

## Chapitre 10

# Capital Structure (Merton) Arbitrage

On commence par une présentation exhaustive du modèle de Merton permettant de calculer la probabilité de défaut d'une société à partir de sa structure bilancielle. On montre en particulier comment calculer numériquement la probabilité de défaut dans le contexte usuel où la valeur et la volatilité des actifs de la société n'est pas connue. On termine cette première section par une critique du modèle de Merton et une présentation comparative de deux autres modèles de type structurel (Moody's-KMV et CreditGrades). La section suivante est une introduction aux techniques d'arbitrages « bilanciels » dans le cadre du modèle de Merton. On commence par étudier la relation de dépendance entre le cours de l'action d'une société et le spread de crédit sur sa dette corporate. On décrit ensuite les arbitrages intra- « capital structure » (même société mais instruments différents) et inter- « capital structure » (mêmes instruments mais sociétés différentes appartenant au même secteur d'activité). Enfin, la dernière section permet d'introduire les obligations convertibles en actions, instruments financiers hybrides de type obligataire mais sensibles au cours de l'action « sous-jacente ». On montre en particulier comment il serait possible de coupler un modèle de pricing par arbre binaire avec un modèle de Merton afin de tenir compte de la relation de dépendance vue plus haut entre le spread de crédit et le cours des actions.

### 10.1 Le Modèle de Merton

Nous avons déjà évoqué le modèle de Merton dans la première partie du Chapitre 9 sur le risque de défaut et le calcul des probabilités de défaut. Cette première section du présent chapitre va nous permettre d'aller plus loin dans l'étude du modèle de Merton à travers sa résolution numérique concrète dans le contexte usuel où la valeur des actifs de la société n'est pas connue.

#### 10.1.1 Les Hypothèses du Modèle

Le modèle de Merton est basé sur les travaux de R.C. Merton<sup>1</sup>.

Merton a montré que la valeur des actions et de la dette d'une société (passif) sont basées sur les mêmes cashflows, à savoir les cashflows générés par les actifs de la société. Ainsi, les

---

1. Merton R.C. (1974), « On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates », *The Journal of Finance*, Vol. 29, N°2

risques et la valorisation de ces deux composantes du passif d'une société sont étroitement liées.

On considère une société dont l'actif est financé au passif par des fonds propres (détenus par les actionnaires) et de la dette (détenue par les créanciers). Le bilan « économique » de cette société est représentée par le graphique 10.1 ci-dessous.

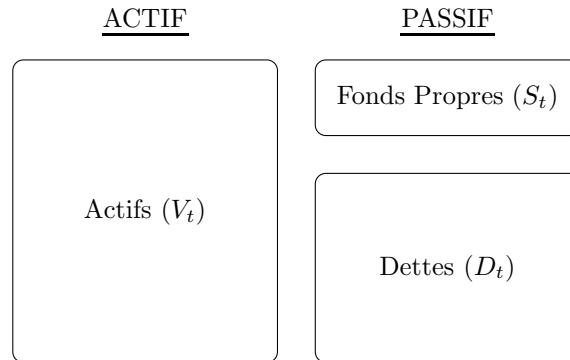


FIG. 10.1 – *Bilan Economique d'une Entreprise*

Il s'agit d'un bilan économique car  $V_t$ ,  $S_t$  et  $D_t$  représentent les valorisations en « valeur de marché » de l'actif, des fonds propres et de la dette de la société (respectivement) et non les valeurs comptables classiques de ces différentes composantes du bilan.

Le modèle de Merton suppose que les actifs de la société sont négociables et suivent une dynamique du type :

$$\frac{dV_t}{V_t} = r \times dt + \sigma_V \times dB_t \quad (\text{mouvement brownien géométrique})$$

avec :

- $V_t$  : Valeur des actifs
- $\sigma_V$  : Volatilité de la valeur des actifs
- $r$  : Taux d'intérêt sans risque

$dB_t$  est un processus de Weiner standard.

La dette de la société est constituée d'un unique zéro-coupon de valeur nominale  $D$  et de maturité  $T$ .

On suppose que la société est liquidée à l'échéance  $T$  de la dette.

Deux situations peuvent alors intervenir selon que la valeur des actifs est :

1. Inférieure à la valeur nominale de la dette ( $V_T < D$ ) : Dans ce cas, la société est en faillite et le droit des faillites stipule que les actifs de la société deviennent la propriété des créanciers qui récupèrent donc une proportion  $D/V_T$  du montant nominal de la dette. Les actionnaires perdent la totalité des sommes investies en fonds propres lors de la création de la société
2. Supérieure à la valeur nominale de la dette ( $V_T > D$ ) : Les actionnaires peuvent solder les actifs de la société, rembourser les créanciers et se partager le solde ( $V_T - D$ ) pro-rata les parts qu'ils détiennent dans la capital de la société

On constate donc que les actions ainsi que la dette de la société peuvent s'interpréter comme des produits dérivés sur les actifs de la société (sous-jacent) :

- Les actionnaires sont longs d'un CALL sur la valeur des actifs  $V_t$  de strike  $D$  et d'échéance  $T$ . A l'échéance ils reçoivent :  $\text{Max}(0, V_T - D)$
- Les créanciers sont longs d'un zéro-coupon sans risque de valeur nominale  $D$  et short d'un PUT sur la valeur des actifs  $V_t$  de strike  $D$  et d'échéance  $T$ . A l'échéance ils reçoivent :  $\text{Min}(V_T, D)$

Les payoffs à l'échéance  $T$  des actions et de la dette de la société sont représentés sur le graphique 10.2 ci-dessous.

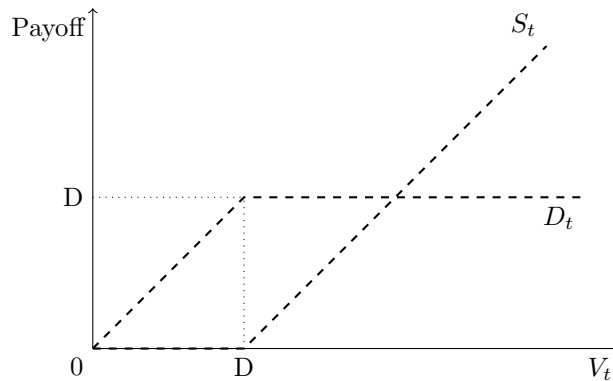


FIG. 10.2 – Valeurs des Actions et de la Dette à l'Echéance

Appliquons la formule de valorisation par actualisation de l'espérance des cashflows futurs sous probabilité risque-neutre à la valeur de la dette, on obtient :

$$D_t = B(t,T) \times E[\text{Min}(V_T, D)]$$

On peut réécrire l'expression précédente sous la forme<sup>2</sup> :

$$D_t = \underbrace{B(t,T) \times D}_{\text{Valeur d'un zéro-coupon sans risque de nominal } D} - \underbrace{B(t,T) \times E[\text{Max}(0, D - V_T)]}_{\text{Valeur d'un PUT sur la valeur des actifs de strike } D}$$

Appliquons maintenant la formule de Black-Scholes au PUT précédent :

$$B(t,T) \times E[\text{Max}(0, D - V_T)] = B(t,T) \times D \times N(-d_2) - V_t \times N(-d_1)$$

On obtient après avoir réarrangé les termes<sup>3</sup> :

$$D_t = V_t \times N(-d_1) + B(t,T) \times D \times N(d_2)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\text{Ln}(V_t/D) + \left(r + \frac{\sigma_V^2}{2}\right) \times (T - t)}{\sigma_V \times \sqrt{T - t}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma_V \times \sqrt{T - t}$$

$N(\cdot)$  est la fonction de distribution cumulée de la loi normale (centrée-réduite).

