Chapitre 3

Pricing & Trading Obligataire

Ce chapitre est une introduction aux techniques de « relative value trading » au sein d'une même courbe de taux (même devise et même émetteur). On commence par présenter les obligations à taux fixe « in fine » et les concepts actuariels associés (taux, duration et sensibilité). On présente ensuite les trois types de taux (taux zéro-coupon, taux actuariel et taux au pair), les structures obligataires associées et les méthodes de calculs pour passer d'un type de taux à un autre (correspondances). Le calcul des taux zéro-coupon est fondamental car ils constituent l'une des briques de base pour le pricing et la valorisation des produits financiers. Nous présentons les deux méthodes les plus couramment utilisées pour calculer les taux zéro-coupon à partir des prix d'un échantillon homogène l'obligations couponnées : la méthode directe (dite du bootstrap) et la méthode indirecte (Vacisek-Fong). Un comparatif entre ces deux méthodes termine cette section. Dans la dernière section, nous étudierons le financement des opérations d'achat ou de vente de titres obligataires par le marché des repos, les techniques de pricing obligataire et leurs limites (hétérogénéité non réductible) ainsi que les stratégies de « relative value trading » qui permettent de tirer partie d'anomalies dans la courbe de taux.

3.1 Généralités sur les Obligations

Le marché obligataire permet le financement à long terme des agents économiques (Etats, banques commerciales et autres grandes entreprises non bancaires) par l'émission d'emprunts obligataires (marché primaire). Contrairement aux prêts-emprunts du marché interbancaire étudiés au chapitre 2, les titres obligataires sont généralement négociables sur le marché secondaire durant toute leur durée de vie. C'est en particulier le cas pour les obligations émises par les Etats dont les OAT (Obligations Assimilables du Trésor) en France[1] .

3.1.1 Structure d'une Obligation à Taux Fixe « In Fine »

Les Trésors Publics des pays du G7 émettent régulièrement des titres obligataires pour financer leurs déficits budgétaires ou refinancer leurs dettes.

1. Les OAT sont des titres obligataires émis habituellement par voie d'adjudication dans le cadre d'un calendrier annuel publié à l'avance. Par assimilable on entend que des émissions peuvent être réalisées à plusieurs dates différentes sur une même « souche ». Chaque nouvelle émission vient accroître le montant total émis sur la souche. Le site web de l'Agence France Trésor est une mine d'informations concernant les spécificités des titres émis par le Trésor Public Français ainsi que sur les procédures d'émission qui ne sont donc pas reproduites ici

Ces titres sont en général :

- A taux fixe (les coupons sont déterminés à l'émission)
- « in fine » (le remboursement du principal à lieu à la maturité du titre)

En France, le Trésor Public émet principalement ce type d'obligations à taux fixe « in fine » sur des maturités allant du 2A au 50A [2]. Les titres émis par l'Etat Français ont une périodicité de coupon annuelle [3].

Un acheteur d'une obligation à taux fixe « in fine » à coupons annuels qui conserverait son titre jusqu'à l'échéance va recevoir un coupon tout les ans en date anniversaire de l'émission du titre obligataire et sera remboursé du principal en date de maturité (le graphique ci-dessous décrit la structure de cashflows d'un tel titre en cours de vie).

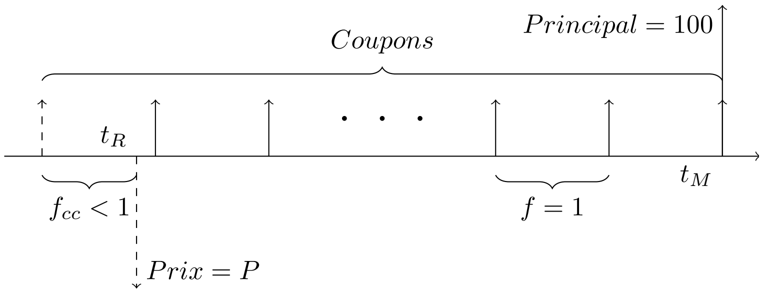

FIG. 3.1 – *Structure de Cashflows d'une Obligation*

En contrepartie, il doit s'acquitter du prix de l'obligation lors de son achat sur le marché (primaire ou secondaire). Le prix payé par l'acheteur est le prix brut égal au prix net (appelé prix « pied de coupon ») plus le coupon couru (égal au taux de coupon fois la fraction d'année écoulée depuis la date de versement du dernier coupon) :

$$P_{brut} = P_{net} + C \times f_{cc}$$

Par convention, les obligations sont cotées en prix « pied de coupon » et en pourcentage (du montant nominal). Ainsi, l'acheteur de EUR 10M d'une obligation qui cote 103.45% avec un coupon 3.10% et 6 mois de coupon couru devra débourser la somme de EUR 10.5M pour acquérir ces titres :

$$EUR\ 10.5M = EUR\ 10M \times [103.45\% + 3.10\% \times 0.5]$$

D'une façon générale, le prix négocié sur le marché obligataire (primaire ou secondaire) pour une obligation à taux fixe « in fine » dépend de :

- La maturité de l'obligation
- La solvabilité de l'emetteur
- La date à laquelle il est négocié

2. Le Trésor Public Français émet des OAT (Obligations Assimilables du Trésor) du 7A au 50A, des BTAN (Bons du Trésor à Intérêts Annuel) du 2A au 7A et des BTF (Bons du Trésor à taux Fixe et à intérêt précompté) à moins d'1A

3. Plus généralement et sauf cas particulier, les obligations émises par les pays d'Europe Continentale (ex: Allemagne) ont une périodicité de coupon annuelle (un coupon plein par an) tandis que dans les pays Anglo-Saxons (ex : Etats-Unis) elles ont une périodicité de coupon bi-annuelle (un demi-coupon tout les six mois)

Dans la suite de ce chapitre, on traitera le cas des obligations d'Etats du G7 dont le risque de crédit sera supposé négligeable en première analyse.[4]

Le cadre général des obligations à taux fixe « in fine » a deux cas particuliers remarquables :

1. Lorsque le taux de coupon est nul (l'obligation ne paye pas de coupon ni intermédiaire ni final, le seul et unique cashflow est le principal remboursé en date de maturité), on est en présence d'une obligation « zéro-coupon »
2. Lorsque la date de maturité est infinie (l'obligation paye un coupon indéfiniment et le principal n'est jamais remboursé), on est en présence d'une structure obligataire passée de mode appelée rente perpétuelle

Les obligations à taux fixe et amortissement « in fine » sont des structures « plain vanilla ».

Il existe d'autres types d'obligations qui se dinstinguent notamment par le type de taux (taux variables indexés sur des indices de taux d'intérêt ou de taux d'inflation, par exemple) et par le type d'amortissement du principal (amortissement linéaire ou « par annuités constantes », par exemple)[5].

3.1.2 Taux de Rendement Actuariel

Le taux de rendement actuariel ou, plus simplement, taux actuariel d'une obligation à taux fixe « in fine » est le taux $\mathrm{R_{act}}$ unique pour lequel la somme des valeurs actuelles des cashflows attachés à cette obligation est égale à son prix de marché (prix brut) :

$$\boxed{P_{brut} = (1+R_{act})^{f_{cc}} \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{100 \times C}{(1+R_{act})^i} + \frac{100}{(1+R_{act})^N} \right]}$$

Cette équation définie $\mathrm{R_{act}}$ implicitement en fonction de P et des caractéristiques de l'obligation. La fonction qui à $\mathrm{R_{act}}$ associe P n'étant pas inversible, la recherche de $\mathrm{R_{act}}$ se fait numériquement[6].

Le taux actuariel a deux propriétés importantes.

On pourrait penser a priori que le taux de rendement actuariel (ex-ante) de l'investissement obligataire doit être égal au taux de coupon de l'obligation. Il n'en est rien sauf dans le cas particulier où l'obligation est émise « au pair ». Une obligation est dite émise « au pair » lorsque son prix d'émission est égal à sa valeur de remboursement (100).

