Chapitre 9

CDS vs Asset-Swap Arbitrage

Les Credit Default Swap (CDS) sont des dérivés de crédit permettant de se couvrir contre le risque de défaut sur une contrepartie obligataire donnée. Avant d'introduire précisément les CDS, on commence par introduire le concept de probabilité de défaut ainsi que les principales approches permettant de les estimer (credit scoring, probabilités historiques, probabilités implicites, méthodes structurelles). La méthode implicite ou de Jarrow-Turnbull qui repose sur un raisonnement d'arbitrage sur le marché de la dette corporate est introduite par un exemple simple avant d'être développée dans le cas usuel d'un échantillon d'obligations corporate couponnées. Cette méthode permet d'extraire les probabilités de défaut à partir des spreads de crédit pour un taux de recouvrement (anticipé) donné. Les dérivés de crédit les plus connus et les plus utilisés sont les CDS. Après avoir décrit les principales caractéristiques des contrats, on explique ensuite comment pricer un CDS (à l'aide des probabilités de défaut précédemment calculées) et comment valoriser une position en cours de vie. On termine par une étude de l'arbitrage entre un CDS et un Asset-Swap (de mêmes caractéristiques). Nous montrons que la différence entre la prime du CDS et le spread d'asset-swap (base) est, sous certaines hypothèses non-standards sur la structure du CDS, égal à moins le spread swap-Etat équivalent. Dans le cas standard, nous montrons que les deux facteurs à considérer dans le pricing de la base sont la qualité du crédit de l'émetteur sous-jacent (CDS et Asset-Swap) et la surcote ou décote de l'obligation sous-jacente par rapport au pair.

9.1 Risque et Probabilité de Défaut

La structure par terme des probabilités de défaut pour un émetteur donné est un élément fondamental pour le pricing des produits dérivés de crédit sur cet émetteur. L'objectif de cette première section est d'introduire le concept de probabilité de défaut ainsi que les principales approches permettant de les calculer. Nous présentons ensuite la méthode de Jarrow-Turnbull qui est à la fois (relativement) simple à mettre en œuvre et permet le calcul de probabilités implicites de défaut (cette méthode repose sur un raisonnement d'arbitrage sur le marché de la dette corporate).

9.1.1 Analyse Economique du Risque de Défaut

Le défaut de paiement est le principal évènement de crédit parmi ceux usuellement pris en compte dans les contrats de type « dérivés de crédit ». Par définition, on appelle défaut de paiement, l'incapacité d'un débiteur (typiquement une entreprise ou un Etat) à honorer ses engagements vis-à-vis de son créancier (typiquement une banque commerciale). Ces engagements portent sur le paiement des intérêts et du principal selon l'échancier prévu dans le contrat de prêt signé initialement entre les deux parties.

9.1.1.1 Cas d'une Entreprise Industrielle ou Commerciale

Un critère sur les flux (liquidité) est-il à privilégier pour caractériser le défaut (et par extension le risque de défaut) comme le suggère la définition précédente ou faut-il au contraire utiliser un critère sur le stock (solvabilité) ?

La réponse à cette question dépend du lien de causalité entre le :

- Risque de défaut
- Risque de liquidité
- Risque de solvabilité

Le risque de liquidité est dans la plupart des cas géré de façon proactive par le créancier (la banque) et le débiteur (l'entreprise) dans le cadre d'une communication régulière entre les deux parties qui permet au banquier d'être informé de la plus ou moins bonne santé financière de l'entreprise et plus important encore du caractère pérenne ou non de l'activité :

- Si l'entreprise connait des difficultés ponctuelles, le banquier n'ayant aucun intérêt (sur le plan commercial) à ne pas soutenir son client, le défaut de paiement est évité proactivement via l'octroi d'un prêt à court terme
- Si l'entreprise connait des difficultés structurelles[1] (elle est donc non solvable), le banquier a au contraire tout intérêt à laisser l'entreprise faire défaut pour rentrer dans une phase de restructuration (vente d'actifs et/ou augmentation de capital) ou de liquidation (faire valoir son droit sur les actifs de la société)

On a donc la situation suivante :

$$\boxed{\text{Risque de Solvabilité} \rightarrow \text{Risque de Liquidité} \rightarrow \text{Risque de Défaut}}$$

Le critère à prendre en compte pour évaluer le risque de défaut est donc le critère de solvabilité qui n'est autre que le critère utilisé par le créancier pour décider si il soutient ou non l'entreprise en cas de problèmes de liquidité.

Une entreprise est dite solvable (resp. insolvable) si la valeur de sa dette est inférieure (resp. supérieure) à la valeur de ses actifs[2].

$$\textit{Critère de Solvabilité} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{V_{Actifs} - V_{Dette}}_{\textit{Fonds Propres Economiques}} \quad \gg 0$$

Sans rentrer dans des considérations de « méthodologie comptable », ce critère de solvabilité est souvent difficile à appréhender en pratique du fait que le bilan comptable d'une entreprise ne reflète en général pas (ou mal) le vrai bilan économique (100% mark-to-market) qui lui n'est pas calculable en raison de l'incomplétude et de l'inefficience des marchés. Cette difficulté qui n'est pas que théorique constitue d'ailleurs une ligne de fracture entre la « finance de marchés » et la « finance d'entreprise » :

- Point de vue « finance de marchés » : Les marchés financiers sont efficients par construction et la capitalisation boursière[3] d'une société constitue un estimateur non biaisé de ses fonds propres économiques

1. Le banquier considère que le business plan n'est plus viable du fait de changements majeurs invalidants certaines hypothèses de façon durable ou que l'équipe dirigeante est manifestement dans l'incapacité de le mettre en oeuvre

2. C'est le critère usuel notamment utilisé dans le cadre du modèle de Merton que nous présenterons au Chapitre 10

3. Capitalisation Boursière = Nombre d'Actions × Cours de l'Action

– Point de vue « finance d'entreprise » : Les fonds propres économiques peuvent êtres estimés via quelques retraitements à partir des données comptables brutes. En conséquence le ratio « Capitalisation Boursière / Fonds Propres Economiques » (price-to-book) est un bon indicateur de la sur- ou sous-valorisation d'une société en bourse [4]

9.1.1.2 Cas d'un Etat

Le ratio « Dettes sur PIB » est couramment utilisé par les économistes et les politiques pour juger de la solvabilité des Etats. Cette utilisation du ratio « Dettes sur PIB » est cependant critiquable pour deux raisons principales :

– D'une part, ce qui garanti le paiement des intérêts d'une dette contractée sur plusieurs années (la duration de la dette de l'Etat Français est par exemple de 7 ans environ) n'est pas le PIB de l'année en cours mais la croissance du PIB sur la période correspondante
– D'autre part, ce n'est pas exactement le PIB (revenus de l'ensemble des agents économiques) d'un pays donné qu'il faut prendre en compte mais la fraction du PIB que constituent les impôts et taxes prélevées sur l'activité qui constituent les recettes de l'Etat

Ces remarques sont importantes car elles contiennent en elles-mêmes l'esquisse d'un critère de solvabilité d'un Etat (similaire au critère de solvabilité d'une entreprise) en prenant pour valeur des actifs la valeur actuelle ajustée du risque du flux des recettes futures de l'Etat [5] :

$$Critère\ d'insolvabilité\ (Etat) \qquad \Rightarrow \qquad {}^{V_{Actifs}}/_{V_{Dette}} < 1$$

Il existe cependant trois différences importantes entre une entreprise et un Etat :

– Le droit applicable qui détermine le périmètre des actifs à prendre en compte est uniquement le droit de propriété pour une entreprise. Pour un Etat, le droit de propriété s'applique pour les actifs qu'il possède en propre et le droit régalien de lever l'impôt s'applique sur les autres actifs
– En cas de difficulté un Etat fait généralement l'objet d'une restructuration (on parle de réformes structurelles) tandis qu'une entreprise peut être soit restructuré soit liquidé si il n'y a pas d'accord entre les créanciers et les actionnaires et pas de repreneurs
– Le concept de fonds propres n'a pas de sens pour un Etat qui peut donc parfaitement rester solvable avec un ratio de solvabilité égal à 1

Précisons enfin qu'un Etat qui disposerait (encore) de sa souveraineté monétaire et de la capacité à imposer sa monnaie à des pays tiers (comme monnaie de transaction et de réserve) peut rester solvable avec un ratio de solvabilité inférieur à 1 [6].

