Chapitre 6

Contrats Futures CT vs FRAs

On commence par introduire les contrats futures sur taux d'intérêts à court terme de façon générale puis dans le cadre du contrat Euribor 3M du Liffe. On insistera sur les spécificités de ce type de contrats (standardisation, mode de cotation, mécanisme d'appels de marges) propres aux marchés organisés. L'utilisation classique des contrats Futures CT pour fixer un taux de prêt ou d'emprunt à terme sera étudiée dans le cas où le P/E à couvrir et le sous-jacent du contrat coïncident (couverture parfaite) et dans le cas où ils ne coïncident pas (couverture imparfaite). Après un comparatif général entre les contrats Futures CT et les contrats de FRAs en insistant sur l'interdépendance des deux contrats d'un point de vue économique, nous analyserons dans la deuxième section le profil risque-P/L d'une position sur contrats de FRA couverte par des contrats Futures CT de mêmes caractéristiques (périodes et indice de référence). Cette section nous permetra de mettre en évidence les raisons pour lesquelles les taux forwards doivent êtres inférieurs aux taux Futures équivalents (biais de convexité). La dernière section est consacrée à l'analyse qualitave du biais de convexité en fonction de la volatilité des taux CT et du passage du temps puis à son pricing empirique (formule de calcul approchée et/ou barbell d'options sur FRAs). On termine par une application au pricing des swaps de taux par le biais des contrats Futures CT.

6.1 Contrats Futures Court Terme

Dans cette section, nous allons décrire les contrats Futures CT de façon générale et introduire certains concepts et mécanismes propres à ce type de produits financiers négociés sur des marchés organisés. Nous étudierons ensuite le risque de corrélation existant lorsque les caractéristiques du sous-jacent du contrat et les caractéristiques du prêt (ou de l'emprunt) à couvrir par des contrats Futures CT diffèrent. On terminera cette section par une description du contrat Futures Euribor 3M du Liffe qui est le marché Futures de référence sur la partie CT de la courbe des taux en Euros.

6.1.1 Description

Les contrats Futures CT sont des instruments financiers hors bilan négociés sur des marchés organisés. Un contrat Futures CT peut être interprété comme une **garantie de taux d'intérêt pour un prêt ou un emprunt sous-jacent dont le montant, la date de départ et la durée sont prédéterminés et standardisés**.

Les caractéristiques les plus importantes d'un contrat Futures CT sont :

1. Le montant nominal N_1 du sous-jacent (pour 1 contrat)

2. La durée f du prêt-emprunt sous-jacent
3. Le taux ou indice de référence R_{REF}
4. L'échelon minimal de cotation (Tick)

Sur un même marché se traitent généralement plusieurs contrats simultanément qui portent sur le même indice de référence mais diffèrent par la date d'échéance. Les mois d'échéances des contrats Futures CT sont standardisés et au nombre de quatre par an :

- Mars (H)
- Juin (M)
- Septembre (U)
- Décembre (Z)

Des contrats sont généralement ouverts pour l'année en cours et sur les années suivantes en fonction de la demande des intervenants. Lorsqu'un contrat arrive à échéance, un autre est ouvert (on parle de cycle des contrats).

Les contrats Futures sont négociés en prix et non en taux.

Pour des raisons de simplicité[1], le prix d'un contrat Futures court terme est (par construction) égal à 100 moins le taux Futures (implicite).

$$P_{FUT} = 100 - R_{FUT}$$

La valeur de l'échelon minimal de cotation (tick value) est constante et identique à la hausse (+ 1 tick) et à la baisse (-1 tick). Le prix d'un contrat Futures, et donc le taux Futures implicite, est un multiple de la tick value du contrat.

Plus précisément, la valeur d'un tick s'écrit :

$$Tick\,Value\,(Euros) = N\ \,(Euros) \times Tick\ \,(\%) \times f\ (fraction\,d'année)$$

Cette valeur correspond au gain latent (resp. perte latente) réalisé par une position longue (resp. short) d'1 contrat lorsque le prix du contrat Futures augmente d'un tick.