A l'émission, si l'obligation est émise « au pair » (Prix d'Emission = 100) alors le taux actuariel (à l'émission) est égal au taux de coupon C.

Supposons qu'à l'émission un titre obligataire a un taux actuariel égal à son taux de coupon alors son prix d'émission s'écrit :

$$P = C \times \sum_{i=1}^{N} \frac{100}{(1+C)^i} + \frac{100}{(1+C)^N}$$

4. Le risque de crédit sera abordé lors des chapitres 5 (Swaps de Taux et Asset-Swap Gov/Corp), 9 (CDS Arbitrage) et 10 (Capital Structure Arbitrage)

5. Les titres obligataires émis par les Etats (dont la France) sont en général à amortissement « in fine ». L'Etat Français émet en plus des OAT classiques des obligations à taux variables indexées sur l'indice obligataire TEC10 (OAT TEC10) et des obligations indexées sur l'inflation (OATi). Ces deux types spécifiques d'OAT ne sont pas traitées dans ce cours

6. Parmi les algorithmes de calcul du « zéro » d'une fonction, l'algorithme de Newton-Raphson est le plus souvent utilisé pour le calcul du taux actuariel. Dans le cadre des exercices, on utilisera l'outil « Solveur » disponible sur les tableurs de type MS Excel ou OO Calc

Posons :

$$\alpha = \frac{1}{(1+C)} \qquad et \qquad S_N = \sum_{i=1}^{N} \alpha^i$$

S_N est la somme d'une suite géométrique de progression α. On a :

$$S_N = \alpha \times \frac{\alpha^N - 1}{\alpha - 1}$$

En remplaçant α par sa valeur, on trouve :

$$S_N = -\frac{1}{C} \times \left[\frac{1}{(1+C)^N} - 1\right]$$

En remplaçant S_N par sa valeur dans l'expression de P, on a finalement :

$$P = 100$$

Ce qui termine la preuve de la propriété.

Le taux actuariel est égal au taux de rendement ex-post (TREP) à l'échéance de cet investissement sous l'hypothèse où les coupons (intermédiaires) sont tous réinvestis à ce même taux actuariel.

On note :

- P : Le prix (brut) d'acquisition du titre obligataire
- V_N : La valeur de l'investissement en date de maturité du titre obligataire

Par définition, le TREP de cet investissement s'écrit[7] :

$$TREP = \left(1 + \frac{V_N - P}{P}\right)^{1/N} - 1$$

Si on suppose de plus que les flux intermédiaires (coupons) sont réinvestis au taux actuariel alors V_N s'écrit :

$$V_N = 100 \times \left[C \times \sum_{i=1}^{N} (1 + R_{act})^i + 1\right]$$

$$V_N = 100 \times (1 + R_{act})^N \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{C}{(1 + R_{act})^{N-i}} + \frac{1}{(1 + R_{act})^N}\right]$$

$$V_N = 100 \times (1 + R_{act})^N \times P$$

En réinjectant cette expression de V_N dans la formule du TREP ci-dessus et en simplifiant, on trouve finalement :

7. Le TREP est le taux de rendement ex-post (annualisé) d'un investissement qui intègre toutes les composantes contributives de la performance globale de cet investissement (les revenus intermédiaires, le réinvestissement de ces revenus intermédiaires et la plus-ou-moins value éventuelle en capital).

$$TREP = R_{act}$$

Ce qui termine la preuve de la propriété.

Le taux actuariel est donc une bonne approximation ex-ante du taux de rendement ex-post de l'investissement obligataire dans l'hypothèse où l'on conserve l'obligation jusqu'à son échéance et où l'on réinvesti les coupons intermédiaires reçus à un taux d'intérêt proche du taux actuariel (hypothèse forte mais néanmoins acceptable en première approximation).

3.1.3 Duration et Immunisation

La **duration** d'une obligation est la moyenne pondérée des « dates » (en fait les durées) auxquelles sont versées les coupons et le principal par la contribution de chacun des versements à la valeur de l'obligation :

$$\boxed{D = \frac{(1+R_{act})^{f_{cc}} \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{100 \times C \times (i-f_{cc})}{(1+R_{act})^{i}} + \frac{100 \times (N-f_{cc})}{(1+R_{act})^{N}}\right]}{P}}$$

Toutes choses égales par ailleurs, on peut faire les constats suivants :

- La duration d'une obligation à taux fixe « in fine » croît avec la durée de vie résiduelle tout en étant toujours inférieure à cette durée de vie résiduelle
- La duration est d'autant plus élevée et proche de la durée de vie résiduelle que le taux de coupon est faible. Dans le cas où le taux de coupon est nul (obligation « zéro-coupon »), la duration est égale à la durée de vie résiduelle
- La duration d'une rente perpétuelle est une valeur finie[8]

On verrait de même que la duration :

- Croît avec la durée de vie mais à un taux décroissant
  - Non limité si elle cote en dessous du pair
  - Limité si elle cote au dessus du pair
- Diminue lorsque les taux d'interêts augmentent

Le graphique suivant illustre ces différentes observations :

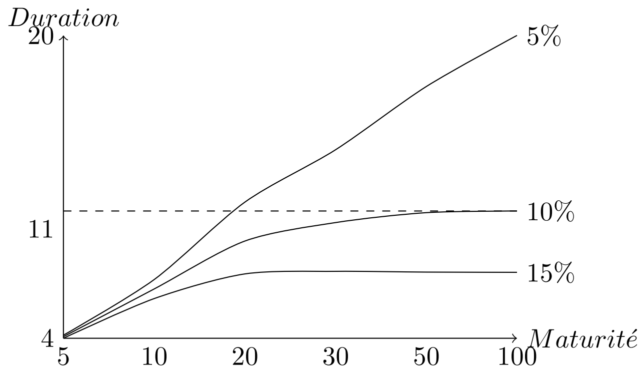

FIG. 3.2 – *Duration en Fonction de la Maturité et du Taux Actuariel (C=10%)*

8. A titre d'exemple, la duration d'une rente perpétuelle versant un coupon de 10% annuellement est 11 ans.

En dehors de ces constats élémentaires, la duration possède une propriété fondamentale et non totalement triviale.

La duration D est la durée de détention de l'obligation pour laquelle l'investisseur est totalement « immunisé ». Autrement dit, la duration est la durée de détention de l'obligation pour laquelle la valeur $\mathbf{V_D}$ de l'investissement (latent+réalisé) à la date D ne dépend pas du taux actuariel $\mathbf{R_{act}}$.

On se place à une date D quelconque entre deux dates de coupon :

$$0 < \ldots < n \leq D < n+1 < \cdots < K$$

Calculons les deux composantes de $\mathrm{V_D}$:

1. Le <u>réalisé</u> qui est constitué des coupons reçus (depuis l'achat du titre) réinvestis au taux actuariel $\mathrm{R_{act}}$
2. Le <u>latent</u> qui est constitué des flux futurs à recevoir actualisés au taux actuariel $\mathrm{R_{act}}$

On a :

$$V_D = V_D^{Réalisé} + D_D^{Latent}$$

avec :

$$V_D^{Réalisé} = \sum_{k=1}^{n} C \times (1 + R_{act})^{D-k}$$

et :

$$V_D^{Latent} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C}{(1 + R_{act})^{k-D}} + \frac{100}{(1 + R_{act})^{K-D}}$$

Puisque l'on souhaite montrer que $\mathrm{V_D}$ ne dépend pas de $\mathrm{R_{act}}$, il suffit donc de trouver D tel que :

$$\frac{dV_D}{dR_{act}} = 0$$

En dérivant chacune des deux composantes précédentes de $\mathrm{V_D}$ par rapport au taux actuariel $\mathrm{R_{act}}$, on obtient :

$$\frac{dV_D^{Réalisé}}{dR_{act}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(D-k) \times C}{(1 + R_{act})^{k-D+1}}$$

et :

$$\frac{dV_D^{Latent}}{dR_{act}} = \sum_{k=n+1}^{K} \frac{(D-k) \times C}{(1 + R_{act})^{k-D+1}} + \frac{100 \times (D-k)}{(1 + R_{act})^{K-D}}$$

Après sommation de ces deux dernières expressions, égalisation à zéro, réorganisation des termes et simplification, on trouve l'expression de D qui vérifie notre condition d'immunisation :

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{K} \frac{k \times C}{(1+R_{act})^k} + \frac{100 \times k}{(1+R_{act})^K}}{\sum_{k=1}^{K} \frac{C}{(1+R_{act})^k} + \frac{100}{(1+R_{act})^K}}$$

D est donc bien l'expression de la duration de l'obligation (dans le cas particulier où la date d'investissement correspond à la date d'émission ou à une date tombée de coupon).