Nous terminons ici ces considérations économiques sur le risque de défaut pour nous concentrer sur sa modélisation et son calcul.

---

4. Certains médias n'hésitent pas à comparer une partie de l'actif d'une société à sa capitalisation boursière. J'ai ainsi pu entendre le 25 mai 2012 un journaliste (sur une radio pourtant spécialisée « économie & marchés ») avancer de façon péremptoire le sophisme « Air France vaut 1 Milliard d'Euros en bourse, l'équivalent de 8 ou 9 avions alors qu'ils en ont 200 » pour soutenir la thèse d'une sous-valorisation manifeste du cours de bourse d'Air France

5. Notons que sous certaine hypothèses et en raisonnant en taux de capitalisation, on retrouve un critère de solvabilité classique qui veut qu'un Etat devient insolvable dés lors que le taux d'intérêt moyen de sa dette est supérieur au taux croissance moyen du PIB (modèle de Domar)

6. « Le dollar est notre monnaie mais c'est votre problème », John Connally (Sécrétaire d'Etat au Trésor US) en 1972

9.1.2 Généralités sur le Calcul des Probabilités de Défaut

Nous allons dans ce paragraphe introduire les différentes méthodes de calcul des probabilités de défaut et donner un modèle simple permettant de comprendre le lien entre la probabilité de défaut, le taux de recouvrement anticipé et le spread de crédit (méthode des probabilités implicites).

Plusieurs méthodes ont été développé pour estimer ces « probabilités » de défaut [7] :

- Credit scoring : C'est la technique couramment utilisée par les analystes crédit pour évaluer la solvabilité d'un émetteur donné. Cette technique consiste à construire une fonction, appelée Z ou fonction score, dont les inputs sont les ratios financiers courants de l'émetteur et l'output est un niveau de solvabilité (score). A la fois complexe (collecte et traitement des données), empirique (construction d'une fonction d'agrégation « ad hoc ») et biaisée (non prise en compte de l'environnement de l'émetteur et des informations prospectives), cette approche n'est généralement pas utilisée pour l'estimation des probabilités de défaut utilisées en finance de marchés
- Probabilités historiques : Les agences de notation (Standard & Poors et Moody's principalement), historisent les incidents de crédits (défaut) et calculent les taux de défaut constatés pour une période (année), dans une zone géographique (pays) et un secteur d'activité donnés. Ces informations permettent de calculer des probabilités historiques de défaut et de valider ou d'invalider a posteriori les ratings des agences. L'utilisation de ces probabilités est néanmoins problématique puisqu'elles concernent au mieux un secteur d'activité et qu'elles sont par nature non prospectives
- Méthodes structurelles : L'approche dite structurelle [8] est basée sur le modèle de Merton qui permet de calculer des probabilités de défaut « spot » à partir de la valeur des actifs et de la structure du passif (ratio d'endettement) de la société émettrice. Les deux inputs non observables que sont la valeur et la volatilité des actifs sont généralement déduits à partir de la valeur et la volatilité des actions de l'émetteur (lorsque ce dernier est coté en bourse). Les deux implémentations les plus connues, issues de l'industrie, sont les modèles KMV (modèle propriétaire de la société éponyme KMV) et RiskGrade (modèle développé par la société RiskMetrics dont le descriptif technique est en libre accès)
- Probabilités implicites : Cette dernière approche a été développée par R. Jarrow & S. Turnbull (1995). Cette méthode permet de calculer la structure par terme des probabilités de défaut pour un émetteur donné à partir des taux zéro-coupon (Emetteur), des taux zéro-coupon sans risque (Etat) et du taux de recouvrement en cas de défaut (Emetteur). Notons que cette approche ne s'applique que pour les sociétés qui émettent sur les principales échéances et dont les titres sont négociables sur un marché secondaire liquide. Ce qui exclus un grand nombre de sociétés privées mais concerne de nombreux grands groupes internationaux

Avant de rentrer dans les détails formels du modèle et afin de fixer les idées, terminons ce paragraphe par un exemple simple de calcul de probabilité de défaut [9].

Dans un univers neutre au risque, on suppose que l'investisseur est indifférent entre les deux choix suivants :

1. Zéro-coupon sans risque
2. Zéro-coupon risqué

7. Cf. Caouette J.B., Altman E.I. & Narayanan P. (1998), « Managing Credit Risk: The Next great Financial Challenge », John Wiley & Sons, Inc.
8. Cf. Chapitre 10
9. Cf. Marteau D. & Dehache D. (2001), « Les Produits Dérivés de Crédit », Editions ESKA

avec :

$$Z\acute{e}ro - coupon\; sans\; risque \Leftrightarrow Recevoir\; e^r\; avec\; la\; proba\; 1$$

et

$$Z\acute{e}ro - coupon\; risqu\acute{e} \Leftrightarrow \begin{cases} Recevoir & e^{r+s}\; avec\; la\; proba\; 1-p \\ Recevoir & R \times e^r\; avec\; la\; proba\; p\; (d\acute{e}faut) \end{cases}$$

Avec les notations suivantes :

- r : taux ZC sans risque 1A (continu)
- s : spread ZC par rapport au taux sans risque (continu)
- R : taux de recouvrement en cas de défaut
- p : probabilité risque-neutre de faire défaut sur la période (1A)

Compte-tenu des hypothèses et par définition d'une probabilité neutre au risque, l'investisseur doit être indifférent entre recevoir le P/L de l'investissement sans risque ou l'espérance mathématique du P/L correspondant à l'investissement risqué calculée sous la probabilité neutre au risque.

Formellement, on doit donc avoir :

$$P/L_1 = E\{P/L_2\}$$

soit :

$$e^r - 1 = \left[(1-p) \times e^{r+s} + p \times R \times e^r\right] - 1$$

En éliminant e^r et en effectuant un développement limité de e^s autour de 0, on trouve[10] :

$$\boxed{p \simeq \frac{s}{1-R}}$$

On constate que la probabilité de défaut est à la fois homogène et supérieure ou égale au spread de crédit. L'égalité stricte entre le spread de crédit et la probabilité de défaut a lieu lorsque le taux de recouvrement est nul[11].

Dans la pratique, nous allons calculer non pas une probabilité unique de défaut mais une structure par terme des probabilités de défaut forward risque-neutre en utilisant l'algorithme de Jarrow-Turnbull.

9.1.3 Méthode de Jarrow-Turnbull

La structure par terme des probabilités de défaut de l'émetteur X est l'élément fondamental pour le pricing des CDS sur cet émetteur. Dans ce paragraphe, nous allons décrire la méthode dite des probabilités « implicites » développée par R. Jarrow et S. Turnbull[12].

Cette méthode permet de calculer la structure par terme des probabilités de défaut pour un émetteur donné à partir des seules informations suivantes :

- Courbe de taux zéro-coupon de l'émetteur X

10. e^s ~1+s pour s petit

11. Pour fixer les idées, un spread de crédit de 100bp correspond donc à une probabilité de défaut de 2% si le taux de recouvrement est de 50% et de 1% si il est nul

12. Cf. Jarrow R. & Turnbull S. (1995), Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk, The Journal of Finance, Vol. 50, No. 1

- Courbe de taux zéro-coupon sans risque (Etat)
- Taux de recouvrement[13] anticipé en cas de défaut de l'émetteur X

L'approche consiste à pricer un zéro-coupon risqué de maturité j correspondant à j périodes élémentaires. Les états futurs possibles de l'émetteur X, à savoir défaut (D) ou pas ($\neg D$), peuvent être représentés sous la forme d'un arbre binaire (cf. Graphique 9.1).