Les intervenants[2] sur un contrat Futures CT peuvent être acheteurs (long) ou vendeurs (short) :

1. L'acheteur d'un contrat Futures voit sa position se valoriser lorsque le prix du contrat monte, donc lorsque le taux Futures implicite du contrat baisse. L'acheteur d'un contrat future cherche donc implicitement à se couvrir contre une baisse du taux à terme (il est donc implicitement prêteur à terme)
2. Le vendeur d'un contrat Futures voit sa position se valoriser lorsque le prix du contrat baisse, donc lorsque le taux Futures implicite du contrat monte. Le vendeur d'un contrat future cherche donc implicitement à se couvrir contre une hausse du taux à terme (il est donc implicitement emprunteur à terme)

1. Certains auteurs justifient la linéarité du prix d'un contrat Futures CT par rapport au taux Futures en considérant que le P/E sous-jacent au contrat est à intérêts pré-comptés. Bien que séduisante sur le plan formel, cette analyse se heurte néanmoins à une réalité qui veut que les indices de références des contrats futures correspondent à des P/E à intérêts post-comptés

2. On distingue généralement trois types d'intervenants différents sur les marchés de Futures :
   - Les « hedgeurs » qui prennent des positions de couvertures
   - Les spéculateurs qui prennent des positions directionnelles
   - Les arbitrageurs qui prennent des positions de spreads inter-contrats

Ces trois types d'intervenants contribuent à la liquidité du marché (profondeur et fourchettes bid-ask) et plus généralement à son efficience (capacité à intégrer sans délai toutes les informations pertinentes disponibles) de sorte que les taux qui s'y forment sont en général « directeurs » pour (au moins) la partie court terme de la courbe des taux interbancaires

Les contrats Futures CT sont négociés sur des marchés organisés qui s'interposent entres les acheteurs et les vendeurs[3].

L'un des rôles essentiels du marché organisé consiste à garantir la sécurité du réglement des transactions en limitant l'impact d'un défaut (non systémique) via deux mécanismes principaux :

1. Les intervenants doivent déposer un dépôt de garantie calculé sur la base du nombre de contrats ouverts. Ce dépôt rémunéré au taux Euribor est neutre pour une banque de « première catégorie » qui peut le financer au même taux (à $\pm\varepsilon$ près)
2. Des appels de marges sont réalisés quotidiennement (après la clôture du marché) sur la base du cours de compensation (settlement price) du jour afin de limiter le risque de contrepartie sur les contrats en cours de vie. Ces contrats sont donc « réalisés » par le paiement d'appels de marges de la contrepartie « perdante » (Valo <0) vers la contrepartie gagnante (Valo >0) mais toujours par l'entremise du marché organisé

Considérons la situation à la date t d'une banque détentrice d'une position longue sur K contrats achetés en date t_0 et qui expirent en date t_1 :

$$t_0 \ (date\ d'achat) < t \ (date\ de\ valorisation) < t_1 \ (date\ de\ maturité)$$

Si elle conserve ses contrats jusqu'à leur date d'échéance, elle devra faire face aux appels de marges suivants :

$$\begin{cases} K \times Tick\,Value \times \frac{P_{FUT,t_0} - P^{Fixing}_{FUT,t_0}}{Tick} & (en\ t_0) \\ K \times Tick\,Value \times \frac{P^{Fixing}_{FUT,t} - P^{Fixing}_{FUT,t-1}}{Tick} & (en\ t) \\ K \times Tick\,Value \times \frac{P^{Fixing}_{FUT,t_1} - P^{Fixing}_{FUT,t_1-1}}{Tick} & (en\ t_1) \end{cases}$$

Dans ces formules, tous les prix sont des prix de compensation (fixing) à l'exception de P_{FUT,t_0} qui est le prix auquel les contrats ont été acheté en date t_0.

Le montant total de ces appels de marges (hors financement) s'écrit :

$$Total = K \times Tick\,Value \times \frac{P_{FUT,t_1} - P_{FUT,t_0}}{Tick} \qquad (de\ t_0\ à\ t_1)$$

Le mécanisme des appels de marge n'a pas d'impact sur la valorisation des positions (hors financement des appels de marges) mais permet simplement de transformer les plus-ou-moins values latentes constatées en fin de journée en plus-ou-moins values réalisées.