2. En notant que  $\text{Min}(a, b) = a - \text{Max}(0, a - b)$   
 3.  $N(x) + N(-x) = 1$  (par symétrie de la loi normale)

### 10.1.2 Calcul des Indicateurs de Risques

L'expression de la valeur de marché de la dette  $D_t$  donnée au paragraphe 10.1.1 permet de déduire les principaux indicateurs de risque de crédit, dont la probabilité de défaut, à partir des deux paramètres suivants :

- $V_t$  : Valeur des actifs
- $\sigma_V$  : Volatilité des actifs

On a vu que la société faisait défaut en  $T$  si la valeur de ses actifs à cette date  $V_T$  était inférieure à la valeur nominale de sa dette  $D$ . On a donc <sup>4</sup> :

$$\begin{aligned} p_t &= \text{Proba} [V_T < D] \\ &= \text{Proba} \left[ V_t \times \text{Exp} \left\{ \left( r - \frac{\sigma_V^2}{2} \right) \times (T - t) + \sigma_V \times \sqrt{T - t} \times Z_{0,1} \right\} < D \right] \\ &= \text{Proba} \left[ Z_{0,1} < - \frac{\text{Ln}(V_t/D) + \left( r - \frac{\sigma_V^2}{2} \right) \times (T - t)}{\sigma_V \times \sqrt{T - t}} \right] \\ &= \text{Proba} [Z_{0,1} < -d_2] \end{aligned}$$

Finalement :

$$p_t = N(-d_2)$$

Les autres indicateurs de risques complémentaires à la probabilité de défaut sont <sup>5</sup> :

- Taux de recouvrement
- Levier d'endettement
- Spread de crédit

Le taux de recouvrement (anticipé) se définit comme le ratio de la valeur anticipée en  $t$  de la valeur des actifs à l'échéance sur la valeur nominale de la dette :

$$\delta_t = \frac{E[V_T]}{D}$$

Pour calculer le taux de recouvrement (anticipé), on réécrit l'expression de la valeur de la dette  $D_t$  donnée au paragraphe 10.1.1 en appliquant le résultat précédent au calcul de l'espérance :

$$\begin{aligned} E[\text{Min}(V_T, D)] &= E[D \times 1_{\{V_T \geq D\}} + V_T \times 1_{\{V_T < D\}}] \\ &= D \times E[1_{\{V_T \geq D\}}] + E[V_T \times 1_{\{V_T < D\}}] \\ &= D \times E[1_{\{V_T \geq D\}}] + E[V_T] \times E[1_{\{V_T < D\}}] \\ &= D \times (1 - p_t) + E[V_T] \times p_t \end{aligned}$$

On trouve finalement comme expression de  $D_t$  :

$$D_t = B(t, T) \times [D \times (1 - p_t) + D \times \delta_t \times p_t]$$

4.  $Z_{0,1}$  suit une loi normale centrée-réduite

5. Les formules des indicateurs de risques complémentaires sont issues du cours de DEA de D. Kurtz & T.B. Pignard (2004), « Modélisation du Risque de Crédit », DEA de Statistique et Modèles aléatoires en économie et finance, Universités Paris 7 & Paris 1

Par identification on déduit l'expression de  $\delta_t$  :

$$\delta_t = \frac{V_t \times N(-d_1)}{D \times B(t, T) \times N(-d_2)}$$

Le levier d'endettement est, par définition, le ratio entre la valeur actuelle de la valeur nominale de la dette  $D$  et la valeur des actifs  $V_t$  :

$$l_t = \frac{D \times B(t, T)}{V_t}$$

Le levier d'endettement mesure le pourcentage des actifs (en valeur de marché) financé par endettement.

Le spread de crédit (implicite) se définit comme la différence entre le taux d'intérêt de la dette de la société (risquée) et le taux d'intérêt sans risque (de maturité  $T$ ).

On a donc :

$$Spread_{t, T} = R_{t, T}^* - R_{t, T}$$

avec :

$$R_{t, T} = -\frac{\text{Ln}[D \times B(t, T)]}{T - t} \quad \text{et} \quad R_{t, T}^* = -\frac{\text{Ln}[D(t, T)]}{T - t}$$

En remplaçant dans la formule de calcul du spread de crédit (implicite) les taux  $R_{t, T}$  et  $R_{t, T}^*$  et par leurs expressions respectives, on trouve finalement :

$$Spread_{t, T} = -\frac{1}{T - t} \times \text{Ln} \left[ \frac{D(t, T)}{D \times B(t, T)} \right]$$

Notons que l'on peut réécrire les formules de Merton pour la dette  $D_t$  sous la forme :

$$D_t = D \times B(t, T) \times \left[ \frac{N(-h_1)}{l_t} + N(h_2) \right]$$

avec <sup>6</sup> :

$$h_1 = \frac{\text{Ln}(1/l_t) + \frac{\sigma_V^2}{2} \times (T - t)}{\sigma_V \times \sqrt{T - t}} \quad \text{et} \quad h_2 = h_1 - \sigma_V \times \sqrt{T - t}$$

D'où l'on tire l'expression suivante du spread de crédit :

$$Spread_{t, T} = -\frac{1}{T - t} \times \text{Ln} \left[ \frac{N(-h_1)}{l_t} + N(h_2) \right]$$

**En utilisant ces notations, on constate que la valeur des actifs  $V_t$ , la volatilité des actifs  $\sigma_V$  et le levier d'endettement  $l_t$  sont les trois paramètres fondamentaux pour l'analyse du risque de crédit d'une société.**

6. Il s'agit d'un simple changement de notation :  $h_i = d_i$  pour  $i=1,2$

On peut aussi reformuler cette dernière expression du spread de crédit en fonction de la probabilité de défaut et du taux de recouvrement (anticipé). Considérons pour simplifier le cas d'un zéro-coupon de maturité 1Y, on a :

$$\begin{aligned}
 \text{Spread}_{1Y} &= -Ln \left[ \frac{N(-h_1)}{l_t} + N(h_2) \right] \\
 &= -Ln \left[ 1 + \frac{N(-h_1)}{l_t} - N(-h_2) \right] \\
 &\simeq - \left[ \frac{N(-h_1)}{l_t} - N(-h_2) \right] \\
 &\simeq N(-h_2) \times \left[ 1 - \frac{1}{l_t} \times \frac{N(-h_1)}{N(-h_2)} \right] \\
 &\simeq p_t \times [1 - \delta_t]
 \end{aligned}$$

On retrouve ici la formule donnée au Chapitre 9.

Rappelons qu'il s'agit d'une approximation qui ne vaut que pour  $\epsilon$  petit devant 1 et pour une maturité du zéro-coupon d'un an<sup>7</sup>.

### 10.1.3 Résolution du Modèle de Merton

Dans notre présentation du modèle de Merton au paragraphe 10.1.1, nous avons considéré que la valeur ainsi que la volatilité des actifs étaient connues. Cette situation est applicable dans certains cas (sociétés foncières, holding financières, etc.) où les actifs des sociétés sont négociables sur un marché. Dans tous les autres cas, les actifs n'étant pas négociables, la valeur ainsi que la volatilité des actifs ne sont pas directement observables<sup>8</sup>.

Lorsque l'approche directe n'est pas possible, les paramètres  $V_t$  et  $\sigma_V$  peuvent être estimés indirectement à partir de la valeur  $S_t$  et de la volatilité  $\sigma_S$  des actions de la société.

Au paragraphe 10.1.1, nous avons vu que les actions de la société pouvaient s'interpréter comme un Call sur la valeur des actifs  $V_t$  de prix d'exercice  $D$  et de maturité  $T$ . Par application de la formule de Black-Scholes, on en déduit la valeur de ces actions ( $\alpha$ ) :

$$S_t = V_t \times N(d_1) - D \times B(t, T) \times N(d_2)$$

On note par ailleurs que l'équilibre du bilan « économique » de la société est bien réalisé puisqu'en additionnant les valeurs des actions  $S_t$  et de la dette  $D_t$  et réarrangeant les termes, on retrouve bien la valeur des actifs  $V_t$  :

$$V_t = S_t + D_t$$

Il s'agit là d'une application particulière de la relation de parité call-put.

Afin de calculer  $V_t$  et  $\sigma_V$  en fonction de  $S_t$  et  $\sigma_S$  il est nécessaire de se doter d'une seconde équation.

Sous les hypothèses du modèle de Merton, la valeur des actions de la société suit un mouvement Brownien géométrique du type :

7.  $\epsilon = \frac{N(-h_1)}{l_t} - N(-h_2)$

8. C'est d'ailleurs l'un des problèmes principaux lié à la généralisation de la méthode de valorisation en « valeur de marché » (mark-to-market) qui bien que très séduisante sur le plan de la cohérence se heurte dans son application pratique à l'incomplétude et/ou à l'illiquidité de nombreux marchés dans et surtout en dehors de la sphère financière

$$dS_t = \mu \times S_t \times dt + \sigma_S \times S_t \times dB_t$$

avec :

- $S_t$  : Valeur des actions
- $\sigma_S$  : Volatilité de la valeur des actions
- $\mu$  : Rendement moyen des actions

Puisque les actions  $S_t$  sont un Call sur la valeur des actifs  $V_t$ , on peut donc écrire en toute généralité :

$$S_t = F(V_t, t)$$

Différençons cette dernière expression à l'ordre 1 en  $t$  et à l'ordre 2 en  $V_t$ , on obtient :

$$dS_t = \frac{\partial F}{\partial V_t} \times dV_t + \frac{\partial F}{\partial t} \times dt + \frac{1}{2} \times \sigma_V^2 \times V_t^2 \times \frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2} \times [dV_t]^2$$

Remplaçons  $dV_t$  par sa valeur et appliquons le Lemme d'Itô, on obtient :

$$dS_t = \left( \frac{1}{2} \times \sigma_V^2 \times V_t^2 \times \frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2} + r \times V_t \times \frac{\partial F}{\partial V_t} + \frac{\partial F}{\partial t} \right) \times dt + \sigma_V \times V_t \times \frac{\partial F}{\partial V_t} \times dB_t$$

Par identification des deux expressions précédentes de  $dS_t$  on déduit que la volatilité  $\sigma_S$  du processus  $S_t$  s'écrit ( $\beta$ ) :

$$\sigma_S = \sigma_V \times \frac{V_t}{S_t} \times N(d_1)$$

Les deux équations encadrées constituent un système d'équations non linéaire permettant de calculer  $V_t$  et  $\sigma_V$  en fonction de  $S_t$  et  $\sigma_S$ . Ce système n'est cependant pas soluble analytiquement, il est donc nécessaire d'adopter une approche numérique.