Ce qui termine la preuve de la propriété.

La duration s'interprète donc comme **la durée de détention d'une obligation pour laquelle l'effet des variations du taux actuariel sur le réalisé (réinvestissement des cashflows passés) et sur le latent (actualisation des cashflows futurs) se compensent** [9].

La duration permet de dinstinguer deux périodes dans la vie d'une position obligataire correspondant à deux types de gestions différentes :

- Lorsque l'horizon d'investissement est inférieur à la duration, le TREP de la position dépend essentiellement de la moins-value ou plus-value sur le latent. Ce TREP peut donc s'écarter très sensiblement dans un sens ou dans un autre du taux actuariel R_{act} négocié lors de l'achat des titres obligataires (cas d'un trader ou d'un arbitragiste taux)
- Si l'horizon d'investissement est supérieur à la duration, le TREP de la position dépend essentiellement de la capitalisation des revenus intermédiaires (coupons). Ce TREP peut s'écarter du taux actuariel R_{act} négocié lors de l'achat des titres obligataires mais dans des proportions biens moindres que dans le cas précédent [10] (cas d'un gestionnaire obligataire ou d'un assureur vie)

On retrouve ici la dichotomie entre « spéculation » (recherche de plus-value à CT) et « investissement » (recherche de revenus à LT).

3.1.4 Couverture en Sensibilité Actuarielle

La **sensibilité** (actuarielle) est par définition la dérivée première du prix de l'obligation P par rapport à son taux actuariel R_{act} :

$$S = \frac{dP}{dR_{act}}$$

En dérivant la formule du prix d'une obligation par rapport à son taux actuariel on trouve une expression simple de la sensibilité de cette obligation en fonction de sa duration, de son prix et de son taux actuariel :

$$S = -P \times \frac{D}{(1 + R_{act})} = -P \times D_{mod}$$

La Duration Modifiée (D_{mod}) est définie comme la duration divisée par un plus le taux actuariel.

9. En d'autres termes, la position obligataire est parfaitement immunisée en terme de valorisation globale (latent + réalisé) du fait que la moins-value (resp. plus-value) sur le latent liée à une hausse des taux d'intérêts (resp. baisse des taux d'intérêts) est parfaitement compensée sur le réalisé du fait du réinvestissement des coupons intermédiaires à des taux plus élevés (resp. moins élevés).

10. Ce constat est exacerbé lorsque les titres obligataires sont conservés jusqu'à maturité du fait du phénomène de convergence du prix de l'obligation vers sa valeur de remboursement à l'échéance (connu sous le nom de « pull-to-par effect » dans la littérature)

De cette expression, on déduit que **la sensibilité d'une obligation est d'autant plus grande (en valeur absolue) que sa duration (et donc sa maturité résiduelle) est importante**. En d'autres termes et toutes choses égales par ailleurs, l'impact d'une hausse du taux actuariel sur le prix d'une obligation est d'autant plus important que la duration (et donc la durée de vie résiduelle) de cette obligation est importante.

Par convention, la sensibilité d'une obligation est généralement exprimée en centimes de prix par point de base de taux (ctm/bp). Ainsi une sensibilité de 7 ctm/bp signifie que si le taux actuariel augmente (resp. baisse) de 1bp (soit 0.01%) alors l'impact sur le prix de l'obligation sera en première approximation de -7 ctm ou -0.07 (resp. +7 ctm ou +0.07).

La sensibilité actuarielle est utilisée pour **mesurer le risque d'une position obligataire** (latent) et par extension pour la **construction de couvertures obligataires** (calcul de hedge ratio).

Considérons un portefeuille investi dans K obligations pour des montants nominaux N_k (k=1...K). Si P_k est le prix de l'obligation k alors la valeur actuelle de ce portefeuille est donnée par :

$$V = \sum_{k=1}^{K} N_k \times P_k$$

Considérons une obligation de couverture dont le prix est P_0 et la sensibilité S_0.

Quel montant nominal de cette obligation faut-il vendre pour couvrir notre portefeuille en sensibilité actuarielle ?

Formellement, notre condition de couverture s'écrit :

$$\triangle (V - N_0 \times P_0) = 0 \qquad \forall \triangle R = \triangle R_k = Cte$$

Si dans la condition de couverture précédente on remplace V par sa valeur, on distribue l'opérateur Δ et on remplace ΔP_k par sa valeur « approximée » $S_k \times \triangle R$, on obtient après avoir factorisé ΔR :

$$\triangle V = \left[\sum_{k=1}^{N} N_k \times S_k - N_0 \times S_0 \right] \times \triangle R = 0 \qquad \forall \triangle R = Cte$$

En conséquence, le montant nominal N_0 nécessaire pour couvrir notre portefeuille est :

$$N_0 = \frac{\sum_{k=1}^{N} N_k \times S_k}{S_0}$$

Pour rappel (cf. Chapitre 1), il s'agit d'une couverture instantanée (elle ne tient pas compte du temps) et mono-factorielle (scénario de déplacement uniforme des taux actuariels des différentes obligations).

3.1.5 Typologie et Correspondances des Taux

Trois types de taux sont régulièrement utilisés sur les marchés obligataires :

1. Les <u>taux actuariels</u> liés à des titres spécifiques
2. Les <u>taux « au pair »</u> qui permettent les comparaisons « inter-courbes »

3. Les taux zéro-coupon qui sont les briques de base du pricing des produits de taux

Les taux actuariels et les indicateurs de risques associés (duration et sensibilité) sont très utilisés sur les marchés pour analyser les titres obligataires indépendamment des uns des autres. Néanmoins l'usage des taux actuariels pose deux problèmes :

1. Un problème théorique lié à l'hypothèse sous-jacente d'une courbe des taux plate qui est largement contredite dans les faits
2. Un problème pratique lié à l'impossibilité de comparer de façon rigoureuse les titres obligataires les uns par rapport aux autres

Ces limitations ont été progressivement levées par l'introduction du concept de taux zéro-coupon et des techniques de calcul associées au cours des trente dernières années.

Le tableau 3.1 suivant résume les correspondances entre les trois types de taux :

de↑/vers →	Taux Actuariel	Taux Zéro-Coupon	Taux au Pair
Taux Actuariel		Calcul des taux zéro-coupon	Passage par les taux zéro-coupon
Taux Zéro-Coupon	Pricing obligataire		Pricing obligataire
Taux au Pair	Passage par les taux zéro-coupon	Calcul des taux zéro-coupon	

Tab. 3.1 – Correspondances des Taux

Dans la suite de ce chapitre nous allons essentiellement expliquer comment passer d'un type de taux à un autre ce qui revient à décrire les techniques de calcul des taux zéro-coupon et la technique (inverse) de pricing obligataire.

3.2 Calcul des Taux Zéro-Coupon

La construction d'une courbe des taux zéro-coupons est un problème qui doit d'abord être posé indépendamment des techniques utilisées et dont certains aspects connexes (choix des taux court terme et techniques d'interpolation) doivent aussi être préalablement traités. On décrit ensuite les deux techniques utilisées pour calculer des taux zéro-coupon à partir d'un échantillon d'obligations « couponnées » de différentes maturités (méthodes directe et indirecte). On termine par un comparatif des deux approches.