Cette situation est illustrée par le graphique 6.1 ci-dessous.

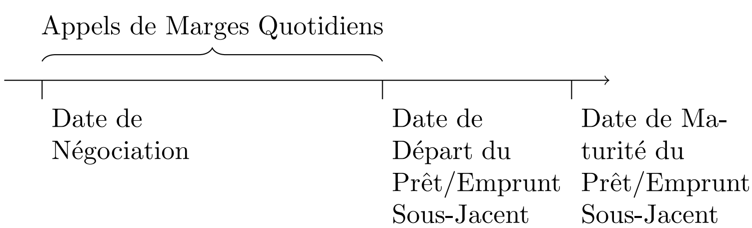

FIG. 6.1 – *Appels de Marges Quotidiens*

3. Il s'agit là d'une différence fondamentale avec les marchés OTC dans lesquels les transactions ont lieu directement (de gré-à-gré) entre acheteurs et vendeurs (même dans le cas où un tier entremetteur - courtier/broker - est partie prenante du deal)

Notons enfin que le cours de compensation (settlement price) est publié par le marché organisé en charge de la gestion du contrat Futures considéré chaque soir après la fermeture (clôture) du marché[4].

A l'échéance d'un contrat Futures CT (dernier jour de trading), il n'y a pas d'obligation de prêt ou d'emprunt[5]. Les intervenants qui ont conservés des positions ouvertes sur ce contrat payent ou reçoivent leurs derniers appels de marge calculés sur la base du nombre de contrats ouverts, du cours de conpensation de la veille et du dernier cours de compensation du contrat. Par construction, le dernier cours de compensation est égal à 100 moins le taux de référence du jour.

Dernier Cours de Compensation = 100 - Taux de Référence (Fixing) du Jour

Supposons que notre banque détentrice de K contrats Futures conserve ses contrats jusqu'à l'échéance en t_1.

A cette date, le cours de compensation est donc défini par :

$$P_{FUT,t_1} = 100 - R_{REF,t_1}$$

où R_{REF,t_1} est le taux de référence (fixing) du jour c'est-à-dire en t_1.

Le total des appels de marges sur la période peut être reformulé sous la forme suivante :

$$Total = N_K \times (R_{FUT,t_0} - R_{REF,t_1}) \times f \qquad avec \qquad N_K = K \times N_1$$

où R_{FUT,t_0} est le taux implicite du contrat en t_0.

Si la banque était prêteuse à terme sur une durée f pour un montant nominal N_K, cette opération lui garantie implicitement un taux de prêt R_{FUT,t_0} alors que le taux spot en t_1 est R_{REF,t_1}. La perte implicite (resp. le gain implicite) qu'elle constate en prêtant à R_{REF,t_1} au lieu de R_{FUT,t_0} lorsque R_{REF,t_1} est inférieur à R_{FUT,t_0} (resp. R_{REF,t_1} est supérieur à R_{FUT,t_0}) est « parfaitement »[6] compensée par le gain (resp. la perte) sur les contrats Futures.

Par contre, comme nous allons le voir dans le paragraphe qui suit, si les caractéristiques du P/E à terme dont on souhaite fixer le taux dés maintenant sont différentes des caractéristiques du P/E sous-jacent au contrat Futures alors la couverture n'est plus parfaite.

6.1.2 Analyse du Risque de Corrélation

Les contrats Futures CT sont des instruments financiers standardisés.