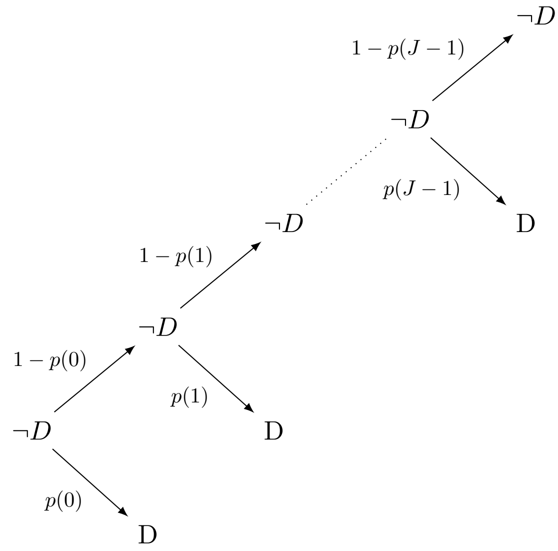

FIG. 9.1 – *Arbre Binaire des Etats Futurs de l'Emetteur*

On suppose qu'en cas de défaut de l'entité X constaté à l'une des dates t_j (j=1…J), le détenteur de ce zéro-coupon risqué reçoit le taux de recouvrement R (0 < R < 1) en date de maturité du zéro-coupon. Dans le cas contraire, il reçoit 1 Euro. L'application du principe général de valorisation des instruments financiers en situation d'incertitude à ce zéro-coupon risqué permet d'écrire :

$$\boxed{V_j = \rho_j^{Etat} \times E_0^{\mathbb{Q}} \{\tilde{e}_j | \neg D\}}$$

avec les notations suivantes :

- ρ_j^{Etat}: Facteur d'actualisation spot pour la maturité t_j correspondant au taux zéro-coupon sans risque (Etat)
- $E_0^{\mathbb{Q}}\{.\}$: Espérance mathématique sous la probabilité risque-neutre Q à la date 0
- $\tilde{e}_j$: Payoff du zéro-coupon « risqué » en t_j

On note de plus p(j) la probabilité risque-neutre de faire défaut entre t=j et t=j+1 sachant que l'on n'était pas dans l'état de défaut en t=j (probabilité forward).

Il ne reste plus qu'à appliquer la formule précédente aux zéro-coupon risqués de maturités successives correspondants aux dates t_j (j=1…J).

<u>Cas j=1 (Zéro-coupon de maturité t_1)</u>

$$V_1 = \rho_1^{Etat} \times E_0^{\mathbb{Q}} \{\tilde{e}_1 | \neg D\}$$

13. Le taux de recouvrement anticipé est la seule variable non observable. Il est d'usage de l'estimer à partir des taux de recouvrement constatés historiquement sur des « comparables » de l'émetteur considéré

avec

$$E_0^{\mathbb{Q}}\left\{\tilde{e}_1|\neg D\right\} = \left[1 - p\left(0\right)\right] \times 1 + p\left(0\right) \times R$$

Par conséquent[14] :

$$p\left(0\right) = \frac{1 - \frac{V_1}{\rho_1^{Etat}}}{1 - R}$$

<u>Cas j=2 (Zéro-coupon de maturité t_2)</u>

$$V_2 = \rho_2^{Etat} \times E_0^{\mathbb{Q}}\left\{\tilde{e}_2|\neg D\right\}$$

avec

$$\begin{aligned} E_0^{\mathbb{Q}}\left\{\tilde{e}_2|\neg D\right\} &= \left[1 - p\left(0\right)\right] \times E_1^{\mathbb{Q}}\left\{\tilde{e}_2|\neg D\right\} + p\left(0\right) \times R \\ &= \left[1 - p\left(0\right)\right] \times \left[\left[1 - p\left(1\right)\right] \times 1 + p\left(1\right) \times R\right] + p\left(0\right) \times R \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$p\left(1\right) = \frac{1 - \frac{\frac{V_2}{\rho_1^{Etat}} - p(0) \times R}{1 - p(0)}}{1 - R}$$

On procède ainsi jusqu'à l'étape J pour calculer l'ensemble des probabilités de défaut forward p(j) pour j=0. . . J-1.

<u>Cas Général (Zéro-coupon de maturité t_j)</u>

$$V_j = \rho_j^{Etat} \times E_0^{\mathbb{Q}}\left\{\tilde{e}_j|\neg D\right\}$$

avec

$$\begin{aligned} E_0^{\mathbb{Q}}\left\{\tilde{e}_j|\neg D\right\} &= \left[1 - p\left(0\right)\right] \times E_1^{\mathbb{Q}}\left\{\tilde{e}_j|\neg D\right\} + p\left(0\right) \times R \\ &= \left[1 - p\left(0\right)\right] \times \Big[\left[1 - p\left(1\right)\right] \times E_2^{\mathbb{Q}}\left\{\tilde{e}_j|F\right\} + p\left(1\right) \times R\Big] + p\left(0\right) \times R \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut finalement écrire :

$$\boxed{p\left(j\right) = \frac{1 - \beta\left(j\right)}{1 - R} \qquad avec \qquad \beta\left(j\right) = \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{V_j}{\rho_j^{Etat}} - p(0) \times R}{1 - p(0)} - p(1) \times R}{1 - p(1)} - \ldots}{\ldots} - p\left(j\right) \times R}{1 - p\left(j\right)}}$$

On constate qu'il n'y a pas de formule de récurrence simple permettant de calculer p(j) à partir de p(j-1) par exemple.

Ecrivons β(0) et β(1) pour s'en convaincre, on a :

14. On retrouve dans ce cas la formule donnée au paragraphe 9.1.2 après avoir introduit les taux des zéro-coupons Etat et X dans la formule

$$\beta(0) = \frac{V_1}{\rho_1^{Etat}} \qquad et \qquad \beta(1) = \frac{\frac{V_2}{\rho_2^{Etat}} - p(0) \times R}{1 - p(0)} \neq \frac{\beta(0) - p(0) \times R}{1 - p(0)}$$

Le calcul des probabilités de défaut peut néanmoins être réalisé sur un tableur sans même recourir à l'écriture de macros.

Une façon de procéder consiste à calculer de façon simultanée :

- La matrice des $\hat{\beta}_i(j)$ avec 0≤j≤J-1 et 1≤i≤J
- Les probabilités de défaut p(j) avec 0≤j≤J-1

avec

$$\begin{cases} \hat{\beta}_i(j+1) & = \frac{\hat{\beta}_i(j) - p(j) \times R}{1 - p(j)} \qquad (0 \leq j \leq J-1 \; et \; 1 \leq i \leq J) \\ \hat{\beta}_i(0) & = \frac{V_i}{\rho_i^{Etat}} \qquad (1 \leq i \leq J) \end{cases}$$

et

$$\beta(j) = \hat{\beta}_{j+1}(j) \qquad avec \qquad 0 \leq j \leq J-1$$

A titre d'exemple, calculons les probabilités de défauts forwards risque-neutres pour un émetteur corporate fictif X. Les courbes de taux zéro-coupon Etat et X sont données dans le tableau 9.1 ci-dessous[15].

Y	Taux Etat (%)	Taux X (%)
1	2.000	3.000
2	2.506	3.611
3	2.994	4.208
4	3.466	4.794
5	3.922	5.372
6	4.363	5.944
7	4.791	6.512
8	5.205	7.080
9	5.605	7.648
10	4.991	8.222

TAB. 9.1 – Taux Zéro-Coupon Etat et X (Exemple)

On complète ces deux courbes par des taux repo 3M de 1.5% (pour l'Etat) et 2.4% (pour l'émetteur X) et se donne un taux de recouvrement R de 40%.

Le détail des calculs pour les probabilités p(0) et p(1) est donné ci-dessous :

15. Pour info, il s'agit de taux actuariels obtenus à partir de taux au pair en utilisant la méthode du bootstrap

$$\beta(0) = \frac{V_1}{\rho_1^{Etat}} = \frac{(1+2.4\%)^{-0.25}}{(1+1.5\%)^{-0.25}} = \frac{0.99408841}{0.99638477} = 0.99779546$$
$$p(0) = \frac{1-\beta(0)}{1-R} = \frac{1-0.99779546}{1-0.4} = 0.3674\%$$

et

$$\beta(1) = \frac{\frac{V_2}{\rho_2^{Etat}} - p(0)\times R}{1-p(0)} = \frac{\frac{(1+2.600\%)^{-0.5}}{(1+1.667\%)^{-0.5}} - 0.3674\% \times 0.4}{1-0.3674\%} = 0.99763706$$
$$p(1) = \frac{1-\beta(1)}{1-R} = \frac{1-0.99763706}{1-0.4} = 0.3938\%$$

Le tableau 9.2 ci-dessous donne les probabilités de défaut risque-neutre forwards trimestrielles (sur 40 trimestres consécutifs) pour l'entité X ainsi que les spreads de crédits correspondants.

j	Proba (%)	Spread (bp)
0	0.3674	90.0
1	0.3938	93.3
2	0.4202	96.7
3	0.4466	100.0
4	0.4592	102.6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9	0.5695	115.9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
38	1.7445	218.4
39	1.7979	223.1

TAB. 9.2 – Probabilités de Défauts pour l'Entité X (Exemple)

On constate que les probabilités forwards de défaut augmentent avec la période forward en cohérence avec l'évolution des spreads de crédit zéro-coupon.