3.2.1 Description du Problème

Les Etats n'émettent pas de titres zéro-coupon mais essentiellement des titres à taux fixe « in fine » classiques. **On va donc devoir reconstruire une courbe des taux zéro-coupon à partir des instruments « couponnés » dont on dispose.**

On se donne un échantillon de titres obligataires ayant :

- Les mêmes caractéristiques structurelles (taux fixe – « in fine »)
- Les même intervenants (de sorte que courbe soit globalement « arbitrée »)
- La « même » liquidité (bid-ask spread)

Hypothèse fondamentale : Les prix théoriques des titres pricés dans la courbe des taux zéro-coupon sont « égaux » aux prix de marchés.

$$\boxed{Prix\,Théorique\ (P^*) \equiv Prix\,Observé\ (P)}$$

Le prix théorique P^* d'un titre obligataire de l'échantillon pricé dans une courbe des taux zéro-coupon est donné par la formule générique suivante :

$$P^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{F_i}{(1+Z_i)^{f_i}}$$

Avec les notations :

- F_i est le i-ème cashflow du titre obligataire considéré de l'échantillon
- f_i est la durée correspondant au versement du cashflow F_i
- Z_i est le taux zéro-coupon Etat pour la durée f_i

A partir de cet échantillon, il existe deux méthodes permettant de recalculer les taux zéro-coupon « correspondants » :

1. Méthode Directe : les taux zéro-coupon sont calculés de proche en proche des maturités les plus courtes vers les plus longues et l'égalité entre prix théorique et prix observé est strictement vérifiée
2. Méthode Indirecte : les taux zéro-coupon sont calculés globalement sur toute la courbe par minimisation d'une fonction d'erreur et l'égalité entre prix théorique et prix observé est vérifiée modulo l'erreur d'ajustement

Ces deux méthodes feront l'objet d'une présentation détaillée dans les paragraphes 3.2.2 et 3.2.3 respectivement.

Pour que cette courbe des taux permette le calcul de n'importe quel taux zéro-coupon du 1J au 30A, il est nécessaire de la compléter sur le court terme ($<$ 1A) tout en garantissant l'homogénéité de l'échantillon.

Comment déterminer les taux Etat à court terme ($<$ 1A) ?

Plusieurs solutions sont invisageables :

1. Utiliser les taux actuariels de titres « en fin de vie » (moins d'1 an de maturité résiduelle) qui sont par nature des taux zéro-coupons
2. Utiliser les taux des instruments de dettes à court terme (BTF en France)
3. Utiliser les taux du marché des Repo « GC »[11]

Les deux premières solutions sont les plus évidentes mais souffrent de problèmes liés à l'illiquidité des titres « en fin de vie » et du marché des BTF globalement (ces titres à CT sont très souvent acquis à l'émission et conservés jusqu'à échéance par les investisseurs). De surcroît, les intervenants sur les parties LT et CT de la courbe des taux Etat sont en général distincts. **On utilisera donc les taux du marché des repo « GC » qui présentent l'avantage d'êtres des marchés relativement liquides, représentatifs du risque Etat par construction et traités par les mêmes intervenants que la partie LT de la courbe.**

La méthode directe de calcul de taux zéro-coupon permet de calculer les taux zéro-coupon correspondants aux dates de maturités des obligations constituant l'échantillon.

Comment calculer un taux zéro-coupon correspondant à une date quelconque ?

11. Cf. paragraphe 3.3.1 (dans ce chapitre) pour un descriptif du marché des repos

On va simplement interpoler le taux cherché à partir des taux zéro-coupon adjacents déjà calculés.

Trois méthodes sont envisageables :

1. Linéaire
2. Cubique
3. Cubique Différentiable

Les méthodes d'interpolation cubiques permettent d'introduire de la convexité « glocale » dans la construction de la courbe des taux. La méthode cubique différentiable permet en outre d'obtenir une courbe « lisse » en chaque point [12]. Bien qu'attractives sur le plan technique, ces méthodes peuvent générer des taux difficilement justifiables sur le plan financier voir même abérants (taux négatifs) lorsque, par exemple, les courbes des taux sont inversées sur le court terme et « normales » sur le long terme.

On utilisera la méthode d'interpolation linéaire qui est la plus simple à mettre en œuvre et conforme aux usages du marché.

La méthode d'interpolation linéaire consiste à calculer le taux zéro-coupon Z pour une durée f quelconque à partir des taux zéro-coupon adjacents $\mathrm{Z_k}$ et $\mathrm{Z_{k+1}}$ de durées respectives $\mathrm{f_k}$ et $\mathrm{f_{k+1}}$ avec $\mathrm{f_k} < \mathrm{f} < \mathrm{f_{k+1}}$ en utilisant une combinaison linéaire des deux taux « pro rata temporis » :

$$Z = \frac{(f_{k+1} - f) \times Z_k + (f - f_k) \times Z_{k+1}}{f_{k+1} - f_k}$$

C'est cette méthode d'interpolation que nous allons systématiquement utiliser dans ce cours (exemples numériques et exercices) pour le calcul des taux zéro-coupon à des dates quelconques.

3.2.2 Méthode Directe

La méthode directe consiste à procéder de proche en proche des maturités les plus courtes vers les maturités les plus longues en réinjectant à l'étape courante du calcul les taux zéro-coupon déjà calculés aux étapes précédentes. **On commence par décrire le cas simple où l'échantillon obligataire est constitué uniquement d'obligations « aux pair » avant d'expliquer comment procéder dans le cas général**[13].

3.2.2.1 Cas des Obligations au Pair

Supposons que l'on dispose de N obligations (à taux fixe, remboursement « in fine » et périodicité des coupons annuelle) « au pair » dont les maturités vont du 1A (la première obligation est donc un zéro-coupon) au N Ans. Comme ces obligations sont au pair, les cashflows tombent sur les maturités entières : 1A, 2A, ... N Ans.

On commence par calculer le taux zéro-coupon 1A à partir de l'obligation au pair de maturité 1A :

$$100 = \frac{100 + C_1}{(1 + Z_1)^1} \qquad \Longrightarrow \qquad Z_1 = \frac{C_1}{100}$$

12. Le lecteur intéressé pourra consulter l'ouvrage de Chazot C. et Claude P. (1999) sur les swaps pour un descriptif clair et concis des méthodes cubiques

13. Le cas des taux au pair est un cas très spécifique qui n'a pas d'application sur le marché obligataire mais qui n'est pas pour autant sans intérêt pratique puisque les swaps de taux sont cotés au pair (cf. Chapitre 5)

On passe ensuite au taux zéro-coupon de maturité 2A.

On applique la formule de pricing zéro-coupon de cette obligation en réinjectant le taux zéro-coupon 1A précédemment calculé :

$$100 = \frac{C_2}{(1+Z_1)^1} + \frac{100+C_2}{(1+Z_2)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad Z_2 = \sqrt{\frac{100+C_2}{100 - \frac{C_2}{(1+Z_1)}}} - 1$$

Et ainsi de suite…

A l'étape N, on calcule le taux zéro-coupon de maturité N Ans en réinjectant les N-1 taux zéro-coupon précédemment calculés dans la formule de pricing zéro-coupon de l'obligation de maturité N Ans :

$$100 = \sum_{i=1}^{N} \frac{C_N}{(1+Z_i)^i} + \frac{100+C_N}{(1+Z_N)^N} \qquad \Longrightarrow \qquad Z_N = \left[\frac{100+C_N}{100 - \sum_{i=1}^{N} \frac{C_N}{(1+Z_i)^i}}\right]^{1/N} - 1$$

Cette procédure peut être facilement écrite sous forme matricielle.