Cette standardisation introduit mécaniquement un risque de corrélation, lorsque le prêt ou l'emprunt (P/E) à terme dont on souhaite fixer le taux dés aujourd'hui a au moins l'une des deux propriétés suivantes :

1. La date de départ du P/E ne correspond pas à la date d'expiration du contrat Futures

4. Pour être précis, plusieurs « statistiques » sur la séance sont publiées chaque soir après la clôture du marché, à savoir :
   - Le cours d'ouverture (Open)
   - Le cours de fermeture (Close)
   - Le plus haut (High)
   - Le plus bas (Low)
   - Le cours de compensation (Fixing)

Le cours de compensation est aussi appelé fixing, il est calculé sur la base des cours des transactions réalisées peu avant la fermeture du marché

5. Les contrats Futures CT font (en général) l'objet d'un règlement en cash contrairement aux contrats Futures LT qui font (en général) l'objet d'une livraison physique du sous-jacent (cf. Chapitre 7)

6. Les deux flux sont identiques au signe près mais ont cependant des dates de valeur différentes

2. La maturité du P/E ne correspond pas à la maturité du sous-jacent du contrat Futures (3M)

Si c'est le cas la couverture n'est plus parfaite pour des raisons que nous allons maintenant exposer.

Considérons l'échéancier suivant :

- T_0 : Date de négociation
- T_1 : Date de départ du P/E
- T_2 : Date d'expiration du contrat Futures

Ces dates sont ordonnées comme suit :

$$\boxed{T_0 < T_1 < T_2}$$

Introduisons de plus les notations suivantes :

- $\mathrm{N}_{\mathrm{P/E}}$: Nominal du P/E
- $\mathrm{N}_{\mathrm{FUT}}$: Nominal de la position sur contrats Futures
- $\mathrm{f}_{\mathrm{P/E}}$: Fraction d'année du P/E
- $\mathrm{f}_{\mathrm{FUT}}$: Fraction d'année du sous-jacent du contrat Futures (3M)
- $\Delta\mathrm{R}^{\mathrm{P/E}}$: Variation du taux Forward sur le P/E entre T_0 et T_1
- $\Delta\mathrm{R}^{\mathrm{FUT}}$: Variation du taux Futures sur le contrat entre T_0 et T_1

avec les précisions suivantes concernant les variations de taux[7] :

$$\triangle R^{P/E}_{T_0\rightarrow T_1} = R^{P/E}_{T_0,T_1} - R^{P/E}_{T_1,T_1} \qquad et \qquad \triangle R^{FUT}_{T_0\rightarrow T_1} = R^{FUT}_{T_0,T_2} - R^{FUT}_{T_1,T_2}$$

Les opérations réalisées en T_0 et en T_1 sont résumées dans le tableau 6.1 ci-dessous.

	T_0	T_1
P/E	rien	Prêt (ou emprunt) départ T_1 et maturité T_1+ $\mathrm{f}_{\mathrm{P/E}}$
Contrats Futures	Achat (ou vente) de contrats Futures d'échéance T_2	Revente (ou rachat) des contrats Futures

TAB. 6.1 – Couverture « imparfaite » d'un P/E par des Contrats Futures

Plaçons-nous maintenant à la date T_1 et regardons les « P/L » sur le P/E et les contrats Futures.

Le « manque à gagner sur le P/E » (valeur T_1+ $\mathrm{f}_{\mathrm{P/E}}$) s'écrit :

$$N_{P/E} \times \triangle R^{P/E}_{T_0\rightarrow T_1} \times f_{P/E}$$

Le « gain ou la perte sur les Futures » (valeur T_1) s'écrit :

$$N_{FUT} \times \triangle R^{FUT}_{T_0\rightarrow T_1} \times f_{FUT}$$

7. $R^k_{i,j}$ désigne le taux (Forward) calculé à la date i de date de départ j et de date de maturité j+f_k

Ayant posé le problème, il nous reste à déterminer le nombre de contrats Futures à acheter (resp. vendre) pour couvrir notre prêt (resp. emprunt) à terme[8].

Une première approche déterministe consiste à faire l'hypothèse que les variations de taux respectives sur le P/E et sur les contrats Futures sont identiques :

$$\triangle R^{P/E}_{T_0 \to T_1} \equiv \triangle R^{FUT}_{T_0 \to T_1} \; (\textit{hypothèse de couverture})$$

Dans ce cas, le montant nominal de la position de couverture sur les Futures est égal au montant nominal de la position à couvrir (P/E) ajusté du ratio des fractions d'années (hedge ratio) :

$$N_{FUT} = N_{P/E} \times \frac{f_{P/E}}{f_{FUT}}$$

On note que si la maturité du P/E à couvrir est égale à la maturité du sous-jacent du contrat futures, on retrouve le ratio de 1 utilisé au paragraphe précédent (couverture parfaite).