Il est possible de calculer les probabilités de défaut spot de maturité j à partir des probabilités de défaut forward en utilisant la formule générique ci-dessous :

$$\boxed{p(0\to j) = \sum_{k=0}^{j}\left\{\prod_{k'=0}^{k-1}(1-p(k'))\right\}\times p(k) \qquad \textit{avec} \qquad \prod_{k'=0}^{-1}(1-p(k')) = 1}$$

A titre d'exemple, calculons $p(0 \to 3)$ à partir des données de l'exemple précédent.

En développant la formule précédente, on a :

$$\begin{aligned} p(0 \to 3) &= p(0) \\ &+ [1 - p(0)] \times p(1) \\ &+ [1 - p(0)] \times [1 - p(1)] \times p(2) \\ &+ [1 - p(0)] \times [1 - p(1)] \times [1 - p(2)] \times p(3) \end{aligned}$$

Numériquement, on a :

$$\begin{aligned} p(0 \to 3) &= 0.3674\% \\ &+ [1 - 0.3674\%] \times 0.3938\% \\ &+ [1 - 0.3674\%] \times [1 - 0.3938\%] \times 0.4202\% \\ &+ [1 - 0.3674\%] \times [1 - 0.3938\%] \times [1 - 0.4202\%] \times 0.4466\% \\ &= 1.6181\% \end{aligned}$$

9.2 Credit Default Swap

Dans cette section nous présentons les dérivés de crédit les plus connus et les plus utilisés que sont les Credit Default Swap (CDS). Nous commençons par définir ce qu'est un contrat de CDS en donnant un aperçu des variantes possibles. Puis nous montrerons comment pricer un CDS et valoriser une position en cours de vie (connaissant la structure par terme des probabilités de défaut forward risque-neutre sur l'entité sous-jacente) dans le cadre des structures « plain vanilla ».

9.2.1 Définition des CDS

Notons en guise de préambule que les CDS ont été inventé par la banque JP Morgan au milieu des années 90 et ont connu depuis un développement très important tant sur le plan quantitatif (volumes de transactions) que qualitatif (évolution du standard « plain vanilla » vers des CDS ayant des caractéristiques plus « exotiques »). La crise des subprimes (2007-08) qui a vue un nombre inhabituel de sociétés faire faillite[16] et la crise de la dette Grecque (2010-?) ont permis de mettre en évidence certains défauts conceptuels de ces instruments financiers OTC liés essentiellement à la sécurisation du processus de réglement-livraison.

Ces défauts de conception originels qui sont en voie d'êtres corrigés aujourd'hui.

Un CDS[17] est un instrument financier qui permet le transfert d'un risque de crédit sur un émetteur X d'une contrepartie A (acheteur du CDS) vers une contrepartie B (vendeur du CDS) :

- A cherche à se couvrir contre un risque de crédit (évènement de crédit contractuel) sur une entité de référence X et paie une prime périodique au vendeur B pendant toute la durée du contrat. Le paiement de la prime périodique s'arrête lorsqu'un évènement de crédit contractuel est constaté
- B prend le risque sur l'entité de référence et s'engage à acheter à A le titre de référence au pair (livraison physique) si un évènement de crédit se produit sur la durée de vie du contrat. En contrepartie de cet engagement, B reçoit une prime périodique versée par A

16. On pense en particulier à Lehman Brothers qui reste à ce jour la plus grosse faillite de l'histoire du capitalisme

17. Pour une introduction didactique sur les CDS, on pourra consulter l'article de Whetten M., Adelson M. & Van Bemmelen M. (2004), « Credit Default Swap (CDS) Primer », Nomura Fixed Income Research, May

Les deux parties s'engagent pour un montant notionnel N de titres de l'entité de référence. La prime est exprimée en points de base du montant notionnel du CDS (cf. graphique 9.2).

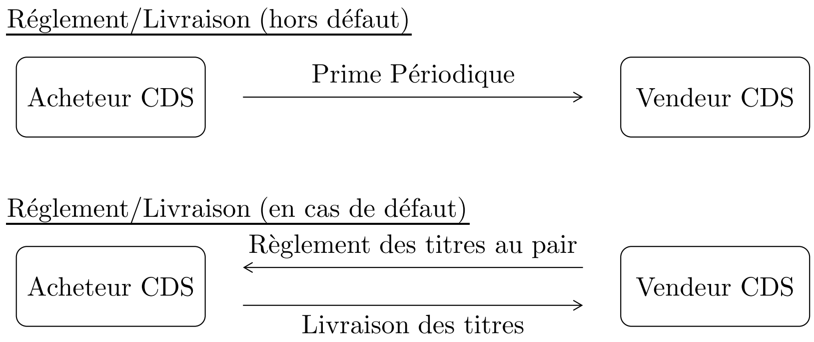

FIG. 9.2 – *Réglement/Livraison sur un Credit Default Swap*

Considérons un CDS dont les caractéristiques sont :

- Montant nominal : N
- Périodicité des paiements : τ (fraction d'année)
- Dates des paiements : $(t_j)_{j=1...J}$
- Prime (annuelle) : $\mathrm{M_{cds}}$

Le vendeur va donc recevoir un flux de cashflows positifs tous égaux à :

$$\boxed{CF_{t_j} = N \times M_{cds} \times \tau \qquad (j = 1 \ldots J)}$$

Et ce jusqu'à la maturité du CDS ou jusqu'à ce qu'un évènement de crédit contractuel (ex : défaut) se produise sur l'entité de référence.

A titre d'exemple, un contrat de CDS 5A avec un notionnel d'1 Million d'Euros et une prime de 40bp (annualisée) payée au trimestre va engendrer un cashflow (trimestriel) de EUR 1000 :

$$EUR\,1000 = EUR\,1M \times 0.4\% \times 0.25$$

Si avant l'échéance du CDS, un évènement de crédit contractuel se produit sur l'entité de référence, l'acheteur pourra céder au vendeur les titres qu'il détient sur cette entité de référence pour un montant nominal d'1M d'Euros en échange d'1M d'Euros en cash.

Fin de l'exemple numérique.

Les CDS sont à l'origine des contrats OTC (gré-à-gré) cotés par les grandes banques d'affaires internationales. En conséquence, les contrats de CDS sont peu standardisés et des variantes existent pour les aspects suivants[18] :

- Entité de référence : Il s'agit en général d'une entité de référence unique (single) qui peut être soit un corporate soit un souverain. Cette entité peut aussi être un panier (basket) d'entités de référence auquel cas l'évènement de crédit contractuel sur le CDS qui déclenche le réglement de la garantie peut prendre différentes formes. Cette garantie peut, par exemple être déclenchée dès le premier défaut (first-to-default) ou au contraire dès le second défaut (second-to-default), ce qui n'est pas sans impact sur le pricing du CDS

18. Cette liste est non exhaustive mais suffisante pour notre propos

- Titres livrables : On peut là aussi envisager qu'un seul titre (spécifique) soit livrable en cas d'èvenement de crédit ou au contraire que les titres livrables (gisement) soient définis par un certain nombre de conditions sur les caractéristiques des titres (par exemple : devise de référence, date de maturité, rang de créance, etc)
- Evènements de crédit : L'évènement de crédit le plus courant est le défaut de paiement (default) qui donne son nom aux CDS. D'autres évènements de crédit peuvent déclencher le réglement de la garantie dont les plus connus sont la faillite (bankruptcy), la restructuration et la dégradation de la note de crédit (credit rating drift) par ordre croissant de probabilité d'occurence. Notons que si la faillite entraîne mécaniquement le défault (une faillite est un défaut généralisé sur tous les engagements au passif), il est plus difficile de conclure de façon aussi formelle pour une restructuration comme l'ont montré les négociations autour de la restructuration de la dette grècque [19]
- Mode de règlement : Les deux modes de réglement sont la livraison (physical settlement) et le paiement d'une soulte (cash settlement). La livraison consiste pour l'acheteur à livrer les titres au vendeur en échange d'un paiement au pair de ses titres (cf. graphique 9.2). L'autre option (soulte) consiste pour le vendeur à compenser la perte sur les titres en versant à l'acheteur la différence entre le pair et le prix de marché constaté au moment du défaut [20]