Notons $\rho_n = \frac{1}{(1+Z_n)^n}$ le facteur d'actualisation pour la maturité n correspondant au taux zéro-coupon $\mathrm{Z_n}$. Les N équations de pricing correspondants aux obligations « au pair » de maturité n=1…N peuvent êtres écrites sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 100 = & (1+C_1) \times \rho_1 \\ 100 = & C_2 \times \rho_1 + (1+C_2) \times \rho_2 \\ & \ldots \\ 100 = & C_N \times \rho_1 + C_N \times \rho_2 + (1+C_N) \times \rho_N \end{cases}$$

On a donc un système de N équations à N inconnues que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$M \times \rho = 100 \times 1_N$$

La matrice M étant inversible (car triangulaire), on a donc :

$$\rho = 100 \times M^{-1} \times 1_N$$

On obtient finalement les taux zéro-coupon $\mathrm{Z_n}$ (n=1…N) cherchés par la formule :

$$Z_n = \frac{1}{(\rho_n)^{1/n} - 1}$$

<u>A titre d'exemple</u>, considérons les taux au pair ainsi que les taux zéro-coupon correspondants donnés par le tableau 3.2.

Maturité	1A	2A	3A	4A	5A
Taux au Pair (%)	2.000	2.500	2.980	3.430	3.850
Taux ZC (%)	2.000	2.506	2.994	3.466	3.922

TAB. 3.2 – Exemple - Taux au Pair

La formule générique de calcul des facteurs d'actualisation à partir des taux au pair :

$$\rho = 100 \times M^{-1} \times 1_N$$

s'écrit dans sa forme développée et dans ce cas particulier :

$$\begin{bmatrix} 0.98039 \\ 0.95170 \\ 0.91529 \\ 0.87259 \\ 0.82502 \end{bmatrix} = 100 \times \begin{bmatrix} 102 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.5 & 102.5 & 0 & 0 & 0 \\ 2.98 & 2.98 & 102.98 & 0 & 0 \\ 3.43 & 3.43 & 3.43 & 103.43 & 0 \\ 3.85 & 3.85 & 3.85 & 3.85 & 103.85 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à calculer les taux zéro-coupon correspondants, par exemple :

$$3.922\% = \frac{1}{(0.82502)^{1/5} - 1}$$

pour le taux 5A.

Ce qui termine l'exemple numérique.

Remarquons que les taux « au pair » peuvent s'interpréter comme des moyennes au sens de l'actualisation des taux zéro-coupon. On en déduit les propriétés triviales suivantes :

- Lorsque la courbe des taux est croissante, les taux zéro-coupon sont plus élevés que les taux au pair de mêmes maturités et l'écart croît avec la maturité
- Lorsque la courbe des taux est décroissante, les taux zéro-coupon sont moins élevés que les taux au pair de mêmes maturités et l'écart croît avec la maturité

En dehors de ces deux cas spécifiques, on ne peut rien dire de particulier.

3.2.2.2 Cas général

Dans le cas général[14], l'échantillon de titres obligataires a les propriétés suivantes :

1. Les échéanciers de cashflows sont disjoints (les dates de maturités des titres et donc des cashflows ne sont plus des multiples entiers d'années)
2. Il y a moins de titres que de dates de coupon (dans le cas des titres émis au pair, il y a N titres et N dates de coupon)

Plaçons-nous en cours de calcul et supposons que les taux zéro-coupon Z_1 et Z_2 ont déjà été calculé. On va maintenant calculer le taux zéro-coupon $\hat{Z}_3$ dont la date de maturité correspond à la date de maturité de l'obligation suivante de l'échantillon (f_3).

Cette situation est décrite par le Graphique 3.3 ci-dessous.

14. Valérie Devers (1996), Documentation financière pour les courbes de taux, Département Analyse - Arbitrage, Informatique Front Office (Banque Internationale de Placement)

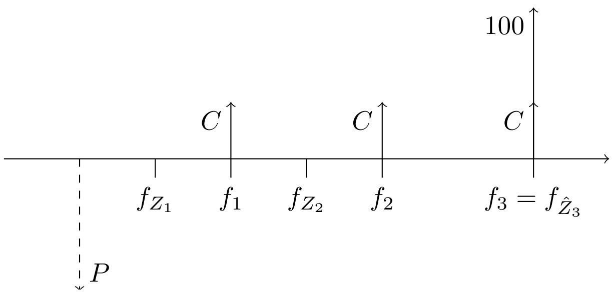

FIG. 3.3 – *Calcul des Taux ZC par la Méthode Directe (Cas Général)*

Le traitement de cette obligation pose deux problèmes :

1. La date du premier coupon f_1 tombe entre deux dates de taux zéro-coupon déjà calculés f_{Z_1} et f_{Z_2}
2. La date du second coupon f_2 tombe entre une date de taux zéro-coupon déjà calculé f_{Z_2} et la date du taux zéro-coupon que l'on cherche précisément à calculer $f_{Z_3} = f_3$

Dans ces deux cas, **on va simplement interpoler linéairement les taux manquants** :

1. Lorsque les taux zéro-coupon adjacents sont déjà calculés, le taux interpolé est calculable directement (cas du premier coupon)
2. Lorsque le taux adjacent est le taux zéro-coupon à calculer (en date de maturité de l'obligation en cours de « traitement ») le taux interpolé n'est pas calculable directement (cas du deuxième coupon)

D'un point de vue formel, notre formule de pricing pour le titre obligataire en cours de traitement s'écrit :

$$P = \frac{C}{(1 + Int\,(Z_1,Z_2))^{f_1}} + \frac{C}{\left(1 + Int\left(Z_2,\hat{Z}_3\right)\right)^{f_2}} + \frac{100 + C}{\left(1 + \hat{Z}_3\right)^{f_3}}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{rl} Int\,(Z_1,Z_2) = & \frac{(f_1 - f_{Z_1})\times Z_2 + (f_{Z_2} - f_1)\times Z_1}{f_{Z_2} - f_{Z_1}} \\ Int\left(Z_2,\hat{Z}_3\right) = & \frac{(f_2 - f_{Z_2})\times \hat{Z}_3 + \left(f_{\hat{Z}_3} - f_2\right)\times Z_2}{f_{\hat{Z}_3} - f_{Z_2}} \end{array} \right.$$

Cette équation n'a pas de solution algébrique et doit être résolue numériquement.

La méthode générale consiste donc à procéder par étape comme dans le cas particulier où les obligations sont « au pair » sans qu'il soit néanmoins possible d'écrire l'ensemble des équations sous forme matricielle.

3.2.3 Méthode Indirecte

La méthode indirecte permet de calculer la courbe des taux zéro-coupon de sorte que les taux zéro-coupon sont définis partout (et non aux seules dates de maturité des titres obligataires) et l'ajustement est global (et non plus local).

Cette méthode développée par Vasicek & Fong[15] consiste essentiellement à :

- Travailler à partir d'un espace vectoriel des fonctions d'actualisation (techniquement il s'agit de fonctions polynomiales par morceaux - ou splines)
- Chercher dans cet espace la fonction d'actualisation qui minimise l'erreur entre les prix observés et les prix théoriques sur les titres de l'échantillon

Le problème étant linéaire par construction, la fonction d'actualisation cherchée sera obtenue par l'estimateur des moindres carrés généralisés (MCG)[16].

A une date donnée, on dispose d'un échantillon homogène de I obligations d'Etat dont on connaît les caractéristiques des flux (montants et dates de versement). L'objectif est d'estimer globalement la courbe des taux zéro-coupon implicitement définie par cet échantillon.

On note :

- $\mathrm{P_i}$: Prix observé de l'obligation i
- $\mathrm{F_{ij}}$: Flux j de l'obligation i
- $\mathrm{f_j}$: Date de versement du j-ième flux
- J : Dernier flux (toutes obligations confondues)
- $\mathrm{Z_t}$: Taux zéro-coupon à la date de maturité t
- ρ_{t} : Facteur d'actualisation associé à $\mathrm{Z_t}$

Le prix théorique de l'obligation i peut s'écrire comme le produit scalaire du vecteur des cashflows de cette obligation avec le vecteur constitué des facteurs d'actualisations correspondants :

$$P_i^* = \sum_{j=1}^{J} F_{ij} \times \rho_{f_j} \qquad avec \qquad \rho_t = \frac{1}{\left(1 + Z_{f_j}\right)^{f_j}}$$

L'introduction de la fonction d'actualisation permet d'exprimer le prix théorique de l'obligation sous la forme d'une combinaison linéaire des cashflows par les coefficients d'actualisation.