Une seconde approche non déterministe consiste à calculer le nombre de contrats Futures par minimisation de la variance du P/L de la position.

Le P/L de la position couverte s'écrit :

$$\triangle V\left(N_{FUT}\right) = N_{P/E} \times \triangle R^{P/E}_{T_0 \to T_1} \times f_{P/E} - N_{FUT} \times \triangle R^{FUT}_{T_0 \to T_1} \times f_{FUT}$$

Supposons que les variations de taux sont distribuées de la façon suivante[9] :

$$\triangle R^{P/E}_{T_0 \to T_1} \longmapsto \aleph\left(0,\sigma^2_{P/E}\right) \qquad et \qquad \triangle R^{FUT}_{T_0 \to T_1} \longmapsto \aleph\left(0,\sigma^2_{FUT}\right)$$

Le P/L de la position couverte est donc distribuée comme suit :

$$\triangle V \longmapsto \aleph\left(0,\sigma^2_{\triangle V}\left[N_{FUT}\right]\right)$$

Le hedge ratio n'est autre que la valeur de $\mathrm{N_{FUT}}$ pour laquelle $\sigma^2_{\triangle V}\left[N_{FUT}\right]$ est minimale, c'est-à-dire la valeur de $\mathrm{N_{FUT}}$ qui annule la dérivée première de $\sigma^2_{\triangle V}\left[N_{FUT}\right]$ par rapport à $\mathrm{N_{FUT}}$.

On trouve :

$$N_{FUT} = N_{P/E} \times \rho_{P/E,FUT} \times \frac{\sigma_{P/E}}{\sigma_{FUT}} \times \frac{f_{P/E}}{f_{FUT}}$$

avec les notations supplémentaires :

- $\sigma_{\mathrm{P/E}}$: Ecart-type de $\Delta \mathrm{R}^{\mathrm{P/E}}$
- σ_{FUT} : Ecart-type de $\Delta \mathrm{R}^{FUT}$
- $\rho_{\mathrm{P/E,FUT}}$: Corrélation entre $\Delta \mathrm{R}^{\mathrm{P/E}}$ et $\Delta \mathrm{R}^{FUT}$

8. Dans la suite de ce paragraphe on raisonne en montant nominal et non en nombre de contrats mais le passage de l'un à l'autre est immédiat puisque le montant nominal d'une position de Futures CT n'est autre que le nombre de contrats fois le nominal d'1 contrat

9. $\aleph\left(0,\sigma^2\right)$ désigne la loi normale de moyenne nulle et de variance σ^2

En pratique, il peut être délicat d'estimer les paramètres précédents et il est de plus souvent « raisonnable » de postuler « a priori » que[10] :

$$\rho_{P/E,FUT} \backsimeq 1 \qquad et \qquad \sigma_{P/E} \backsimeq \sigma_{FUT}$$

en particulier lorsque les caractéristiques du P/E ne sont pas trop différentes des caractériques du sous-jacent du contrat Futures utilisé pour la couverture, de sorte que l'on retrouve le hedge ratio déterministe donné plus haut.

Il reste cependant un risque résiduel (risque de corrélation) lié au fait que si la variance est minimale, elle n'est cependant pas nulle.

L'expérience montre que les variations de taux sur la partie court terme de la courbe des taux interbancaires ont deux dynamiques indépendantes :

1. Les mouvements de taux liés aux « interventions » non anticipées de la banque centrale (actions concrètes ou déclarations d'intentions) qui peuvent s'analyser comme des chocs ponctuels uniformes (shift) et de « fortes » amplitudes
2. Les mouvements liés aux flux quotidiens des intervenants sur les marchés cash et dérivés en dehors de toute nouvelle sur la politique de la banque centrale qui peuvent s'analyser comme un « bruit » non uniforme (multi-factoriel) et de faible amplitude

Le risque que l'on va chercher à couvrir est clairement lié à la première composante de la dynamique des taux interbancaires. Or ce type de choc se répercute uniformément (au moins) sur la partie court terme de la courbe des taux de sorte que l'impact est sensiblement le même sur les deux taux (cf. notre analyse des variations du taux Forward/Futures en fonction des variations du taux spot du paragraphe 6.2.3).