Important : Dans la suite, nous traitons uniquement le cas des structures de CDS suivantes :
- Entité de référence : Unique
- Titre livrable : Spécifique
- Evènements de crédit : Défaut
- Règlement : Physique

Les CDS sont utilisés pour les motifs habituels de couverture, de spéculation [21] et d'arbitrage. Les trois principaux types d'arbitrages qui impliquent l'utilisation des CDS sont :

- L'arbitrage « Long CDS vs Short CDS » sur des entités différentes mais présentants des profils de risque jugés similaires (rétrécissement de l'écart entre les primes des deux CDS) ou au contraire différents (écartement de l'écart entre les primes des deux CDS). Ce type d'arbitrage est traité dans l'exercice 9 du cours
- L'arbitrage « Long CDS vs Short Asset-Swap » sur une même entité et un même titre obligataire émis par cette entité. Cet arbitrage consiste à jouer l'écart (la base) entre la prime du CDS et la prime de l'Asset-Swap. L'analyse de la base fait l'objet de la section 9.3 du présent chapitre
- L'arbitrage « Long CDS vs Long Equity » (Capital Structure Arbitrage) sur une même entité de référence. Il s'agit d'exploiter les inefficiences inter-marchés entre le marché du crédit et le marché action sur le passif d'une même société. Ce type d'arbitrage sera traité au Chapitre 10

19. Ces négociations ont abouti à un accord entre les principaux créanciers privés sous l'égide des autorités Européennes. Cet accord de restructuration avec effacement d'une partie de la dette (hair-cut) n'a pas été assimilé à un défaut par l'ISDA du fait de son caractère « volontaire ». Le caractère atypique de l'accord et de la décision de l'ISDA a suscité des réserves notamment de la part des investisseurs lésés (les porteurs de CDS) dont certains hedge funds qui ont portés l'affaire en justice. Il s'agit d'un cas étonnant d'insécurité juridique (du point de vue de l'acheteur de CDS) puisque ce sont les Etats qui sont à l'origine de cette insécurité alors qu'ils sont sensés être les garants de la bonne exécution des contrats privés

20. Les évènements récents ont montré que ses deux modes de réglement n'étaient pas sans engendrer quelques difficultés. La livraison physique pose problème dès lors que le notionnel net total des contrats de CDS sur une entité donnée et un titre donné émis par cette entité est supérieur à l'encours total sur ce titre. Cette situation est lié à l'achat de CDS pour motif de spéculation ou d'arbitrage, c'est-à-dire sans que les acheteurs ne possèdent les titres « sous-jacents » (naked CDS). Le paiement d'une soulte pose problème dès lors qu'en cas de défaut il peut être difficile de trouver un prix de marché (absence de liquidité). Le prix proposé peut même dans certains cas être contesté par la partie acheteuse pour soupçon de manipulation par la partie vendeuse. Ces problèmes sont en voie d'êtres résolus par la création de mécanismes d'enchères centralisées gérés par des tiers comme l'ISDA (auction settlement)

21. Achat d'un CDS nu pour « jouer » soit les variations de la prime du CDS soit le défaut imminent

Notons enfin que l'achat d'un CDS négocié avec une contrepartie X sur une entité de référence Y ne supprime pas le risque sur Y mais le transforme en un risque de défaut simultané de X et de Y. En conséquence, seule les grandes banques internationales dotées d'un excellent rating (idéalement AAA) auprès des agences de notation cotent les CDS.

Les CDS sont les dérivés de crédit les plus connus et les plus utilisés. Parmi les autres dérivés de crédit citons :

- Total Return Swap (TRS)
- Forward sur spread de crédit
- Option sur spread de crédit

Les CDS sont utilisés pour les motifs habituels de couverture, de spéculation et d'arbitrage mais servent aussi de « briques de base » pour la conception de produits structurés de crédit tels que :

- Credit Linked Notes (CLN)
- Synthetic CDO (Collaterized Debt Obligation)

L'examen des structures de CDS « exotiques », des autres dérivés de crédit et des produits structurés de crédit sort du cadre de ce cours. On pourra consulter les ouvrages de D. Marteau & D. Dehache (précédemment cité) et C. Bluhm, L. Overbeck & C. Wagner [22] pour plus d'informations.

9.2.2 Pricing des CDS

Jusqu'ici nous avons décrit la structure des CDS et considéré la prime M_{cds} du CDS comme donnée. Le pricing de cette prime repose sur l'application du principe général de valorisation des instruments financiers à cashflows incertains dans le cas où la source d'incertitude correspond au risque de défaut de l'émetteur X. La mise en œuvre de cette approche suppose, au préalable, que l'on ait calculé les probabilités de défaut sur l'émetteur X.

On va maintenant calculer la valeur V_{cds} d'un CDS de maturité J.

On construit un arbre binaire (cf. graphique 9.3) qui simule dans le temps les divers états futurs de l'émetteur (Défaut, Pas Défaut) et les payoffs associés en fonction des probabilités forwards de défaut p(j).

22. Bluhm C., Overbeck L. & Wagner C. (2002), An Introduction to Credit Risk Modeling, Chapman & Hall/CRC

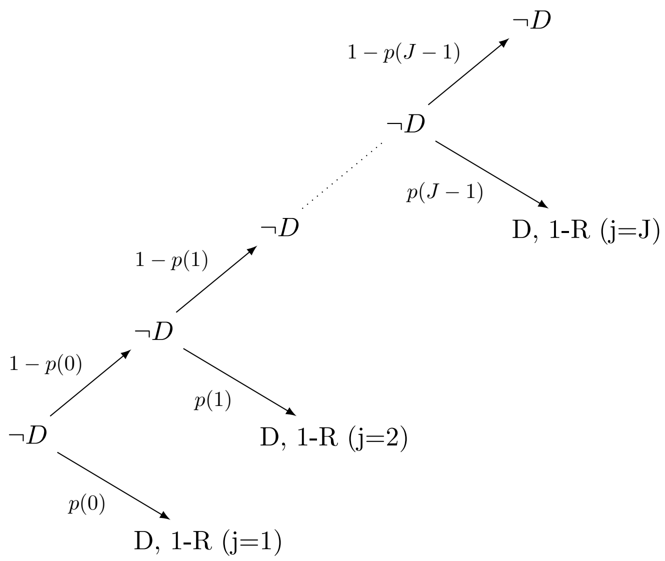

FIG. 9.3 – *Arbre Binaire de Valorisation d'un CDS*

Par définition, le payoff d'un CDS en cas de défaut de l'entité de référence est la différence entre le pair (100%) et la valeur de marché anticipée des titres au moment du défaut soit le taux de recouvrement R.

Connaissant les probabilités de défaut forward risque-neutre p(j), on peut appliquer le principe général de valorisation des instruments financiers à cashflows incertains dans le cas où la source d'incertitude correspond au risque de défaut de l'émetteur X. Ce principe stipule que le prix théorique du CDS est égal à la somme des valeurs actuelles des espérances (calculées sous la probabilité risque-neutre) des payoffs du CDS. L'actualisation est réalisée au taux sans risque lorsque tout les risques sont intégrés dans la loi des payoffs. Dans le cas des CDS, on actualise au taux Euribor pour tenir compte du fait que la contrepartie du CDS (le vendeur) est en général une banque dont le risque de défaut même faible n'est jamais nul.

On peut donc écrire :

$$V_{cds} = \sum_{j=1}^{J} \rho_{t_j}^{Euribor} \times E_0^{\mathbb{Q}}\left(\tilde{e}_{t_j} | F\right)$$

avec les notations complémentaires suivantes :

- $\rho_{t_j}^{Euribor}$: Facteur d'actualisation spot pour la maturité t_j correspondant au taux zéro-coupon Swap (Euribor)
- $\tilde{e}_{t_j}$: Payoff du CDS en t_j

En tenant compte du fait que l'espérance mathématique du payoff pour la maturité t_j s'écrit :

$$E_0^{\mathbb{Q}}\left(\tilde{e}_{t_j} | F\right) = \rho_{t_j}^{Euribor} \times (1-R) \times Proba\left(D \in [t_{j-1};\, t_j]\right)$$

avec

$$Proba\left(D \in [t_{j-1};\, t_j]\right) = p\,(j-1) \times \prod_{k=0}^{j-2} \left(1 - p\,(k)\right)$$

On trouve [23]:

23. Par convention : $\prod_{k=0}^{-1} \left(1 - p\,(k)\right) \equiv 1$

$$V_{cds} = (1 - R) \times \sum_{j=1}^{J} \left\{ \rho_{t_j}^{Euribor} \times p\,(j-1) \times \prod_{k=0}^{j-2} (1 - p\,(k)) \right\}$$

Cette valeur du CDS est la valeur « upfront » qui est versée en totalité par l'acheteur au vendeur à l'initialisation du CDS.