On va chercher une approximation de la fonction ρ dans un espace vectoriel de fonctions polynômiales par morceaux. Soit $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_K)$ une base de cet espace, on cherche ρ sous la forme :

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{K} \beta_k \times \rho_k(x) \qquad avec \qquad x = 1 - e^{-\alpha \times f}$$

En introduisant cette expression de ρ dans la formule du prix théorique du titre i, on obtient :

$$P_i^* = \sum_{k=1}^{K} \beta_k \sum_{j=1}^{J} F_{ij} \times \rho_k(x_j) \qquad avec \qquad x_j = 1 - e^{-\alpha \times f_j}$$

Dans cette dernière expression, P_i^* est le prix théorique de l'obligation i et $\mathrm{f_j}$ est la date de versement du j-ème flux toutes obligations confondues ($\mathrm{F_{ij}}$ est nul si l'obligation i ne verse pas de cashflows à la date $\mathrm{f_j}$).

15. O.A. Vasicek & F.G. Fong, « Term structure modeling using exponential splines », The Journal of Finance (May 1982)

16. Le texte qui suit est un résumé du modèle original proposée par Vasicek & Fong. Pour un exposé plus complet incluant des développements plus récents se reporter à l'ouvrage de L. Martellini et J. Priaulet, « Les Produits de Taux d'Intérêt - Méthodes dynamiques d'évaluation et de couverture », Economica (2000)

Le modèle postule que le prix observé du titre i est égal à son prix théorique plus un terme erreur :

$$\boxed{P_i = P_i^* + \epsilon_i \qquad (i = 1...I)}$$

On suppose que les erreurs ε_i sont des v.a. normales d'espérences nulles et sont non corrélées entre elles.

On peut écrire le modèle précédent sous forme matricielle :

$$P = H \times \beta + \varepsilon$$

Avec les notations suivantes :

- P : Vecteur des prix observés (dim[P] = I)
- H : Matrice des coefficients h_{ik} (i=1...I et k=1...K)
- ε : Vecteur des coefficients de régression (dim[ε] = K)

Les coefficients h_{ik} s'écrivent :

$$h_{ik} = \sum_{j=1}^{J} F_{ij} \times \rho_k (x_j) \qquad (i = 1...I \ et \ k = 1...K)$$

On obtient une estimation de β en utilisant l'estimateur des MCG (Moindres Carrés Généralisés) donné par :

$$\hat{\beta} = \left({}^t H W^{-1} H\right)^{-1} H W^{-1} P \qquad avec \qquad W = E\left({}^t \epsilon . \epsilon\right)$$

W est la matrice de variance-covariances des erreurs.

La fonction d'actualisation recherchée et les taux zéro-coupon correspondants s'écrivent donc :

$$\boxed{\hat{\rho}(x) = \sum_{k=1}^{K} \hat{\beta}_k \times \rho_k (x) \qquad et \qquad \hat{Z}_f = \frac{1}{\left[\hat{\rho}(x_f)\right]^{1/f} - 1}}$$

L'estimateur $\hat{\beta}$ a pour propriété fondamentale de minimiser la somme des carrés des erreurs (SCE) :

$$SCE = \sum_{i=1}^{I} \epsilon_i^2 \qquad avec \qquad \epsilon_i = P_i - P_i^*$$

Chaque titre de l'échantillon a donc le même poids dans la SCE.

3.2.4 Méthode Directe vs Indirecte : Comparatif

L'opposition entre ces deux approches est assez révélatrice des différences « culturelles » entre les praticiens de la finance (les professionnels) et les théoriciens de la finance (les universitaires). Les professionnels préfèrent en général l'approche directe du fait de sa relative simplicité computationnelle et de ses bonnes propriétés. Au contraire, les universitaires semblent plus attirés par l'esthétique formelle et la plus grande technicité de l'approche indirecte.

Le tableau 3.3 ci-dessous permet une comparaison synthétique des deux approches.

	Méthode Directe	Méthode Indirecte
Les taux zéro-coupons sont-ils définis partout ?	Non - On procède par interpolation pour calculer les taux manquants	Oui - Les taux zéro-coupon sont définis par une fonction dont les paramètres ont été obtenus par régression linéaire (MCG)
Les prix théoriques et observés sont-ils égaux (pour les obligations de l'échantillon) ?	Oui - Si la même méthode d'interpolation est utilisée dans la procédure de calcul des taux zéro-coupon à partir des obligations couponnées et dans le calcul des taux zéro-coupon manquants	Non - Le processus de régression ne permet pas d'obtenir un ajustement exact mais le meilleur ajustement possible dans l'espace fonctionnel donné
Faut-il faire des hypothèses sur la forme de la courbe des taux ?	Non - Aucune hypothèse sur la forme de la courbe des taux n'est introduite dans le calcul	Oui - Les formes de courbes de taux sont implicitement définies par l'espace fonctionnel dans lequel on cherche le meilleur ajustement
L'ajustement est-il réalisé globalement ?	Non - L'ajustement est réalisé localement de proche en proche des maturités les plus courtes vers les plus longues	Oui - L'ajustement est réalisé globalement par minimisation d'une fonction d'erreur
L'implémentation est-elle difficile ?	Non - L'implémentation est modérément compliquée dans le cas général	Oui - La difficulté est plus grande du fait de la relative complexité du processus d'ajustement

TAB. 3.3 – Comparatif des Méthodes Directe et Indirecte

D'un point de vue opérationnel, l'égalité entre prix théorique et prix observé pour les obligations de l'échantillon est une propriété essentielle pour les opérateurs de marché qui doivent pouvoir justifier les valorisations des positions prises et leurs variations d'un jour sur l'autre. L'introduction d'une erreur non systématique et non interprétable financièrement rend la méthode indirecte difficilement acceptable par ces derniers[17].

17. Cf. F. Leroy (1996), « Courbe des taux théorique et valorisation en spread », Note Interne du Département des Risques, Banque Internationale de Placement

3.3 Relative Value Trading

L'une des applications des taux zéro-coupon est le pricing des obligations d'Etat hors échantillon. Ce pricing est à la base des stratégies de type « relative value » qui consistent à acheter les titres sous-évalués et/ou à vendre les titres sur-évalués contre leurs équivalents-risques dans le courbe. Nous allons, au cours de cette dernière section expliquer le rôle du marché des repos en trading obligataire, décrire les stratégies de « relative value » trading et expliquer comment certains facteurs exogènes peuvent impacter la pertinence des évaluations.

3.3.1 Le Marché des Repos

Un **repurchase agreement** (repo) est une opération de prêt-emprunt de cash entre un prêteur et un emprunteur (du cash) adossée à un emprunt-prêt de titres (mise en pension) pour garantir le prêt-emprunt de cash. Les deux opérations (sur le cash et les titres) sont réalisées et débouclées aux mêmes dates comme illustré par le graphique 3.4.

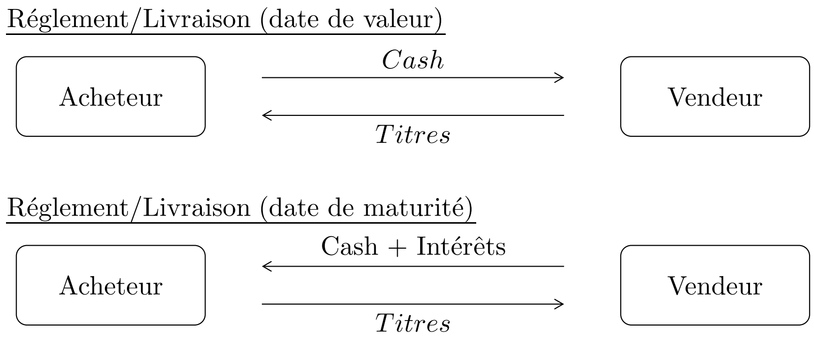

FIG. 3.4 – *Réglement/Livraison d'une Opération de Repo*

Les titres livrés servent à garantir le prêt en cash. La propriété des titres reste au prêteur des titres puisque les titres lui sont rétrocédés en date de maturité du repo (sauf en cas de défaut du prêteur, auquel cas les titres deviennent la propriété de l'emprunteur).