6.1.3 Le Contrat Futures Euribor 3M (Liffe)

Le contrat Future Euribor 3 mois du Liffe (London International Futures Financial Exchange) a les caractéristiques suivantes[11] :

- Nominal : 1 Million (EUR)
- Durée de l'opération sous-jacente : 3 mois (90 jours sur 360)
- Taux de référence : Euribor 3M[12]
- Mode de cotation : 100 − taux à terme
- Echelon minimal de cotation : 0.005%
- Cycle des contrats : 2 mensuels + 20 trimestriels
- Dernier jours de trading : 3ème mercredi du mois − 2 jours ouvrés
- Tick Value : EUR 12.5

Par définition, la tick value est le montant d'intérêts non actualisé correspondant à une variation du taux Futures de 0.005% :

$$EUR\, 12.5 = EUR\, 1M \times 0.005\% \times \frac{90}{360}$$

10. Les deux raisons principales sont le manque de données historiques précises et exhaustives permettant d'estimer ces paramètres et les différences structurelles éventuelles entre la période d'estimation et la période d'application qui interdisent de les utiliser

11. Une description exhaustive du contrat « Three Month Euro (Euribor) Futures » est disponible sur le site web du Liffe

12. Rappelons (cf. Chapitre 2) que l'Euribor (EURopean InterBank Offered Rate) est l'indice des taux interbancaires libellés en Euros. C'est le taux moyen en Euro offert pour un dépôt à terme entre des banques de premières catégories ayant une activité significative sur le marché interbancaire en Euros. Il est publié par la Fédération des Banques Européennes (EBF) tout les jours à 11:00 am CET pour des taux valeur Spot (J+2)

Donnons un exemple concret pour fixer les idées[13].

Le 08 Février 02 à 11H45 (date de négociation), une banque X achète 10 contrats M02 à 96.56. Il s'agit de l'achat d'un instrument hors bilan, cette opération ne génère donc pas de flux de trésorerie (hors paiement du dépôt de garantie qui est auto-financé). Notons que ce prix de 96.56 correspondant à un taux Futures implicite de 3.44% (100 - 96.56).

Le 08 Février 02 à 18H00, le cours de compensation du contrat M02 est 96.59. Comme le cours de compensation est supérieur au cours d'achat, la banque X va recevoir du Liffe des appels de marges pour un montant de 750 EUR.

$$EUR\,750 = 10\ (contrats) \times 6\ (ticks) \times 12.5\,(valeur\ d'1\,tick)$$

Plaçons-nous maintenant le 18 Juin 02 à 11H00 (dernier jour de trading) et donnons les informations supplémentaires suivantes :

- Fixing de l'Euribor 3 Mois: 3.17%
- Cours de compensation: 96.83 (100 - 3.17)
- Cours de compensation du 17 Juin 02 est 96.82

Les derniers appels de marges (toujours reçus par la banque X) sont donc de 250 EUR :

$$EUR\,250 = 10\ (contrats) \times 2\ (ticks) \times 12.5\,(valeur\ d'1\,tick)$$

Le total des appels de marges sur la période (hors financement) est de 6750 Euros, calculé comme suit :

$$EUR\,6750 = 10\ (contrats) \times 54\ (ticks) \times 12.5\,(valeur\ d'1\,tick)$$

Si la banque était prêteuse à terme sur 3M pour un montant de EUR10M, **cette opération lui garantie implicitement un taux de prêt de 3.44% alors que le taux spot du 18/06 est de 3.17%**. La moins value qu'elle va réaliser en prêtant à 3.17% au lieu de 3.44% est compensée par le gain sur les contrats Futures.