A titre d'exemple, nous allons pricer un CDS dont les caractéristiques sont :

- Entité de référence : Emetteur Corporate X fictif
- Nominal : EUR 10M
- Périodicité : 3M ($\tau = 0.25$)
- Maturité : 5A

On se donne une courbe des taux swap Euribor dont on a déduit les taux zéro-coupon swap correspondants en appliquant la méthode du « bootstrap » (cf. tableau 9.3).

i	Taux au Pair	Taux ZC
1	2.25	2.250
2	2.75	2.757
3	3.23	3.246
4	3.68	3.719
5	4.10	4.177
6	4.50	4.620
7	4.88	5.050
8	5.23	5.467
9	5.55	5.871
10	5.85	6.260

TAB. 9.3 – Taux Euribor « Au Pair » et Zéro-Coupon (Annuels)

On complète cette courbe des taux par un taux zéro-coupon Euribor 3M à 2%.

A partir des taux zéro-coupon annuels précédents, on calcule les taux zéro-coupon trimestriels par interpolation linéaire ainsi que les facteurs d'actualisation correspondants (cf. graphique 9.4).

i	Taux Zéro-Coupon	Facteurs d'Actualisation
1	2.000	0.99506157
2	2.083	0.98974331
3	2.167	0.98405207
4	2.250	0.97799511
5	2.376	0.97106532
⋮	⋮	⋮
10	3.001	0.92873383
⋮	⋮	⋮
39	6.163	0.55816464
40	6.260	0.54485939

TAB. 9.4 – Taux Zéro-Coupon et Facteurs d'Actualisation Euribor (Trimestriels)

En appliquant la formule de pricing donnée ci-dessus avec le taux de recouvrement (40%), les probabilités de défaut trouvées précédemment (cf. Tableau 9.2) et les facteurs d'actualisation ci-dessus (cf. Tableau 9.4), on trouve une prime « upfront » de 6.0639% :

$$\begin{aligned} V_{CDS} &= 0.4 \times 0.3674\% \times 1 \times 0.99506157 \\ &+ 0.4 \times 0.3938\% \times (1 - 0.3674\%) \times 0.98974331 \\ &+ 0.4 \times 0.4202\% \times (1 - 0.3674\%) \times (1 - 0.3938\%) \times 0.98405207 \\ &+ \cdots \\ &+ 0.4 \times 0.8295\% \times (1 - 0.3674\%) \times \ldots \times (1 - 0.8035\%) \times 0.81497708 \\ &= 6.0639\% \end{aligned}$$

En principe, cette valeur (prime « upfront ») est répartie en paiements périodiques $\mathrm{S_{cds}}$ de période τ.

Sous hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), la valeur actuelle ajustée du risque (de défaut) des paiements périodiques $\mathrm{S_{cds}}$ à chaque date t_j (j=1...J) doit être égale à la valeur de la prime « upfront » :

$$Payer\ V_{cds}\ en\ t_0 \qquad \Longleftrightarrow \ Payer\ S_{cds}\ en\ t_j\ \ (j = 1 \ldots J)$$

Il faut donc tenir compte dans le pricing de la prime périodique $\mathrm{S_{cds}}$ que ce flux de cashflows peut être interrompu (avant la maturité du CDS) en cas de défaut de l'émetteur X.

Au final on a donc pour 1 Euro de nominal :

$$\boxed{S_{cds} = \frac{V_{cds}}{\sum_{j=1}^{J} \left\{ \rho_{t_j}^{Euribor} \times \prod_{k=0}^{j-1} (1 - p(k)) \right\}}}$$

La marge du CDS (exprimée en base annuelle) est finalement donnée par :

$$M_{cds} = \frac{S_{cds}}{\tau}$$

Dans le cadre du précédent exemple, la prime périodique annualisée correspondante à la prime « upfront » est de 139.24bp. En conséquence, l'acheteur s'engage à payer tout les 3M un montant de EUR 34810 :

$$EUR\,34810 = EUR\,10M \times 0.25 \times 1.3924\%$$

jusqu'à la date d'échéance du CDS ou jusqu'à l'occurrence d'un évènement de crédit contractuel.

Dans les exemples numériques, nous avons pris un pas de discrétisation égal à la périodicité des paiements (3M). En pratique, il est préférable de prendre une discrétisation du temps plus fine pour tenir compte de la forme des courbes de taux zéro-coupon et du fait que le défaut peut être constaté à tout moment.

9.2.3 Valorisation des CDS

Venons-en maintenant au problème de la valorisation d'une position de CDS en cours de vie.

Reprenons les notations du paragraphe 9.2.2 et plaçons-nous à une date t_{j^*} correspondant à l'une des dates de paiement de la prime périodique du CDS.

$$\underbrace{date\ de\ valeur}_{t_0} < \underbrace{date\ de\ valorisation}_{t_{j^*}} < \underbrace{date\ de\ maturit\acute{e}}_{t_J}$$

La procédure de valorisation consiste à couvrir fictivement la position en cours de vie par un CDS de sens contraire.

Plus précisément, on va calculer successivement :

- La prime d'un CDS qui couvre la position en cours de vie (hedge)
- Le delta des paiements périodiques entre la position initiale et la couverture
- La valeur actuelle du flux de delta de paiements périodiques (latent)
- La valeur capitalisée des flux passés sur la position de CDS (réalisé)
- La valorisation totale de la position par addition du latent et du réalisé

Le CDS de couverture doit avoir les mêmes caractéristiques que le CDS en cours de vie que l'on cherche à valoriser, à savoir :

- Montant nominal : N
- Entité de référence : X
- Périodicité des paiements : τ
- Date de maturité : t_J

Le calcul de la prime du CDS de couverture est réalisé en appliquant les formules données au paragraphe 9.2.2 :

$$M_{hedge} = \frac{(1-R) \times \sum_{j=j^*}^{J} \left\{ \rho_{t_j}^{Euribor} \times p\,(j-1) \times \prod_{k=0}^{j-2} (1 - p\,(k)) \right\}}{\tau \times \sum_{j=j^*}^{J} \left\{ \rho_{t_j}^{Euribor} \times \prod_{k=0}^{j-1} (1 - p\,(k)) \right\}}$$

Notons que les primes M_{cds} et M_{hedge} seront très vraissemblablement différentes pour les deux raisons suivantes :

1. Les dates de calcul n'étant pas les mêmes, les inputs rentrants dans le calcul de ces primes diffèrent très certainement :

   (a) Taux Euribor

   (b) Probabilités de défaut
   (c) Taux de recouvrement anticipé en cas de défaut

2. Les durées des CDS diffèrent :
   (a) Le CDS initial avait une durée de J périodes au moment de sa mise en place
   (b) Le CDS de couverture a une durée de $J - j^*$ périodes en date de valorisation

On calcule ensuite la différence entre les deux primes :

$$\triangle_{cds/hedge} = M_{cds} - M_{hedge}$$

Notons que le signe de $\triangle_{cds/hedge}$ détermine le signe du P/L de la position de CDS (hors financement).

Enfin, le calcul de la valeur actuelle du flux de delta de paiements périodiques doit tenir compte qu'un défaut sur l'entité de référence annule les paiements périodiques sur les deux CDS (même raisonnement que pour le calcul de la prime périodique à partir de la prime « upfront » du paragraphe 9.2.2).

La valeur latente de la position CDS en cours de vie s'écrit donc finalement :

$$\boxed{MV_{CDS}^{Latent} = N \times \triangle_{cds/hedge} \times \tau \times \sum_{j=j^*}^{J} \left\{ \rho_{t_j}^{Euribor} \times \prod_{k=0}^{j-1} (1 - p(k)) \right\}}$$

Intéressons-nous maintenant au calcul du réalisé de la position.