Fondamentalement, le marché du repo permet aux acteurs du marché obligataire :

– L'achat de titres en se finançant à un taux inférieur au taux interbancaire
– La vente à découvert de titres par « emprunt des titres en repo »

Ce dernier point est important car sans marché des repos, il n'est théoriquement pas possible de vendre à découvert une obligation d'Etat.

Les taux de repos négociés entre banques de premières catégories sont égaux aux taux du marché interbancaire moins une prime qui diffère selon les titres livrés :

– **Prime GC (General Collateral)** s'applique à tout les titres d'Etat livrés en garantie (le titre livré importe peu, seul compte le fait qu'il soit émis par l'Etat)
– **Prime « Special »** s'applique à un titre spécifique dont la demande sur le marché du repo excède l'offre (cas de certains titres « chers » dans la courbe qui sont recherchés pour être vendus à découvert)

A titre d'exemple, si le taux du marché interbancaire à 1W est de 3.5% et la prime repo GC de même durée à 20bp alors un titre Etat quelconque (GC) pourra être livré en contrepartie du cash sur la base d'un taux de repo de 3.3%. Si la prime repo de même maturité sur l'OAT

3.25% 25 OCT 2021 est de 50bp alors ce titre pourra être livré en contrepartie du cash sur la base d'un taux de repo de 3%.

Notons enfin que les conventions de taux du marché des repos sont les mêmes que celles du marché interbancaire (cf. Chapitre 2).

3.3.2 Méthodologie et Stratégies

On commence par expliquer la méthodologie de pricing d'une obligation hors échantillon dans une courbe des taux zéro-coupon. Puis on décrit les stratégies de type « relative value » (mis-pricing sur le marché obligataire) et les stratégies de type « repo trades » (mis-pricing sur le marché des repos).

3.3.2.1 Méthodologie de Pricing Zéro-Coupon

On se donne une courbe de taux zéro-coupon calculée à partir d'un échantillon homogène d'obligations « couponnées » en utilisant l'une des deux méthodes présentées à la section 3.2. Considérons maintenant **une obligation quelconque hors échantillon** dont les propriétés[18] autorisent son pricing dans la courbe des taux zéro-coupon précédente.

On calcule le prix théorique P^* de cette obligation en actualisant les flux F_i avec les taux zéro-coupon précédemment calculés :

$$P^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{F_i}{(1+Z_i)^{f_i}} \qquad \Longrightarrow \qquad P^*$$

On en déduit ensuite le taux de rendement actuariel théorique R^*_{act} de cette obligation en « inversant » la relation prix-taux suivante :

$$P^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{F_i}{(1+R^*_{act})^{f_i}} \qquad \Longrightarrow \qquad R^*_{act}$$

On calcule enfin le spread entre le taux actuariel théorique R^*_{act} et le taux actuariel observé R_{act} :

$$Spread = R^*_{act} - R_{act} \qquad \Longrightarrow \qquad Spread$$

On peut de même calculer le taux repo r^* du synthétique zéro-coupon et la prime repo entre le taux repo théorique r^* et le taux repo observé r :

$$Prime = r^* - r \qquad \Longrightarrow \qquad Prime$$

Les stratégies de type « relative value » permettent de jouer un mis-pricing sur le marché obligataire (sur le spread) tandis que les stratégies de type « repo trade » permettent de jouer un mis-pricing sur le marché des repos (sur la prime).

18. Caractéristiques structurelles, liquidité du titre dans le marché et types d'intervenants

3.3.2.2 Relative Value Trading

Supposons que le spread de taux actuariel (Spread) suit un processus aléatoire de type Ornstein-Ulhenbeck de moyenne nulle. La valeur d'équilibre (Spread = 0) est la situation pour laquelle l'obligation est parfaitement pricée dans la courbe des taux zéro-coupon à savoir que le prix observé (resp. taux actuariel observé) est égal au prix théorique (resp. taux actuariel théorique).

Sous cette hypothèse, la comparaison entre les taux actuariels observé et théorique constitue un critère de sur- ou sous-évaluation (pour le titre obligataire considéré sur le marché obligataire) :

$$\begin{cases} Spread > +\epsilon & \Rightarrow Le\, titre\, est\, "cher" \\ Spread < -\epsilon & \Rightarrow Le\, titre\, n'est\, "pas\, cher" \end{cases}$$

ε est le seuil à partir duquel on décide qu'il est opportun de monter la position.

Ce constat peut théoriquement motiver l'achat (si le titre n'est « pas cher ») ou la vente (si le titre est « cher ») du titre obligataire contre son synthétique zéro-coupon (« relative value » trading).

Supposons, pour fixer les idées, que le timing des opérations est le suivant :

- Date t : $\mathrm{Spread}_t = \varepsilon$ (Entrée)
- Date t+Δt : $\mathrm{Spread}_{t+\Delta t} = 0$ (Sortie)

On suppose de plus que l'obligation et son synthétique se négocient au même taux repo r sur la période $[t, t + \triangle t]$.

Les opérations à réaliser aux dates t et t+Δt et les flux correspondants sont décrites dans le tableau 4.4 ci-dessous.

Branches	Marchés	t	t+Δt
Obligation	Cash	Vente de l'obligation au prix P_t	Rachat de l'obligation au prix $P^*_{t+\Delta t}$
	Repo	Emprunt de l'obligation au taux repo $r_{t,t+\triangle t}$	*n.a.*
Synthétique ZC	Cash	Achat du synthétique ZC au prix P^*_t	Rachat du synthétique ZC au prix $P^*_{t+\Delta t}$
	Repo	Prêt du synthétique ZC au taux repo $r_{t,t+\triangle t}$	*n.a.*

TAB. 3.4 – Tableau des Opérations en t et t+Δt

Les flux de trésorerie correspondants aux opérations précédentes pour une taille N de la position (montant nominal) sont donnés dans le tableau 3.5 ci-dessous pour la date t+Δt [19].

19. Le flux de trésorerie total en t est nul car les deux branches de l'opération sont auto-financées.

Branches	Marchés	t+Δt
Obligation	Cash	$-N \times P^*_{t+\Delta t}$
	Repo	$N \times P_t \times (1 + r_{t,t+\triangle t} \times \triangle t)$
Synthétique ZC	Cash	$+N \times P^*_{t+\Delta t}$
	Repo	$-N \times P^*_t \times (1 + r_{t,t+\triangle t} \times \triangle t)$
Total		$-N \times (P_t - P^*_t) \times (1 + r_{t,t+\triangle t} \times \triangle t)$

TAB. 3.5 – Tableau des Flux de Trésorerie en t+Δt

Au final, le P/L ex-ante de la position à l'horizon t+Δt peut être approximé en introduisant la sensibilité actuarielle S^*_t du synthétique ZC :

$$\boxed{P/L_{t,t+\triangle t} \approx N \times S^*_t \times \triangle Spread \times (1 + r_{t,t+\triangle t} \times \triangle t)}$$

Le P/L du montage sur la période $[t, t + \triangle t]$ est connu avec certitude en t du fait que le prix $P^*_{t+\Delta t}$ de l'obligation et de son synthétique ZC en t+Δt n'intervient pas dans la formule précédente. Ce P/L « période » n'est autre que le P/L « intraday » porté au taux repo $r_{t,t+\triangle t}$ sur la période $[t, t + \triangle t]$ avec :

$$P/L^{intraday}_t \approx N \times S^*_t \times \triangle Spread$$

On constate que le P/L « intraday » est directement proportionnel non seulement à la taille de la position mais aussi à la sensibilité de la position (levier) ainsi qu'à la variation du spread de taux[20].