On peut écrire ce système d'équations sous la forme :

$$\begin{cases} V &= f_{S, \sigma_S}^1(V, \sigma_V) \\ \sigma_V &= f_{S, \sigma_S}^2(V, \sigma_V) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f_{S, \sigma_S}^1(V, \sigma_V) &= \frac{D \times B(t, T) \times N(d_2) + S}{N(d_1)} \\ f_{S, \sigma_S}^2(V, \sigma_V) &= \frac{1}{N(d_1)} \times \frac{S}{V} \times \sigma_S \end{cases}$$

En notant  $f=(f^1, f^2)$  et  $u=(V, \sigma_V)$  on peut écrire le système précédent sous la forme réduite :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= f(u_n) \\ u_0 &= (S + D, \sigma_S) \end{cases}$$

La solution du système initial est donnée par la limite de la suite  $(u_n)_{n>0}$  :

$$u^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \iff u^* = f(u^*)$$

Cette limite peut être calculée numériquement de façon itérative, le calcul s'arrête lorsque le critère suivant est vérifié :

$$\Delta_n = \|u_{n+1} - u_n\| < \epsilon$$

$\epsilon$  est choisi en fonction du degré de précision désiré.

A titre d'exemple, nous allons appliquer l'algorithme précédent sur une société fictive dont les caractéristiques « bilancielles » sont :

- Capitalisation boursière: 5 ME
- Volatilité des actions de la société: 50%
- Valeur nominale de la dette: 80 ME
- Maturité de la dette: 1A
- Taux d'intérêt sans risque: 3%

On démarre le processus itératif avec  $u_0 = (85, 50)$  et on prend  $10^{-5}$  comme seuil de convergence<sup>9</sup>.

Les valeurs obtenues pour la valeur  $V$  et la volatilité  $\sigma_V$  des actifs sont :

- $V$  : 82.615 ME
- $\sigma_V$  : 3.092%

On peut maintenant calculer les différents indicateurs de risque à l'aide des formules données au paragraphe 10.1.2, on obtient :

- Probabilité de défaut : 2.30%
- Taux de recouvrement anticipé: 99%
- Levier d'endettement : 94%
- Spread de crédit : 2.63bp

On vérifie de même que le bilan « économique » est bien équilibré :

- $S_t$ : 5 ME
- $D_t$ : 77.615 ME

On retrouve bien l'égalité  $V_t = S_t + D_t$ .

### 10.1.4 Limites et Développements

Le modèle de Merton tel que nous l'avons décrit ci-dessus peut faire l'objet de deux types de critiques :

1. Spécifiques au modèle de Merton stricto-sensu
2. Intrinsèques aux modèles dits « structurels » dont le modèle de Merton est l'archétype

Les critiques spécifiques portent sur certaines hypothèses du modèle qui ne correspondent pas avec la réalité souvent complexe de la vie des entreprises, à savoir :

- Les structures de passif des entreprises incluent généralement des dettes couponnées voir mêmes des obligations convertibles et/ou des obligations perpétuelles (titres hybrides) et beaucoup plus rarement des zéro-coupons
- Le seuil de défaut est incertain et en général inférieur à la valeur comptable de leur dette
- Les entreprises peuvent faire défaut (sur le principal de leur dette) à tout moment et non uniquement à la date d'échéance
- Les distributions de probabilités de défaut pour une distance au défaut donnée ne sont pas gaussiennes

9. On constate que l'algorithme converge après 10 itérations



Le modèle de Merton a fait l'objet de développements ultérieurs visant à s'affranchir de certaines de ses hypothèses dont les deux implémentations opérationnelles les plus connues sont :

- KMV<sup>10</sup> : Modèle « propriétaire » de la société Moody's qui commercialise son logiciel CreditMonitor (programme et données). Le modèle KMV a été initialement développé par Vasicek O. et Kealhofer S. afin d'étendre et d'améliorer le modèle de Merton. Bien que cohérent dans les grandes lignes avec l'approche décrite dans les trois paragraphes précédents, le modèle KMV s'en distingue néanmoins sur de nombreux aspects (cf. tableau 10.1 ci-dessous). En particulier, la fonction de distribution permettant de calculer la probabilité de défaut connaissant la distance au défaut est estimée empiriquement sur la base de données historiques de l'agence de notation Moody's. Selon Moody's-KMV cette distribution de probabilité ne dépend pas de facteurs spécifiques tels que l'industrie, la taille, la période ou le pays, tous ces facteurs sont capturés dans le calcul de la distance au défaut. Les probabilités de défaut à un an calculées par Moody's-KMV sont appelées « Expected Default Frequency » (EDF) en référence au caractère empirique de la distribution utilisée
- CreditGrades<sup>11</sup> : Modèle « ouvert » d'origine J.P. Morgan implémenté et commercialisé par la société RiskMetrics (programme et données). Le modèle théorique implémenté dans CreditGrades a été développé au sein du département R&D de la banque JP Morgan et vise à calculer la probabilité de défaut ou probabilité de survie (survival probability) d'une société donnée à un horizon donné. Comme pour le modèle de Moody's-KMV, il s'agit d'un modèle structurel cohérent dans sa conception avec le modèle de Merton mais néanmoins différent sur un certains nombre d'aspects (cf. tableau 10.1 ci-dessous). Le point essentiel dans ce modèle est la prise en compte d'un seuil de défaut aléatoire (log-normal). Cette propriété permet entre autre d'obtenir des probabilités de défaut à court terme cohérentes avec les probabilités de défaut implicites constatés dans le marché (calculées à partir des spreads de crédit)

Sans rentrer dans le détail de ces deux modèles, il peut néanmoins être intéressant de montrer comment ils se différencient du modèle de Merton au niveau des aspects suivants :

- Type des dette admissibles au passif
- Modélisation du seuil de défaut
- Formule de la distance au défaut
- Loi de distribution de la distance au défaut (probabilité de défaut)
- Calibrage du modèle à partir des données du marché action de la société

Le tableau 10.1 ci-dessous compare les trois modèles au niveau de ses différents critères.

10. Crosbie P. et Bohn J. (2003), « Modeling Default Risk », Moody's-KMV

11. Finger C.C. (ed, 2002), « CreditGrades Technical Document », RiskMetrics Group

|                            | Merton                                                     | Moody's-KMV                                                                                     | CreditGrades                                                                                                           |
|----------------------------|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Types de Dettes            | Zéro-coupon                                                | Zéro-coupon, dette couponnée classique, obligation convertible et obligation perpétuelle        | Zéro-coupon, dette couponnée classique, obligation convertible et obligation perpétuelle                               |
| Seuil de Défaut (DP)       | Dettes totale                                              | Entre la dette CT et la dette totale (n.c.)                                                     | Produit du ratio « dette par action » par le taux de recouvrement moyen en cas de défaut (Log-Normal)                  |
| Distance-au-Défaut (DD)    | $-d_2$                                                     | Ecart entre la valeur des actifs et le seuil de défaut par unité de risque et de valeur d'actif | Ecart entre le logarithme de la valeur des actifs et le logarithme du seuil de défaut par unité de risque              |
| Probabilité de Défaut (Pr) | Distribution théorique, Normale centrée-réduite            | Distribution empirique, non Normale                                                             | Distribution théorique, non Normale                                                                                    |
| Calibrage du Modèle        | Equations ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ) du paragraphe 10.1.3 | Equation ( $\alpha'$ ) pour une option à barrière et ( $\beta'$ ) non communiquée               | Equations ( $\alpha''$ ) et ( $\beta''$ ) obtenues en examinant les conditions aux bords à LT de la distance au défaut |

TAB. 10.1 – Comparatif des Modèles Structurels

Au-delà de ses problèmes spécifiques qui peuvent être en partie résolus par des évolutions du modèle initial, certaines critiques portent non pas uniquement sur le modèle de Merton, mais sur les modèles « structurels » dans leur ensemble :

- Utiliser le prix des actions pour calculer les probabilités de défaut revient à introduire dans ces estimations la « volatilité » à court terme des marchés actions et leur excès récurrents sur le moyen/long terme (bulles spéculatives)
- Ces modèles supposent implicitement que les marchés actions et les marchés de dettes corporate sont arbitrés ce qui n'a pas forcément été le cas dans le passé. Néanmoins, le décloisonnement progressif des activités actions et taux/crédit au sein des établissements financiers (banques et hedge-funds principalement) devrait concourir à terme à l'inter-efficacité progressive de ces deux marchés

Malgré les limitations que nous venons d'exposer, le modèle de Merton reste l'archétype des modèles « structurels » et son étude est riche d'enseignements qualitatifs.