Ce calcul consiste à capitaliser les casflows passés (la technique est la même quelque soit l'instrument financier), on a :

$$MV_{CDS}^{Réalisé} = N \times M_{cds} \times \tau \times \sum_{j=0}^{j^*-1} \left\{ \prod_{k=j}^{j^*-1} \left(1 + R_{j,j+1}^{Euribor} \times \tau\right) \right\}$$

La valorisation totale de la position de CDS (en cours de vie) n'est autre que la somme du latent et du réalisé :

$$MV_{CDS} = MV_{CDS}^{Latent} + MV_{CDS}^{Réalisé}$$

Notons que pour une position spéculative de type « Long Naked CDS », le break-even défini comme la valeur de M_{hedge} qui annule la valorisation totale de la position (P/L total) est :

$$M_{hedge}^* = M_{cds} \times \left[1 + \frac{\sum_{j=0}^{j^*-1} \left\{ \prod_{k=j}^{j^*-1} \left(1 + R_{k,k+1}^{Euribor} \times \tau\right) \right\}}{\sum_{j=j^*}^{J} \left\{ \rho_{t_j}^{Euribor} \times \prod_{k=0}^{j-1} (1 - p(k)) \right\}} \right]$$

Un spéculateur anticipant une dégradation de la solvabilité de l'entité de référence et donc une hausse de la prime du CDS sur cette entité de référence est en portage négatif sur sa position initiale de CDS (il paye la prime). La prime « break-even » (sur le CDS de couverture) augmente donc avec la durée de portage de la position.

9.3 Arbitrage CDS vs Asset-Swap

Cette section traite de l'arbitrage entre un Credit Default Swap et un Asset-Swap (de mêmes caractéristiques). Nous montrons que la base est, sous certaines hypothèses non-standards sur la structure du CDS, égal à moins le spread swap-Etat équivalent. Dans le cas standard, nous montrons que les deux facteurs à considérer dans le pricing de la base sont la qualité de crédit de l'émetteur sous-jacent (CDS et Asset-Swap) et la surcote ou décote de l'obligation sous-jacente par rapport au pair.

Note : Le lecteur est invité à se reporter au Chapitre 5 pour tout ce qui concerne les swaps de taux et les asset-swap.

9.3.1 Montage de la Position

Supposons que nous mettions en place la position suivante :

1. Long d'un Asset-Swap de maturité K pour un nominal N :
   (a) Long obligation « risquée » de maturité K
   (b) Payeur d'un swap structuré en fonction des caractéristiques de l'obligation (coupon et prix de marché)
2. Financement de l'Asset-Swap par un roll-over d'emprunts à 3M (on suppose que l'on est une banque AAA et que l'on se finance à Euribor)
3. Couverture du risque de crédit par un CDS de même nominal et de même maturité que l'Asset-Swap

Tant qu'il n'y a pas de défaut de l'émetteur des titres, cette stratégie rapporte tout les 3 mois un montant :

$$-N \times \frac{(M_{cds} - M_{a-s})}{4}$$

avec :

- $M_{\text{a-s}}$: Marge de l'Asset-Swap au dessus de l'Euribor 3M ($M_{\text{a-s}} > 0$)
- M_{cds} : Prime du Credit Default Swap

On appelle « base » la différence entre la prime du CDS et la marge d'Asset-Swap (annualisée) :

$$\boxed{Base = M_{cds} - M_{a-s}}$$

Que vaut la base ? Pour répondre à cette question et avant tout développement formel ou simulation, il faut partir d'une intuition purement financière.

Puisque le rôle d'un CDS est de couvrir son détenteur contre le risque de défaut sur l'entité de référence X, on peut donc considérer en première approximation que le CDS transforme l'obligation « risquée » en une obligation « sans risque » (de mêmes caractéristiques). On en déduit donc que la base doit être égale à moins la marge d'asset-swap sur le titre « sans risque » (Etat) équivalent.

Il s'agit d'un raisonnement théorique fondé sur une structure de CDS non standard (cf. paragraphe 9.3.2). On montre que ce résultat théorique n'est pas toujours vrai avec une structure de CDS standard telle que celle décrite dans ce chapitre (cf. paragraphe 9.3.3).

9.3.2 Calcul de la Base : Cas Théorique

Afin de démontrer formellement notre intuition du paragraphe 9.3.1, il est nécessaire de créer un CDS « théorique » qui diffère du CDS « standard » au niveau du processus de réglement/livraison en cas de défaut de l'entité de référence.

On considère donc la structure de CDS non standard suivante :

- La prime du CDS est payée jusqu'à l'échéance du CDS qu'il y ait un défaut ou pas
- En cas de défaut, le vendeur du CDS se substitue à l'émetteur de l'obligation et assure le paiement des intérêts et du principal selon l'échéancier normalement prévu

On suppose de plus que :

- Le vendeur du CDS est sans risque de crédit (Etat)
- L'acheteur du CDS est une contrepartie bancaire (risque « Euribor »)

Sous ces hypothèses, notre intuition peut faire l'objet d'une démonstration formelle. On a donc :

$$\boxed{Marge\,Théorique = -Marge\,\text{"}Swap - Etat\text{"}}$$

<u>Preuve :</u>

On part d'un CDS non standard pour lequel :

- Le sous-jacent est un zéro-coupon « risqué »
- En cas de défaut, le remboursement est garanti à l'échéance (et non à la date de défaut)

On note :

- B(0,T) : Prix d'un zéro-coupon sans risque (Etat) de maturité T
- B^*(0,T) : Prix d'un zéro-coupon swap de maturité T
- B^{**}(0,T) : Prix d'un zéro-coupon « risqué » de maturité T

On montre facilement[24] que la valeur du CDS portant sur le zéro-coupon « risqué » de maturité T est ègale à :

$$V_{cds}\,(0,T) = B\,(0,T) - B^{**}\,(0,T)$$

Etendons ce résultat au cas où le sous-jacent est une obligation couponnée qui paye un coupon C (t=1...T) et rembourse le pair (100) à l'échéance (T). La valeur du CDS est égal à la somme des valeurs des CDS propres à chaque flux :

$$\begin{aligned}
V_{cds} &= C \times \sum_{i=1}^{N} \left[B\,(0,T_i) - B^{**}\,(0,T_i)\right] + 100 \times \left[B\,(0,T_N) - B^{**}\,(0,T_N)\right] \\
&= C \times \sum_{i=1}^{N} B\,(0,T_i) + 100 \times B\,(0,T_N) \\
&- C \times \sum_{i=1}^{N} B^{**}\,(0,T_i) + 100 \times B^{**}\,(0,T_N) \\
&= V_{Etat} - V_{Corp}
\end{aligned}$$

V_{cds} est la valeur « upfront » du CDS, on calcule la prime périodique (annualisée) M_{cds} en écrivant :

24. Cf. Marteau D. et Dehache D. (2001), précédemment cité

$$V_{cds} = M_{cds} \times \tau \times \sum_{k=1}^{K} B^{*}(0,T_k)$$

L'actualisation est effectuée au taux swap Euribor car on est une banque AAA de première catégorie.

On trouve donc :

$$M_{cds} = \frac{V_{Etat} - V_{Corp}}{\tau \times \sum_{k=1}^{K} B^{*}(0,T_k)}$$

Par ailleurs, on sait (cf. Chapitre 5) que la marge de l'Asset-Swap construit à partir de l'obligation couponnée précédente s'écrit :

$$M_{a-s} = \frac{V_{Swap} - V_{Corp}}{\tau \times \sum_{k=1}^{K} B^{*}(0,T_k)}$$

On a donc finalement :

$$Base\,Th\acute{e}orique = \frac{V_{Etat} - V_{Swap}}{\tau \times \sum_{k=1}^{K} B^{*}(0,T_k)}$$

On aura reconnu dans l'expression précédente de la base théorique la marge de l'Asset-Swap « Swap-Etat ».

Ce qui termine la preuve.

Ce résultat est donc bien conforme à notre intuition qui veut qu'un Asset-Swap sur un titre « risqué » dont le risque de crédit est couvert par un CDS doit être équivalent à un Asset-Swap sur un titre « sans risque » de mêmes caractéristiques. Notons qu'en général, la marge sur les Asset-Swaps « sans risque » (Swap-Etat) est négative (les taux de swap sont supérieurs aux taux Etat), par conséquent, la base théorique est positive.