On notera cependant que dans le monde réel, il n'est pas possible de prévoir a priori à quel horizon le spread reviendra sur sa valeur d'équilibre. On est donc obligé de financer ce type de position (l'obligation et son synthétique) par des repos à très court terme que l'on roule lorsqu'ils arrivent à échéance (ce qui introduit un risque de refinancement).

Les stratégies de type « relative value » sont essentiellement des stratégies de trading sur spread de taux.

3.3.2.3 Repo Trades

On suppose ici que le spread entre l'obligation et son synthétique zéro-coupon est nul à tout instant de sorte que l'obligation est toujours parfaitement pricée dans la courbe des taux zéro-coupons.

Supposons de plus que l'écart entre le taux repo r de l'obligations et le taux repo r^* de son synthétique zéro-coupon est non nul. Sous cette hypothèse, la comparaison entre les taux repo observé et théorique constitue un critère de sur- ou sous-évaluation (pour le titre obligataire considéré sur le marché des repos) :

$$\begin{cases} r^* - r > +\epsilon & \Rightarrow Le\, titre\, est\, \text{"}cher\, en\, repo\text{"} \\ r^* - r < -\epsilon & \Rightarrow Le\, titre\, n'est\, \text{"}pas\, cher\, en\, repo\text{"} \end{cases}$$

ε est le seuil à partir duquel on décide qu'il est opportun de monter la position.

20. ΔSpread = ε

Ce constat peut théoriquement motiver l'emprunt du titre en repo (et sa vente en cash) ou le prêt du titre en repo (et son achat en cash) contre son synthétique zéro-coupon (« repo trade »).

Supposons, pour fixer les idées, que les taux sur le marché des repos sur la période $[t, t + \triangle t]$ sont les suivants :

- Taux repo obligataire : r
- Taux repo synthétique : $r^* = r - prime$ $(prime > 0)$

Le titre obligataire n'est donc pas cher en repo.

Les opérations à réaliser aux dates t et t+Δt et les flux correspondants sont décrites dans le tableau 3.6 ci-dessous.

Branches	Marchés	t	t+Δt
Obligation	Cash	Vente de l'obligation au prix P_t^*	Rachat de l'obligation au prix $P_{t+\Delta t}^*$
	Repo	Emprunt de l'obligation au taux repo $r_{t,t+\triangle t}^* + prime$	*n.a.*
Synthétique ZC	Cash	Achat du synthétique ZC au prix P_t^*	Rachat du synthétique ZC au prix $P_{t+\Delta t}^*$
	Repo	Prêt du synthétique ZC au taux repo $r_{t,t+\triangle t}^*$	*n.a.*

TAB. 3.6 – Tableau des Opérations en t et t+Δt

Les flux de trésorerie correspondants aux opérations précédentes pour une taille N de la position (montant nominal) sont donnés dans le tableau 3.7 ci-dessous pour la date t+Δt.

Branches	Marchés	t+Δt
Obligation	Cash	$-N \times P_{t+\Delta t}^*$
	Repo	$N \times P_t^* \times \left(1 + \left(r_{t,t+\triangle t}^* + prime\right) \times \triangle t\right)$
Synthétique ZC	Cash	$+N \times P_{t+\Delta t}^*$
	Repo	$-N \times P_t^* \times \left(1 + r_{t,t+\triangle t}^* \times \triangle t\right)$
Total		$N \times P_t^* \times prime \times \triangle t$

TAB. 3.7 – Tableau des Flux de Trésorerie en t+Δt

Au final, le P/L ex-ante de la position à l'horizon t+Δt est connu avec certitude en t et s'écrit simplement :

$$\boxed{P/L_{t,t+\triangle t} = N \times P_t^* \times prime \times \triangle t}$$

On constate que le P/L est directement proportionnel non seulement à la taille de la position mais aussi à la prime repo (en t) ainsi qu'à la durée de portage de la position.

Les stratégies de type « repo trade » sont de fait essentiellement des stratégies de portage.

3.3.3 Facteurs Exogènes et Limitations

Dans la présentation des méthodes directes et indirectes de calcul des taux zéro-coupon à la section 3.2, on a fait l'hypothèse que l'échantillon de titres obligataires utilisé devait être « homogène ». Dans la pratique, le choix est souvent délicat car les titres obligataires se différencient souvent des uns des autres sur différents critères.

Les principaux critères différenciants sur le marché obligataire sont discutés dans le tableau 3.8 ci-dessous.

	Commentaires
Liquidité	La liquidité des titres dans la courbe est un facteur discriminant puisque les titres moins liquides sont par nature sujets à des mis-pricing au moins temporaires
Fiscalité	Le gap de fiscalité entre les coupons (revenus) et le principal (plus-value) est une source de distortion entre les titres à faibles coupons versus les titres à coupons élevés (de même maturité). Ces derniers sont très recherchés par les investisseurs institutionnels pour être conservés jusqu'à échéance dans leurs bilans et peuvent aussi souffrir d'une très faible liquidité dans le marché
Benchmark	Les titres récemment émis sur les maturités 2A, 5A, 10A et 30A sont généralement les plus liquides et deviennent de facto des références (benchmarks) pour les autres titres dans la courbe. Les anciennes benchmarks (« off-the-run ») se traitent généralement avec une prime négative par rapport aux nouvelles (« on-the-run »)
Livrables	Les titres livrables contre un contrat Futures sur Obligations d'Etat (cf. Chapitre 7) bénéficient aussi d'un statut spécifique. Le titre le moins-cher-à-livrer (CTD) en particulier se traite usuellement avec une prime positive et peut même faire l'objet de « squeezes » temporaires
Repo	Les titres chers dans la courbe (« Special ») sont souvent chers en repo d'où la nécessité de mettre en cohérence les obligations de l'échantillon à repo flat (« GC »)

TAB. 3.8 – Facteurs Exogènes (Hors Modèle)

On peut être ainsi amené à construire non pas une courbe des taux zéro-coupon pour un émetteur donné (Etat) mais plusieurs courbes des taux zéro-coupon corresponds à des sous-ensembles homogènes des titres obligataires.

On pourra, par exemple distinguer :

- « On-the-run » Treasury bonds : Titres récemment émis qui sont (encore) activement traités sur le marché secondaire et par les banques chargées de placer le papier au près des investisseurs institutionnels (Ex : Spécialistes en Valeurs du Trésor en France et Primary Dealers aux US) et sont les (nouvelles) benchmarks sur les maturités phares (2A, 5A, 10A et 30A)
- « Off-the-run » Treasury bonds : Anciennes émissions qui ne sont plus activement traitées sur le marché secondaire et dont une part importante de l'encours est bloqué jusqu'à échéance dans les actifs des investisseurs institionnels (en particulier les assureurs

vie qui utilisent les obligations d'Etat pour couvrir leurs engagement à long terme au passif)

Le même problème se pose évidemment aussi pour le **pricing des obligations hors échantillon** puisque l'analyse présentée à la sous-section 3.3.2 suppose que le titre obligataire est en tout points cohérent avec les obligations choisies pour la construction de la courbe des taux zéro-coupons. Le pricing zéro-coupon d'une obligation hors échantillon n'est donc pas uniquement un problème quantitatif mais requiert de la part du trader ou du gérant de l'expérience et du jugement pour prendre en compte les facteurs qualitatifs hors modèle.

Enfin, les stratégies présentées dans dans les sous-paragraphes 3.3.2.2 et 3.3.2.3 ne sont pas directement utilisables car **les titres zéro-coupon Etats n'existent pas dans le marché** (ce qui interdit la construction de synthétiques zéro-coupon). En pratique, comme nous le verrons au Chapitre 4, on va arbitrer le titre considéré (bullet) contre un synthétique actuariel (barbell). Le passage d'une couverture zéro-coupon à une couverture actuarielle n'est sependant pas neutre en terme de risques. Si dans le cas d'un synthétique zéro-coupon, la couverture est parfaite par construction, ce n'est plus le cas avec un barbell (couverture actuarielle).