date t).

Ce gain est connu en t et garanti à l'échéance du FRA en T_1 du fait de la double convergence :

– Des taux Forwards vers les taux Spot (Euribor) liée à la construction même des Forwards-Forward qui constituent une généralisation des Prêt-Emprunts Spots à des dates de départ non standards
– Des taux de FRA vers les taux Spot (Euribor) liée à l'utilisation de la référence Euribor pour le calcul des cash settlement des positions de FRAs

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

On a donc :

$$R_{1,2}^{t,FRA}\ et\ R_{1,2}^{t,FWD} \underset{t \to T_1}{\longrightarrow} R_{1,2}^{1,SPOT}$$

A titre d'exemple, on considère les données de marchés regroupées dans le tableau 2.7 ci-dessous.

3M dans 3M	Prêteur	Emprunteur
FRA	3.00	3.05
Forward-Forward	2.80	2.90

TAB. 2.7 – Exemple - Données de Marchés

Le nominal de la position est de EUR 100M.

Compte tenu des données précédentes :

- Quel arbitrage faut-il monter pour profiter du mis- pricing entre le FRA et le Forward-Forward ?
- Sur quel niveau de spread ?
- Quel est notre P/L anticipé à la date d'échéance ?

On peut prêter au taux du FRA (3%) et emprunter au taux du Forward-Forward (2.90%) et ainsi « locker » un spread de 10bp.

On va donc monter l'arbitrage suivant :

- V (Prêt) EUR100M FRA 3M/3M @ 3%
- A (Emprunt) EUR100M (~FRA) FWD/FWD 3M/3M @ 2.90%

Le P/L anticipé est égal à :

$$P/L = EUR\,100M \times (3\% - 2.90\%) \times 0.25 = EUR\,25000$$

Ce P/L de EUR 25000 sera versé dans 6M (date de maturité du prêt fictif sous- jacent au FRA).

Fin de l'exemple numérique.

Dans cette analyse, on a supposé que l'on pouvait prêter ou emprunter au taux Euribor. Dans la réalité, on a vu que le taux Euribor n'est pas un taux sur lequel on peut traiter mais un indice (une moyenne) des taux pratiqués sur un panel de grandes banques intervenants sur le marché interbancaire de la zone Euro. Cet arbitrage n'est donc envisageable que si les deux conditions suivantes sont réunies :

1. L'arbitragiste est une grande banque de la place pouvant traiter sur des taux Euribor à $\pm\varepsilon$-prés
2. La liquidité du marché interbancaire est suffisante pour pouvoir traiter les quantités voulues sur les échéances voulues avec des fourchettes bid-ask « acceptables » [19]

19. Hypothèse forte !

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/

On a aussi supposé que l'arbitragiste montait l'arbitrage en t et gardait sa position jusqu'à la date T_1. Cependant, le mis-pricing entre le taux de FRA et le taux Forward peut évoluer entre t et T_1. Si ce spread venait à s'inverser alors notre arbitragiste aurait tout intérêt à inverser sa position (sortie anticipée) de façon à « locker » le spread initial constaté en t plus le spread constaté en t' (t < t' < T_1).

Supposons donc qu'en t', on ait la situation suivante :

$$R_{1,2}^{t',FWD} > R_{1,2}^{t',FRA} \qquad avec \qquad t < t' < t + 3M$$

L'arbitragiste va donc inverser sa position via les deux opérations suivantes :

1. « Emprunt au taux du FRA » (Achat du « FRA »)
2. « Prêt au taux Forward » (Prêt Fwd-Fwd)

Ce qui lui permet d'améliorer son gain « sans risque » anticipé (en date T_2) :

$$P/L_{T_2} = N \times \left(R_{1,2}^{t,FRA} - R_{1,2}^{t,FWD}\right) \times f_{1,2} - N \times \left(R_{1,2}^{t',FRA} - R_{1,2}^{t',FWD}\right) \times f_{1,2}$$

On n'a pas tenu compte des spreads bid-ask sur les FRAs et les prêt/emprunts dans le calcul mais au contraire considéré que l'on pouvait traiter à l'achat (prêt) ou la vente (emprunt) au même taux « milieu de fourchette »[20].

A titre d'exemple, supposons que le spread change de signe entre la date de montage de la position et la date d'échéance du FRA. Sous cette hypothèse, on peut doubler le P/L calculé précédemment (EUR 50000) en inversant la position sans attendre la date d'échéance du FRA.

20. Rappelons qu'en pratique il faut évidemment en tenir compte (cf. Exercice 1)

Cours Produits/Stratégies de Taux — Version PDF Gratuite — http://www.tradingtaux.com/