9.3.3 Analyse de la Base : Cas Standard

Dans le cas standard, il est difficile de trouver une interprétation simple de la base pour les deux raisons suivantes :

- Dans le cadre d'un CDS standard, le vendeur rembourse le « pair » en cas de défaut mais ne se substitue pas à l'émetteur (en cohérence avec le traitement comptable et juridique des faillites)
- Les vendeurs de CDS sont (en général) des banques qui (comme toutes les autres entreprises) ont un risque de signature

Supposons néanmoins que l'on mette en place une position longue d'asset-swap couverte par un CDS standard de mêmes caractéristiques.

Plus précisément on a la position suivante :

- Long d'un Asset-Swap de maturité J pour un nominal N sur une obligation « risquée » émise par l'entité X. Soit $M_{a\text{-}s}$ la marge (annualisée) de l'asset-swap au dessus de l'Euribor. Cet Asset-Swap est financé par un roll-over d'emprunts (on suppose que l'on est une banque AAA et que l'on se finance à Euribor)

– Couverture du risque de crédit sur l'obligation par un CDS de même nominal N et de même maturité J que l'Asset-Swap et paiement périodique d'une prime annualisée M_{cds}

Compte tenu des résultats obtenus précédemment, cette position génère un flux de cashflows tous égaux à :

$$CF_{t_j} = -N \times \tau \times (M_{cds} - M_{a-s}) \qquad avec \qquad j = 1 \ldots J$$

Et ce tant que l'entité de référence X n'est pas en défaut de paiement.

Supposons que l'entité de référence X fasse défaut à une date t_j quelconque et que l'on puisse solder l'ensemble des positions à cette date.

Les opérations à réaliser sont les suivantes :

1. Livraison de l'obligation à la contrepartie du CDS contre paiement du « pair » ce qui annule le CDS
2. Remboursement du nominal du dernier emprunt contracté ce qui annule le roll-over d'emprunts mis en place pour financer l'achat de l'Asset-Swap (au « pair »)
3. Couverture du swap de taux par un swap de sens contraire ou annulation pure et simple auprès de la contrepartie de l'Asset-Swap ce qui donne lieu à une soulte

L'incertitude réside donc dans le swap de taux « hors marché » négocié à l'initialisation de la position d'Asset-Swap.

Introduisons un CDS « exotique » (noté CDS*) qui permet de solder le swap de taux négocié à l'initialisation de l'Asset-Swap à « flat » en cas de défaut sur l'entité de référence.

L'introduction de ce CDS permet de retrouver le résultat précédent :

$$\left.\begin{array}{l} Long\ Asset-Swap \\ Long\ CDS \\ Long\ CDS^* \end{array}\right\} \Longleftrightarrow Long\ Swap-Etat$$

La base s'écrit maintenant comme la différence entre les deux primes :

$$Base = -M_{cds^*} - M_{swap-etat}$$

Le graphique 9.4 ci-dessous décrit l'évolution de la valeur de la base que nous avons calculé en fonction du spread de crédit.

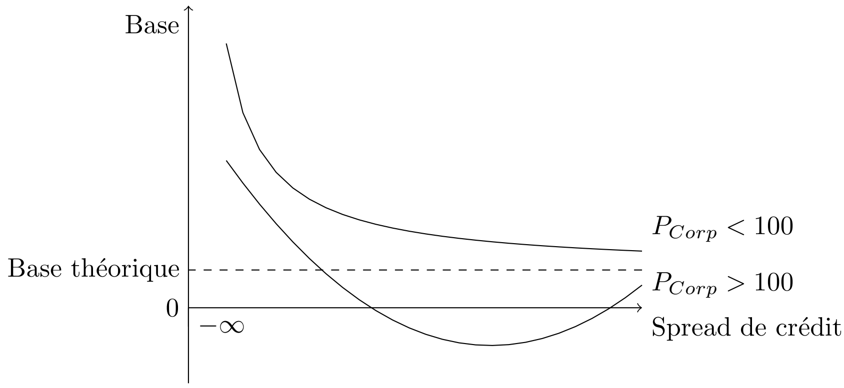

FIG. 9.4 – *Evolution de la Base en Fonction du Spread de Crédit*

Deux cas sont envisageables à l'initialisation de l'asset-swap :

1. L'obligation traite en dessous du pair ($P_{Corp} < 100$) : Dans ce cas la valeur de marché du swap est positive (pour le détenteur de la position) et la soulte (cash payé par l'acheteur de l'asset-swap) est répercutée positivement sur la marge de l'Asset-Swap. A taux de coupon constant, toute augmentation du spread de crédit entraîne une baisse de la prime négative du CDS* (donc une hausse de la base) et une augmentation de la décote de l'obligation (donc de la market value du swap de taux)
2. L'obligation traite au dessus du pair ($P_{Corp} > 100$) : Dans ce cas la valeur de marché du swap est négative et la soulte (cash reçu par l'acheteur de l'Asset-Swap) est répercutée négativement sur la marge de l'Asset-Swap. A taux de coupon constant, toute augmentation du spread de crédit entraîne une hausse de la prime positive du CDS* donc une baisse de la base (qui peut devenir négative si la prime du CDS* devient plus importante en valeur absolue que le spread swap-Etat) puis remonte lorsque l'effet de diminution de la market-value du swap devient plus importante que l'effet de hausse du spread de crédit. On retombe dans le premier cas lorsque la market value du swap de taux devient positive

A titre d'exemple, considérons une obligation à taux fixe « in fine » émise par un émetteur corporate X dont les caractéristiques sont :

- Coupon : 4%
- Maturité : 5A
- Prix : 94.52%

En appliquant les principes de construction et de pricing précédents, on trouve les caractéristiques des swap structurés Corporate (X) et Etat :

- Taux Fixe : 4%
- Périodicité du Taux Variable : 3M ($\tau = 0.25$)
- Maturité : 5A
- Valeur : 5.48%
- Marge Asset-Swap « Corporate » : 110 bp
- Marge Asset-Swap « Etat » : - 25 bp

Le tableau 9.5 qui suit donne les éléments de calculs intermédiaires pour le calcul final des marges d'asset-swap Corporate et Etat.

t	CF	B_{swap}	$CF*B_{swap}$	B_{corp}	$CF*B_{corp}$	B_{etat}	$CF*B_{etat}$
1	4	0.97799	3.91198	0.97087	3.88349	0.98039	3.92156
2	4	0.94706	3.78824	0.93151	3.72605	0.95169	3.80679
3	4	0.90861	3.63446	0.88368	3.53472	0.91529	3.66116
4	4	0.86410	3.45643	0.82917	3.31671	0.87259	3.49036
5	104	0.81497	84.75762	0.76978	80.05771	0.82501	85.80186

TAB. 9.5 – Calculs Intermédiaires pour la Base Théorique (Exemple)

A partir des données de calculs intermédiaires du tableau précédent, on trouve les valeurs suivantes pour le flux de cashflows de l'obligation « risquée » actualisés dans les courbes de taux zéro-coupon Swap, Corp et Etat :

- V_{Swap} = 99.55

- $\mathrm{V}_{\mathrm{Corp}} = 94.52$
- $\mathrm{V}_{Etat} = 100.68$

Par ailleur, le dénominateur commun aux formules de calcul des marges d'Asset-Swap, Corporate et Etat est égal à 4.57.

En appliquant les formules données au paragraphe 9.3.2, on trouve :

$$M_{swap-Etat} = \frac{99.55 - 100.68}{4.57} = -25bp$$

et

$$M_{swap-corp} = \frac{99.55 - 94.52}{4.57} = -110bp$$

Supposons que l'on a couvert, à l'initialisation de l'opération, l'Asset-Swap précédent par le CDS 5A du paragraphe 9.2.2 pricé à 139bp de prime périodique annualisée.

Si l'on investi EUR 10M dans cet Asset-Swap financée à Euribor 3M, la position « asset-swap plus financement » génère un cashflow trimestriel positif égal à EUR 27511. La position globale (asset-swap plus CDS) génère un cashflow trimestriel négatif égal à EUR 7300 (34811 – 27511) correspondant à une base de 29bp (139 – 110). Cette base est à comparer à la marge « swap-Etat » équivalente qui vaut - 25bp.

On paye donc 4 bp au dessus de la base théorique (25bp) car on bénéficie d'une sortie à market value anticipée positive ($\mathrm{MV}_{\mathrm{swap}} = 5.48\%$) si l'entité de référence X fait défaut [25].

25. Dans un monde où les taux de swap forwards se réalisent, la market value de la partie « swap » de l'asset-swap est invariante (+5.48%)