## 10.2 Capital Structure Arbitrages

Nous allons dans cette section introduire les techniques d'arbitrage basées sur les modèles structurels en utilisant le modèle de Merton<sup>12</sup>. On commence par étudier la relation de dépendance entre le cours de l'action d'une société et le spread de crédit sur sa dette corporate dans le cadre du modèle de Merton. On décrit ensuite l'arbitrage intra- « capital structure » consistant à arbitrer les actions d'une société contre la dette de la même société. On termine par une présentation de l'arbitrage inter- « capital structure » consistant à arbitrer les actions d'une société contre son synthétique créé à partir des actions de deux sociétés du même secteur d'activité.

### 10.2.1 Relation entre le Spread de Crédit et le Cours des Actions

Dans ce paragraphe nous allons étudier la relation qui lie le cours des actions d'une société au spread de crédit (implicite) de sa dette. Problème simple a priori mais qui pose néanmoins la question du statut de la volatilité des actions.

#### Peut-on faire varier le cours des actions tout en supposant la volatilité des actions constante ?

Les évidences statistiques mentionnées dans la littérature ont au contraire tendance à montrer que la volatilité des indices boursiers et les indices eux-mêmes sont négativement corrélés :

- La volatilité tend à monter lorsque les indices baissent
- La volatilité tend à baisser lorsque les indices montent

Ce fait empirique a notamment été attesté sur le marché des actions US à partir des séries statistiques de l'indice S&P500 et de l'indice VIX qui mesure la volatilité implicite du S&P500 calculée à partir des options traitées sur le CBOE<sup>13</sup>.

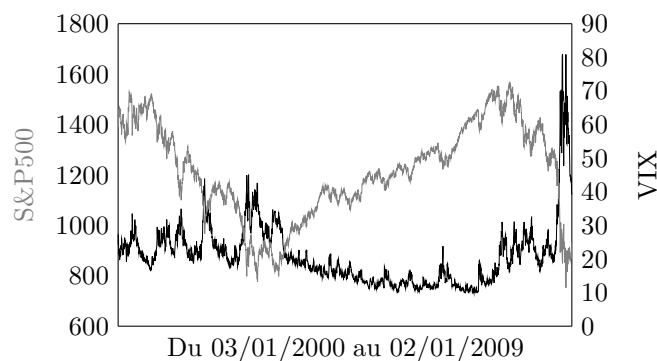


FIG. 10.3 – *Indice VIX vs Indice S&P500*

Le même constat peut être fait au niveau des sociétés individuelles.

#### Si on ne peut pas laisser la volatilité des actions d'une société donnée inchangée lorsque l'on fait varier le cours des actions de cette société, quelle relation doit-on prendre en compte entre les deux quantités ?

12. Cette section est en essentiellement basée sur des travaux de recherche réalisés par l'auteur de 2008 à 2013 qui n'ont pas fait l'objet de publication antérieure à ce polycopié

13. On consultera le document « VIX: CBOE Volatility Index » du CBOE (2003) pour plus d'informations sur la méthodologie de construction de cet indice

Une solution simple pour contourner ce problème consiste à fixer la volatilité des actifs de la société  $V$  et à résoudre le modèle de Merton en calculant  $V_t$  et  $\sigma_S$  en fonction de  $S_t$  et  $\sigma_V$ .

**La volatilité des actifs d'une société peut-elle être légitimement considérée comme constante ?**

La réponse est oui pour la plupart des sociétés.

La volatilité des actifs d'une société doit rester constante car elle dépend directement de son business model.

J.P. Crosbie et J.R. Bohn<sup>14</sup> ont montré que les deux facteurs les plus discriminants pour l'analyse des risques des actifs d'une société sont :

1. Le secteur d'activité
2. La taille de la société

Le premier facteur détermine la régularité des cash-flows. Certains secteurs d'activités ont des revenus récurrents et stables (banques de détails, opérateurs telecom ou sociétés d'auto-roues par exemple). D'autres secteurs, au contraire, ont des revenus plus « aléatoires » ou « cycliques » (banques d'investissement, équipementiers telecom, entreprises sidérurgiques ou sociétés pétrolières par exemple).

Le second facteur est aussi important car, toutes choses égales par ailleurs, plus la taille de la société est grande et plus le risque sur ses actifs est faible. Trois effets contribuent à ce phénomène :

- Diversification : La diversification s'entend au sens géographique (EMEA, Amérique, Asie) et par types de clientèle (professionnels vs particuliers ou grands comptes vs PMI/PME, par exemple)
- Leadership : Le leader sur un marché peut plus facilement imposer ses prix (« pricing power ») ce qui n'est pas le cas de ses challengers
- Protectionnisme : Certains gouvernements ont tendance à favoriser leurs grands groupes nationaux sur leur marché domestique en permettant l'établissement de monopoles ou d'oligopoles via diverses procédures réglementaires, fiscales ou financières

Au final, pour une société évoluant sur un secteur mature, le risque intrinsèque associé à son actif peut donc être considéré comme constant.

Cette analyse nous amène à reconsidérer la résolution du modèle de Merton telle qu'elle a été exposée au paragraphe 10.1.3.

On peut donc écrire le système d'équations précédent sous la nouvelle forme<sup>15</sup> :

$$\begin{cases} V &= g_{S,\sigma_V}^1(V,\sigma_S) \\ \sigma_S &= g_{S,\sigma_V}^2(V,\sigma_S) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g_{S,\sigma_V}^1(V,\sigma_S) &= \frac{D \times B(t,T) \times N(d_2) + S}{N(d_1)} \\ g_{S,\sigma_V}^2(V,\sigma_S) &= N(d_1) \times \frac{V}{S} \times \sigma_V \end{cases}$$

En notant  $g=(g^1,g^2)$  et  $u=(V,\sigma_S)$  on peut écrire le système précédent sous la forme :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= g(u_n) \\ u_0 &= (S + D, \sigma_V) \end{cases}$$

14. Crosbie J.P et Bohn J.R (2003), Modeling Default Risk, Moody's-KMV

15. Seule la seconde équation change (on cherche  $\sigma_S$  et non plus  $\sigma_V$  qui est maintenant donné), la première équation est quant à elle inchangée (on cherche toujours  $V$ )

La solution du système initial est donnée par la limite  $u^*$  de la suite  $(u_n)_{n>0}$  calculée de la même façon qu'au paragraphe 10.1.3.

L'exemple numérique qui suit permet d'illustrer concrètement les deux approches possibles dans la résolution du modèle de Merton ainsi que la relation fondamentale entre le spread de crédit et le cours des actions.

Appliquons l'algorithme précédent sur une société fictive avec les données suivantes :

- Capitalisation boursière: 5 ME
- Volatilité des actifs de la société: 10%
- Valeur nominale de la dette: 80 ME
- Maturité de la dette: 1A
- Taux d'intérêt sans risque: 3%

On démarre le processus itératif avec  $u_0 = (85, 50)$  et on prend  $10^{-5}$  comme seuil de convergence<sup>16</sup>.

Les valeurs obtenues pour la valeur  $V$  et la volatilité  $\sigma_S$  sont :

- $V$  : 80.815 ME
- $\sigma_V$  : 108.96%

On peut maintenant calculer les différents indicateurs de risque à l'aide des formules données au paragraphe 10.1.2, on obtient :

- Probabilité de défaut : 36.26%
- Taux de recouvrement anticipé: 93.5%
- Levier d'endettement : 96%
- Spread de crédit : 237.3bp

On vérifie de même que le bilan « économique » est bien équilibré :

- $S_t$ : 5 ME
- $D_t$ : 75.815 ME

On retrouve bien l'égalité  $V_t = S_t + D_t$ .

La différence essentielle entre les deux exemples vient de la volatilité des actifs qui est à 10% (donné) dans cet exemple et à 3% (calculé) dans le précédent.

Venons-en maintenant à la relation entre le prix des actions et le spread de crédit dans le cadre du modèle de Merton.

Le graphique 10.4 ci-dessous montre comment évolue le spread de crédit en fonction de la capitalisation boursière (pour des valeurs comprises entre 1 ME et 50 ME) d'une même société.

<sup>16</sup>. On constate que l'algorithme converge après 6 itérations

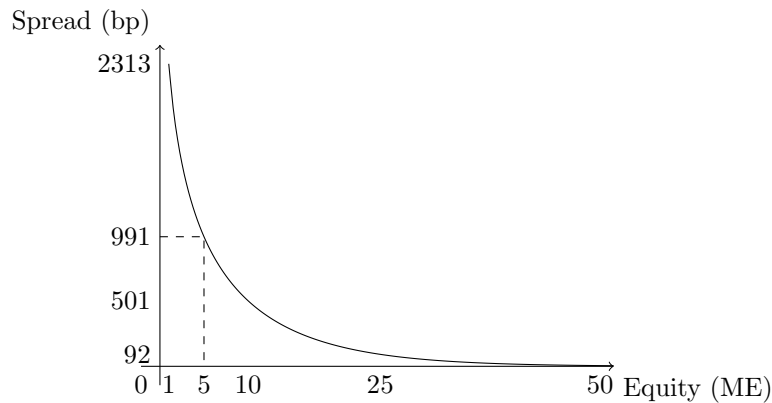


FIG. 10.4 – Relation entre le Spread de Crédit et la Valeur des Actions

De façon générale, le spread de crédit évolue en sens inverse du cours de l'action du simple fait que plus l'action monte et plus la valeur de la composante optionnelle de la dette diminue (Put sur la valeur des actifs).

Plus précisément lorsque le cours des actions :

- Est proche de zéro, la composante optionnelle de la dette (Put sur la valeur des actifs) est à la monnaie et devient prépondérante dans le pricing. Toute baisse supplémentaire a un double impact combiné sur la hausse de la probabilité de défaut et de la perte en cas de défaut
- Est très élevé, la composante optionnelle de la dette (Put sur la valeur des actifs) est très en dehors de la monnaie et c'est la composante « sans risque » de la dette qui devient prépondérante. Le spread de crédit est donc quasi-nul et ne varie pratiquement plus avec la hausse du cours des actions

Cette relation est à la base des techniques d'arbitrage de type « Actions vs Dettes » que l'on va étudier au paragraphe 10.2.2.

### 10.2.2 Arbitrage Actions vs Dettes

Nous avons vu à la section 10.1 que, dans le cadre du modèle de Merton, les actions et la dette d'une société peuvent être interprétées comme des « produits dérivés » sur un même sous-jacent, l'actif de la société. **Nous allons dans ce paragraphe regarder dans quelle mesure ce constat peut être utilisé pour arbitrer les actions de la société contre la dette de la même société.**

Supposons que l'on constate à une date  $t$  quelconque que la dette cotée sur le marché est sur-évaluée par rapport à sa valeur théorique calculée dans le cadre du modèle de Merton à partir de la valeur de marché des actions.

$$D_t^{Merton} < D_t^{Market}$$

Cette situation s'interprète comme un mis-pricing entre le marché action et le marché de la dette de la société.

Une première idée pour « jouer » ce mis-pricing consiste à monter la position suivante :

- Long Actions (1)
- Short Dette ( $\alpha$ )

Sans perte de généralité on raisonne sur la totalité du passif de la société et on note par  $\alpha$  le hedge-ratio de la position.

La valeur de la position d'arbitrage s'écrit :

$$V_t^{Arb} = S_t - \alpha \times D_t$$

On joue le retour de la valeur de marché de la dette de la société sur sa valeur théorique calculée dans le cadre du modèle de Merton à partir de la valeur de marché des actions.

$$D_{t \rightarrow t'}^{Market} \longrightarrow D_{t \rightarrow t'}^{Merton}$$

On ne souhaite évidemment pas prendre de risque directionnel sur la valeur des actifs de la société (sous-jacent commun aux deux composantes du passifs). On va donc couvrir la position pour qu'elle soit insensible en première approximation (position delta-neutre) aux variations de la valeur des actifs de la société.

$$\Delta V_t^{Arb} \equiv 0 \quad \text{pour} \quad \Delta V \neq 0 \quad (\text{contrainte de couverture})$$

En reprenant l'interprétation en terme optionnel des deux composantes du passif, on a :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Long} \quad 1 \quad \text{Actions} \\ \text{Short} \quad \alpha \quad \text{Dette} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Long} \quad \alpha - \text{Straddle} \\ \text{Short} \quad \text{ZC sans risque} \end{array} \right.$$

avec

$$\text{Long} \quad \alpha - \text{Straddle} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Long} \quad 1 \text{ Call} \\ \text{Long} \quad \alpha \text{ Put} \end{array} \right.$$

Le Call et le Put sont des options sur la valeur des actifs de la société de même prix d'exercice (montant nominal de la dette) et même date d'échéance (échéance de la dette). Puisque le zéro-coupon sans risque n'est pas sensible (par définition) à la valeur des actifs, on peut raisonner sur le straddle et calculer le hedge-ratio qui vérifie notre contrainte de couverture.

$$\Delta V_t^{Arb} = 0 \quad \text{pour} \quad \Delta V \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{\Delta_{Call}}{\Delta_{Put}}$$

où  $\Delta_{Call}$  et  $\Delta_{Put}$  sont les deltas respectifs du Call et du Put, on a donc :

$$\alpha = \frac{N(d_1)}{N(-d_1)} \quad (\text{hedge-ratio})$$

Ainsi construite, notre position d'arbitrage initiale est delta-neutre mais est aussi :

- Gamma-positif
- Theta-négatif
- Véga-neutre

En effet, puisque le gamma d'un Call et d'un Put sur un même sous-jacent, un même prix d'exercice et une même date d'échéance sont égaux, on a :

$$\Gamma_{Arb.} = \Gamma_{C/P} \times \frac{1}{N(-d_1)} > 0$$

On est theta-négatif du simple fait que l'on est long des deux options (on perd donc la valeur temps des options au fur et à mesure que l'on se rapproche de la date d'échéance des options). Enfin, on est véga-neutre par hypothèse d'une volatilité des actifs constante comme justifiée au paragraphe 10.2.1. Indépendamment du zéro-coupon, on constate donc que notre position d'arbitrage initiale est aussi un pari sur une variation du sous-jacent plus importante que la perte de valeur temps sur l'horizon de placement.

**Pour obtenir un arbitrage parfait, il faudrait monter une position qui soit gamma-neutre et theta-neutre en plus d'être delta-neutre et véga-neutre.** Il faudrait donc pouvoir arbitrer directement la dette de la société avec son synthétique coté dans le marché.

Supposons que le marché cote les Put sur la valeur des actifs de la société, de même prix d'exercice (montant nominal de la dette) et même date d'échéance (échéance de la dette) que ceux de l'option implicite dans la décomposition de la dette de la société. On va donc monter la position suivante :

- Short Dette (1)
- Long Dette Synthétique (1)

Pour reconstituer une position longue sur la dette synthétique de la société, on va se mettre simultanément :

- Long Zéro-Coupon sans risque de maturité T et de nominal D
- Short Put sur la valeur des actifs de la société de maturité T et de prix d'exercice D

On a donc au final :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Short } 1 \quad \text{Dette} \\ \text{Long } 1 \quad \text{Dette Synthétique} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Short } \text{Put Implicite} \\ \text{Long } \text{Put Réel} \end{array} \right.$$

Cette position est un arbitrage parfait et peut être débouclée à l'échéance avec une valeur nulle :

$$V_{Arb., T} \equiv 0 \quad (\text{par construction})$$

Le P/L de cette position sur  $[t, T]$  est précisément égal à la différence entre la valeur de la dette dans le marché et sa valeur théorique (à condition que le Put soit coté à partir des actions de la société) :

$$P/L_{t \rightarrow T}^{Arb.} = D_t^{Market} - D_t^{Merton} > 0$$

Notons pour terminer que cet arbitrage parfait suppose pour être mis en oeuvre qu'il existe des Put cotés sur la valeur des actifs de la société ce qui implique que cet actif soit lui-même coté.



### 10.2.3 Arbitrage Actions vs Synthétiques Actions

Considérons trois sociétés (A, B et C) appartenant au même secteur d'activité et dont on suppose que les actifs sont identiques (au sens du modèle de Merton), à savoir :

$$\begin{cases} \sigma_V^A = \sigma_V^B = \sigma_V^C = \sigma_V & (\text{mêmes volatilités}) \\ \rho_V^{A,B} = \rho_V^{B,C} = \rho_V^{C,A} = 1 & (\text{parfaitement corrélés}) \end{cases}$$

On suppose de plus que les dettes zéro-coupon des trois sociétés ont la même date de maturité T.

Afin de faire abstraction des différences de taille entre ces trois sociétés, on travaille sur la base d'une valeur d'actif normalisée :

$$V_t^A = V_t^B = V_t^C = V_t \quad (\text{valeurs d'actifs normalisées})$$

Puisque dans le cadre du modèle de Merton, les trois paramètres fondamentaux pour l'analyse du risque de crédit d'une société sont :

- La valeur des actifs  $V_t$
- La volatilité des actifs  $\sigma_V$
- Le levier d'endettement  $l_t$

il est donc possible de créer un « synthétique » de la société C à partir d'un portefeuille constitué d'une part  $\alpha$  de la société A et d'une part  $(1-\alpha)$  de la société B<sup>17</sup> :

$$\text{''Synthétique'' Société C} = \alpha \times \text{Société A} + (1 - \alpha) \times \text{Société B}$$

Le calcul du paramètre  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) est réalisé en exigeant que le synthétique de la société C créé à partir des sociétés A et B ait le même leverage ratio que la société C :

$$l_t^{\alpha \times A + (1-\alpha) \times B} \equiv l_t^C \quad (\text{contrainte de couverture})$$

avec

$$l_t^C = \frac{D^C \times B(t,T)}{V_t^C} \quad \text{et} \quad l_t^{\alpha \times A + (1-\alpha) \times B} = \frac{[\alpha \times D^A + (1 - \alpha) \times D^B] \times B(t,T)}{\alpha \times V_t^A + (1 - \alpha) \times V_t^B}$$

En remplaçant dans la contrainte de couverture précédente les membres de gauche et de droite par leurs expressions respectives, on trouve finalement la valeur de  $\alpha$ <sup>18</sup>:

$$\alpha = \frac{D^C - D^B}{D^A - D^B}$$

On en déduit immédiatement que le nominal de la dette de la société Synt-C est égal au nominal de la dette de la société C :

$$D^{\text{Synt-C}} \equiv D^C$$

17. Le lecteur notera la similitude entre cette position d'arbitrage sur le marché action et les positions de type « butterfly » obligataire décrites au Chapitre 4. De fait, cet arbitrage « Actions Société C vs Synthétique - Actions Société C » peut parfaitement s'interpréter comme un « butterfly » actions. Le synthétique est de nature structurel (Merton) sur le marché action alors qu'il est de nature actuariel sur le marché obligataire

18. On note que  $\alpha$  ne dépend pas de t

Plus généralement, la société C et son synthétique créé à partir des sociétés A et B sont deux sociétés identiques dans le cadre du modèle de Merton :

$$\text{Société C} \underset{\text{Merton}}{\iff} \text{Synthétique } \alpha \times A + (1 - \alpha) \times B$$

Compte tenu des hypothèses sur les actifs des trois sociétés et de la contrainte de couverture, on montre facilement que les profils (au sens de Merton) des deux sociétés sont les mêmes :

$$\begin{cases} V_t^C &= V_t^{\alpha \times A + (1-\alpha) \times B} = V_t \\ \sigma_V^C &= \sigma_V^{\alpha \times A + (1-\alpha) \times B} = \sigma_V \\ I_t^C &= I_t^{\alpha \times A + (1-\alpha) \times B} \end{cases}$$

Enfin, si la société C et son synthétique  $Synt - C = \alpha \times A + (1 - \alpha) \times B$  sont identiques au sens de Merton, les valeurs de leurs actions respectives doivent être les mêmes<sup>19</sup> :

$$S_t^C \equiv S_t^{Synt-C}$$

Supposons que l'on constate à une date t quelconque que la capitalisation boursière de la société C est sous-évaluée par rapport à sa valeur théorique calculée dans le cadre du modèle de Merton à partir des capitalisations boursières des sociétés A et B.

$$S_t^C < S_t^{Synt-C}$$

Cette situation s'interprète comme un mis-pricing au sein du marché action entre les sociétés « équivalentes » (au sens de Merton) A, B et C.

Pour « jouer » ce mis-pricing, nous allons donc monter la position suivante :

- Long Actions Société C
- Short Actions « Synthétique » Société C

On est donc simultanément long d'un Call sur la valeur des actifs de la société C et short d'un Call sur la valeur des actifs de la société Synt-C avec :

$$\text{Actifs C} \underset{\text{Merton}}{\equiv} \text{Actifs Synt - C}$$

Ces deux Call ont la même date d'échéance et le même prix d'exercice.

Cette position est un arbitrage parfait et peut être débouclée à l'échéance des options avec une valeur nulle :

$$V_{Arb, T} \equiv 0 \quad (\text{par construction})$$

Le P/L de cette position sur [t, T] est précisément égal à la différence entre la valeur de la société C dans le marché et sa valeur théorique :

$$P/L_{t \rightarrow T}^{Arb} = S_t^{Synt-C} - S_t^C > 0$$

Notons que dans le cadre du modèle de Merton, l'existence d'une date d'échéance garantie le P/L de cette stratégie à cette date. Dans le cadre des modèles Moody's-KMV et CreditGrades (et a fortiori dans le monde réel) les actions sont des options à barrière de type « down-out » perpétuelles qui par nature n'offrent pas de garantie de retour à zéro de la valorisation de la position d'arbitrage à une date future donnée.

<sup>19</sup>. Cette propriété résulte trivialement des égalités précédentes sur la valeur des actifs et le nominal de la dette

## 10.3 Application au Pricing des Obligations Convertibles

Les obligations convertibles en actions ont été créés au 19<sup>ème</sup> siècle aux Etats-Unis afin d'obtenir des produits financiers hybrides « attractifs » combinant :

- Gain potentiel « illimité » des actionnaires
- Risque « limité » des créanciers

Cette attractivité apparente des obligations convertibles a néanmoins un coût lié au pricing de l'option de conversion qui se matérialise par un prix plus élevé que l'obligation équivalente non convertible.

### 10.3.1 Généralités sur les Obligations Convertibles

Une obligation convertible<sup>20</sup> est une obligation à taux fixe et amortissement « in fine » émise par un émetteur privé (corporate) à laquelle est attachée un droit de convertibilité en actions de la société émettrice (contrairement à une obligation corporate classique non convertible).

Le profil « rendement-risque » hybride des obligations convertibles est obtenu grâce à l'option de conversion qui permet au détenteur d'obligations convertibles de convertir ses titres en un nombre prédéfini d'actions de la société émettrice. On appelle Ratio de Conversion (RC) le nombre d'actions obtenues lors de la conversion d'une obligation, il est défini contractuellement à l'émission de l'obligation convertible.

|                                                                                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| $1 \text{ Obligation Convertible} \xrightarrow[\text{Conversion}]{} RC \text{ Actions}$ |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|

Ce ratio de conversion est normalement fixe pendant toute la durée de vie de l'obligation convertible (pour les structures « plain vanilla ») mais doit évidemment être modifié dans certains cas d'opérations sur titres (OST).

Outre la convertibilité, les obligations convertibles se distinguent des obligations corporate non convertibles sur trois autres points :

- **Cotation** : Les obligations convertibles sont généralement cotées en bourse tout comme leur « sous-jacent » action alors que les obligations corporate classiques se négocient généralement sur le marché OTC
- **Rang de Créance** : Les obligations convertibles sont généralement junior par rapport aux obligations corporates non convertibles (mais bien évidemment sénior par rapport aux actions de la société émettrice). Ce point prend toute son importance pour des sociétés en difficulté ou en restructuration pour lesquelles la probabilité d'occurrence d'un défaut n'est pas négligeable
- **Prime de remboursement** : Les obligations convertibles sont remboursées soit « au pair » soit à un prix de remboursement supérieur au pair. Dans ce dernier cas, l'écart entre le prix de remboursement effectif et le pair calculé en pourcentage du pair est appelé prime de remboursement

Toutes choses égales par ailleurs, le taux de coupon d'une obligation convertible à l'émission est inférieur à son équivalent non convertible du fait de l'option de conversion attachée à l'obligation convertible dont ne bénéficie pas le détenteur d'obligations non convertibles.

20. On pourra consulter l'ouvrage de Cazaubieilh F. (2002), Théorie et Pratique des Obligations Convertibles en Actions et des Produits Assimilés, Maxima Ed., pour une introduction générale sur les obligations convertibles

$$C_{Convertible} < C_{Non\ Convertible} \quad (\text{toutes choses égales par ailleurs})$$

L'écart correspond à la « prime » payée par l'investisseur pour bénéficier des avantages liés à l'option de conversion (participation à la hausse du cours de l'action).

- L'investisseur abandonne ainsi une part de rendement (coupon moindre) pour l'espoir d'une plus-value (potentiellement illimité) selon l'évolution du cours de l'action sur la durée de vie de l'obligation
- L'émetteur peut obtenir un financement à moindre coût auprès d'investisseurs qui n'auraient ni souscrit à l'introduction en bourse ou à une augmentation de capital (trop risquée), ni à l'émission d'obligations classiques (aucune participation au succès éventuel de l'entreprise)

Le graphique 10.5 décrit l'évolution du prix théorique d'une obligation convertible en fonction du cours de l'action sous-jacente en considérant les autres paramètres constants (date de pricing, courbe des taux État, spread de crédit). L'écart correspond à la « prime » payée par l'investisseur pour bénéficier des avantages liés à l'option de conversion (participation à la hausse du cours de l'action).

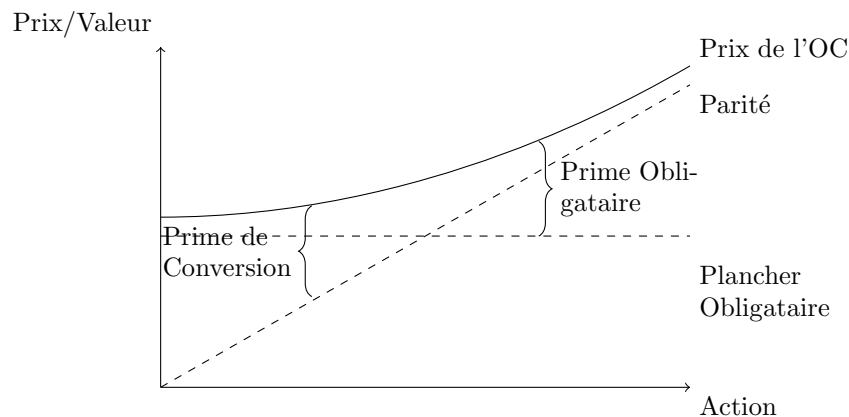


FIG. 10.5 – *Prix d'une Obligation Convertible / Prix de l'Action « Sous-Jacente »*

On constate que le prix de l'obligation convertible est borné inférieurement par les deux quantités suivantes :

- Plancher Obligataire: La valeur  $V_{OBL}$  d'une obligation classique ayant les mêmes caractéristiques que l'obligation convertible (taux de coupon, maturité, prix de remboursement, rang de créance, etc.) mais sans l'option de conversion
- Parité: La valeur du portefeuille constitué de  $RC$  actions de la société émettrice, appelée aussi « valeur de conversion » de l'obligation convertible

La valeur d'une obligation convertible  $V_{OC}$  est toujours supérieure au maximum du plancher obligataire et de la parité (en l'absence d'opportunités d'arbitrages) :

$$V_{OC} > \text{Max}(V_{OBL}, RC \times P_{ACT})$$

Pour le démontrer, raisonnons par l'absurde en distinguant deux cas.

Si  $V_{OC} \leq V_{OBL}$ , les porteurs d'obligations classiques ont intérêt à arbitrer en vendant leurs obligations non convertibles et en achetant simultanément des obligations convertibles ce qui mécaniquement fait remonter la valeur de l'obligation convertible au delà du plancher obligataire.

Si  $V_{OC} < RC \times P_{ACT}$ , les opérateurs peuvent réaliser l'arbitrage sans risque suivant :

- Achat d'1 obligation convertible au prix  $V_{OC}$
- Exercice de l'option de conversion (échange d'1 OC contre RC Actions)
- Revente des RC Actions sur le marché

Au total le gain sans risque pour l'investisseur est de  $RC \times P_{ACT} - V_{OC} \geq 0$

Dans les deux cas, le marché ne price pas l'option de conversion attachée à l'obligation convertible ce qui n'est pas possible sous hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). On note, de plus, que l'exercice de l'option de conversion par anticipation n'est pas optimale.

Les obligations convertibles se négocient donc avec une prime au dessus du plancher obligataire et de la parité. On appelle :

- Prime de Conversion : La sur-valeur de l'obligation convertible au dessus de la parité
- Prime Obligataire : La sur-valeur de l'obligation convertible au dessus du plancher obligataire

Ces primes sont souvent exprimées sous formes relatives (en %) :

$$\begin{cases} \text{Prime de Conversion} & = \frac{V_{OC} - RC \times P_{ACT}}{RC \times P_{ACT}} \\ \text{Prime Obligataire} & = \frac{V_{OC} - V_{OBL}}{V_{OBL}} \end{cases}$$

### 10.3.2 Pricing des Obligations Convertibles

Nous allons appliquer le principe de pricing par arbre binomial, développé initialement par J.A. Cox, S.A. Ross et M. Rubinstein dans le cadre des options<sup>21</sup>, pour pricer les obligations convertibles<sup>22</sup>.

Pour rappel, le principe du pricing par arbre binomial est composé de deux étapes principales :

- Simulation de la variable d'état de l'instrument à pricer sur un nombre fini de périodes et en considérant deux états du monde possibles à chaque nœud (étape « Forward »)
- Pricing récursif de l'instrument à pricer où à chaque nœud on applique la méthode de valorisation par actualisation au taux sans risque des cashflows futurs sous probabilité risque-neutre (étape « Backward »)

La valorisation théorique de l'instrument financier est la valeur obtenue à la racine de l'arbre (en date de pricing).

Cette méthode de pricing peut être appliquée au cas des obligations convertibles avec les précisions suivantes :

- Variable d'état : Cours de l'action sous-jacente
- Horizon : Maturité de l'obligation convertible
- Périodicité (minimale) : Dépend de la structure de l'instrument

Notons qu'en pratique, le nombre de périodes à prendre en compte résulte d'un arbitrage entre la précision désirée et le temps de calcul.

21. Cox J.C., Ross S.A., and Rubinstein M. (1979), "Option Pricing: A Simplified Approach." Journal of Financial Economics 7

22. Le lecteur est invité à se référer à l'ouvrage de Colmant B. & Delfosse V. (2005), « Les Obligations Convertibles - Mathématique financière et comptabilisation », Larcier Editeur, pour un exposé exhaustif des méthodes de pricing et de valorisation des obligations convertibles

**10.3.2.1 Simulation du Cours de l'Action (Forward)**

On suppose que le cours de l'action de la société suit un processus stochastique de type mouvement Brownien géométrique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r \times dt + \sigma_S \times dB_t$$

avec

- $S_t$  : Cours de l'actions
- $\sigma_S$  : Volatilité des actions
- $r$  : Taux sans risque

$dB_t$  est un processus de Weiner standard.

La méthode binomiale consiste à créer une version simplifiée de ce processus stochastique dans laquelle :

- Le temps est discrétisé en un nombre fini de dates ( $t=0 \dots T$ )
- $S_{t+1}$  ne peut prendre que deux valeurs possibles fonctions de  $S_t$

Si  $S_0$  est la valeur de l'action connue avec certitude à la date  $t_0$  (date de pricing), les deux règles de construction précédentes impliquent que les valeurs possibles pour le processus simplifié  $\{S_t\}_{t=0 \dots T}$  peuvent être représentées par un arbre binaire de profondeur  $T$ .

Notons que pour un arbre binaire quelconque de profondeur  $T$ , le nombre total de nœuds est de l'ordre de  $T^3$ . Afin de limiter le nombre de nœuds (et donc le temps le calcul) dans des conditions normales de pricing ( $T$  grand), il est d'usage d'utiliser un type particulier d'arbre binaire appelé arbre binaire recombinaut. Un arbre binaire recombinaut est un arbre binaire pour lequel les deux nœuds « fils » (date  $t+1$ ) obtenus à partir du même nœud père (date  $t$ ) par les séquences « up => down » et « down => up » sont identiques<sup>23</sup>. Le nombre total de nœuds dans un arbre binaire recombinaut est de l'ordre de  $T^2$ .

Plaçons-nous à un nœud quelconque de l'arbre binaire (date  $t$ ) pour lequel la valeur de l'action est  $S_t$ . Les valeurs possibles pour les deux nœuds fils (date  $t+1$ ) qui garantissent le caractère recombinaut de l'arbre sont données par les formules :

$$\begin{cases} S_{t+1}^u = u \times S_t & u > 1, \text{proba} = p_u \\ S_{t+1}^d = d \times S_t & d < 1, \text{proba} = p_d \end{cases}$$

Les trois paramètres  $u$ ,  $d$ ,  $p_u$  ( $p_d = 1 - p_u$ ) sont des constantes dépendants des paramètres du processus stochastique initial.

<sup>23</sup>. Le nombre total de nœuds pour un arbre binaire recombinaut de profondeur  $T$  est de l'ordre de  $T^2$  ce qui représente un gain important en terme de temps calcul lorsque  $T$  devient grand.

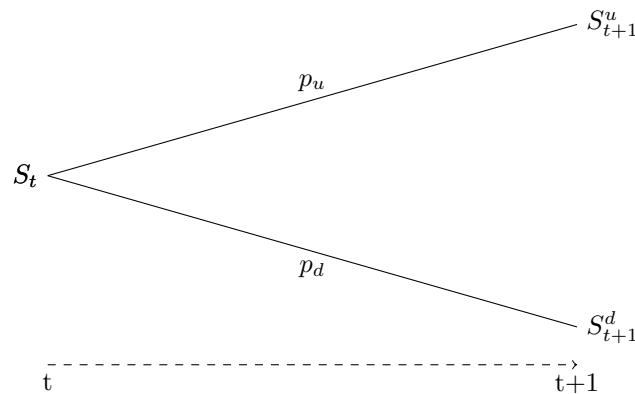


FIG. 10.6 – Un Nœud Générique de l'Arbre Binaire

Le graphique 10.6 ci-dessus décrit un nœud quelconque de l'arbre binaire.

En pratique, on utilise les valeurs de  $u$  et  $d$  suivantes :

$$u = e^{\sigma_S \times \sqrt{\Delta t}} \quad \text{et} \quad d = e^{-\sigma_S \times \sqrt{\Delta t}}$$

$\Delta t$  est le pas de la discrétisation.

On calcule finalement la probabilité risque-neutre  $\{p\}_{u,d}$  qui permet le passage d'un nœud à ses deux nœuds fils en appliquant la formule générale de valorisation par actualisation au taux sans risque de l'espérance des cashflows futurs sous probabilité risque-neutre :

$$S_t = e^{-r \times \Delta t} \times E_{\{p\}} [S_{t+1}]$$

En remplaçant l'espérance de  $S_{t+1}$  sous la probabilité  $\{p\}$  par sa valeur :

$$E_{\{p\}} [S_{t+1}] = p_u \times u \times S_t + p_d \times d \times S_t$$

On en déduit finalement les probabilités  $p_u$  et  $p_d$  :

$$p_u = \frac{e^{r \times \Delta t} - d}{u - d} \quad \text{et} \quad p_d = \frac{u - e^{r \times \Delta t}}{u - d}$$

A ce stade, on est donc en mesure de construire un arbre binaire recombinaut simulant les valeurs possibles du cours de l'actions  $S_t$  à chaque date  $t$  ( $t=0 \dots T$ ) et à chacun des nœuds correspondants à ces dates.

### 10.3.2.2 Pricing Récursif de l'Obligation Convertible (Backward)

L'étape suivante consiste à calculer la valeur théorique de l'obligation convertible de façon « backward » en passant des feuilles de l'arbre binaire (en date  $T$ ) jusqu'à la racine de l'arbre (en date  $t_0$ ) en procédant de façon récursive.

Les valeurs théoriques de l'obligation convertible aux nœuds terminaux sont simples à calculer du fait que ces nœuds correspondent à la date de maturité  $T$  de l'obligation convertible et que la valeur d'une obligation convertible est définie contractuellement à cette date.

Plus précisément, la valeur  $V_T$  de l'obligation convertible en date de maturité  $T$  correspond au maximum entre sa parité et son prix de remboursement :

$$V_T = \text{Max}(RC \times S_T, P_T + C)$$

avec

- $RC$  : Ratio de conversion
- $S_T$  : Cours de l'action en  $T$
- $P_T$  : Prix de remboursement de l'obligation en  $T$

Le calcul des valeurs terminales de l'obligation convertible est le point de départ du pricing de l'obligation convertible dans l'arbre binaire. L'étape suivante consiste à calculer la valeur théorique de l'obligation convertible aux nœuds de date  $T-1$  et ainsi de suite de façon récursive jusqu'à la racine de l'arbre en date  $t_0$ .

Plaçons-nous maintenant à un nœud quelconque de l'arbre binaire (date  $t$ ) pour lequel les valeurs de l'obligation convertible aux nœuds fils (date  $t+1$ ), précédemment calculés, sont respectivement  $V_{t+1}^u$  et  $V_{t+1}^d$ . On obtient la valeur théorique de l'obligation convertible  $V_t$  en calculant d'abord l'espérance mathématique de la valeur théorique de l'obligation convertible en  $t+1$  sous la probabilité risque-neutre  $\{p\}_{u,d}$  puis en actualisant le résultat obtenu au taux sans risque ajusté d'un spread de crédit  $Sp_t$  :

$$V_t = e^{-(r+Sp_t) \times \Delta t} \times [p_u \times V_{t+1}^u + p_d \times V_{t+1}^d] + C$$

Notons que l'actualisation n'est pas réalisée au seul taux sans risque  $r$  car la probabilité  $\{p\}$  est risque-neutre pour la dynamique de l'action sous-jacente à l'obligation convertible. Le risque de crédit associé à l'obligation n'est pas pris en compte dans la probabilité  $\{p\}$ . Notons enfin que ce spread de crédit exogène  $Sp_t$  est, en toute généralité, fonction du nœud considéré<sup>24</sup>.

Comme l'option de conversion est de type « américaine », on doit intégrer l'hypothèse de conversion anticipée dans l'équation précédente qui devient :

$$V_t = \text{Max}(RC \times S_t, V_t)$$

$S_t$  est le cours de l'action au nœud considéré.

En appliquant cette formule récursivement des nœuds de date  $t+1$  vers les nœuds de date  $t$  jusqu'à la racine de l'arbre, on obtient finalement la valeur théorique de l'obligation convertible qui n'est autre que  $V_0$ .

### 10.3.3 Endogénéisation du Spread de Crédit

L'étude du modèle de Merton réalisée au début de ce chapitre nous a montré que le cours de l'action d'une société et le spread de crédit de la dette de cette société sont deux quantités interdépendantes. Il semble donc cohérent d'utiliser, dans la formule de pricing donnée au paragraphe 10.3.2 (partie « backward » de la méthode de pricing par arbre binomial), un spread de crédit  $Sp_t$  qui soit fonction du cours de l'action  $S_t$ .

On commence par se donner une structure de bilan en intégrant au passif les obligations convertibles émises par la société.

<sup>24</sup> L'intégration dans le modèle d'un spread de crédit variable cohérent avec le prix de l'action sous-jacente à chaque nœud est étudiée au paragraphe 10.3.3.



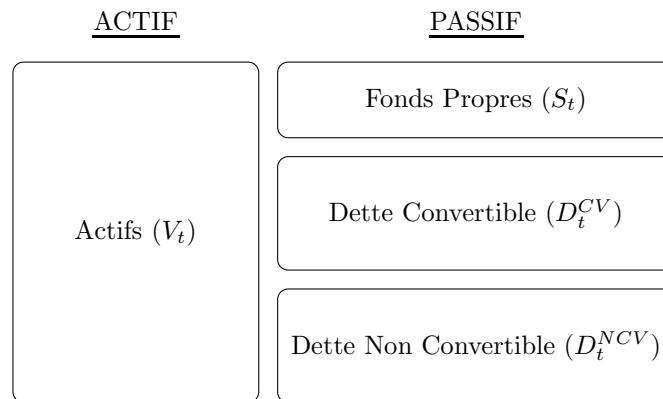


FIG. 10.7 – Bilan Economique (Modifié) d'une Entreprise

Il s'agit d'un bilan « économique » comme défini au paragraphe 10.1.1 avec les précisions suivantes :

- $D_t^{CV}$  est la valorisation économique de la dette convertible
- $D_t^{NCV}$  est la valorisation économique de la dette non convertible

On suppose que les dettes convertibles et non convertibles ont la même date de maturité  $T$ .

Deux modèles sont envisageables pour endogénéiser le spread de crédit :

1. Modèle hybride
2. Modèle structurel

L'approche usuelle consiste à utiliser un **modèle hybride** permettant d'exprimer le spread de crédit  $Sp_t$  comme une fonction paramétrique du cours de l'action  $S_t$  :

$$Sp_t = F_\lambda(S_t)$$

Cette approche a le mérite de la simplicité mais pose deux problèmes :

- Quid du choix de la forme fonctionnelle  $F$  et surtout de l'estimation du paramètre  $\lambda$  (scalaire ou vectoriel) associé
- Impossibilité de tenir compte des changements de la structure du passif de la société liés à la convertibilité de l'obligation convertible

Une façon élégante, bien que plus complexe, de résoudre ces deux problèmes consiste à endogénéiser le calcul du spread de crédit dans l'algorithme de pricing par arbre binaire en le couplant avec un **modèle structurel**. Par rapport à l'algorithme présenté au paragraphe 10.3.2, les changements ne concernent que la partie Forward.

On se donne  $\sigma_V$  la volatilité des actifs de la société supposée constante.

Plaçons-nous à un nœud quelconque de l'arbre binaire (date  $t$ ) pour lequel la valeur de l'action est  $S_t$ .

L'algorithme modifié comporte trois étapes successives :

1. Calcul de la valeur des actifs  $V_t$  et la volatilité du cours des actions  $\sigma_{S,t}$  en appliquant le modèle structurel à l'horizon  $t+1$
2. Calcul du spread de crédit  $Sp_t$  à appliquer sur l'intervalle  $[t, t+1]$  à partir de la valeur des actifs  $V_t$  et la volatilité des actifs  $\sigma_V$

3. Calcul des scénarii  $S_{t+1}^u$  et  $S_{t+1}^d$  à partir du cours de l'action  $S_t$  et de la volatilité du cours des actions  $\sigma_{S,t}$

On utilisera (à l'étape 1) la somme des valeurs de remboursement (en T) des deux types de dette (convertible et non convertible) pour l'application du modèle structurel.

Cet algorithme doit être appliqué en partant de la racine de l'arbre en date  $t_0$  jusqu'aux feuilles de l'arbre en date T. Une fois l'arbre binaire construit (partie Forward), le pricing de l'obligation convertible est réalisé comme présenté au paragraphe 10.3.2 (partie Backward) en utilisant les spreads de crédit précédemment calculés (à chaque nœud).

Notons que cette technique permet d'intégrer de façon simultanée deux relations présentées au paragraphe 10.2.1 :

- Entre le cours de l'action et le spread de crédit
- Entre le cours de l'action et la volatilité du cours de l'action

Notons enfin que la rupture avec l'hypothèse de volatilité des actions constante fait perdre à l'arbre binaire son caractère recombinaison.