Il y a néanmoins une différence (dont nous allons largement reparler dans le suite de ce chapitre) entre le gain réalisé sur les contrats Futures et le flux d'intérêt sur le prêt :

- Le gain sur les contrats Futures est perçu en date de départ du prêt
- Le flux d'intérêt sur le prêt est reçu en date de maturité du prêt

La couverture du prêt n'est donc exacte qu'à un facteur d'actualisation près.

Ainsi, la valeur actuelle (valeur 18/06) du différentiel d'intérêts (manque à gagner) sur le prêt (perçu 3M plus tard) est de EUR 6697.93 :

$$6697.93 = \frac{EUR10M \times (3.44\% - 3.17\%) \times 0.25}{(1 + 3.17\% \times 0.25)}$$

La couverture est donc dans ce cas « gagnante » de EUR 52.07 soit moins de 1% du manque à gagner total.

Notons que le processus de fixing du contrat Futures le dernier jour de trading du contrat diffère des autres jours :

- Lors d'une journée de trading normale, le cours du fixing reflète les anticipations des participants au marché sur ce que sera le taux de l'indice Euribor 3M en date du 18 Juin 02

13. Les données de marchés utilisées dans cet exemple numérique sont fictives

- Lors du dernier jours de trading, le cours du fixing est défini contractuellement par le taux du fixing Euribor 3M du jour

Cette différence a une incidence pour la couverture de prêts/emprunts à terme sur des dates de départ du prêt/emprunt ne correspondants pas aux dates d'expiration des contrats Futures disponibles sur le marché comme nous l'avons vu au paragraphe 6.1.2.

Supposons que la position du 8 Février 02 serve à couvrir un prêt à terme (de maturité 3M) départ le 15 Mai 02 et non le 18 Juin 02. On donne les informations supplémentaires suivantes :

- Taux Forward Euribor 3M départ 15 Mai 02 calculé le 8 Février 02 : 3.50%
- Cours du contrat M02 le 15 Mai 02 à 9H00 : 96.75
- Fixing Euribor 3M du 15 Mai 02 : 3.28%

Dans ce cas, la banque devra le 15 Mai 02 réaliser les deux opérations suivantes à 9H00 :

1. Revendre ses 10 contrats Futures M02 à 96.75
2. Prêter EUR 10M à un taux que l'on suppose ègal à l'Euribor du jour : 3.28%

On constate donc que le gain de EUR 4750 sur les contrats Futures CT :

$$EUR\,4750 = 10\ (contrats) \times 38\ (ticks) \times 12.5\,(valeur\ d'1\,tick)$$

ne compense pas complètement le manque à gagner de sur les intérêts du prêt :

$$EUR\,5500 = EUR10M \times (3.50\% - 3.28\%) \times 0.25$$

même en actualisant le différentiel d'intérêts au 18 Mai 02.

Cet exemple illustre le risque de (dé-)corrélation qui se traduit ici par des taux :

- Futures 3M/départ 18/06
- Forward 3M/départ 15/05

qui n'évoluent pas de façon parfaitement homogène sur la période de couverture (baisse de 19bp pour le taux Futures implicite pour une baisse de 22bp pour le taux Forward entre le 08/02 et le 15/05).

6.2 Arbitrage Contrat Futures CT vs FRAs

Les contrats Futures CT et les FRAs ont de nombreux points communs mais aussi certaines différences qui seront décrites au paragraphe 6.2.1 au cours duquel nous montrerons aussi que ces deux instruments sont complémentaires et interdépendants d'un point de vue économique. Nous calculerons ensuite (paragraphe 6.2.2) le hedge ratio à appliquer pour couvrir une position de FRAs par des contrats Futures lorsque les deux contrats ont le même sous-jacent. Le dernier paragraphe (6.2.3) de cette section nous permettra d'analyser le P/L intraday de notre position d'arbitrage dans le cadre d'un déplacement parallèle de la courbe des taux (Euribor) et de mettre en évidence l'existence d'une prime de convexité entre le taux Futures et le taux Forward (équivalents).

6.2.1 Comparatif Contrat Futures CT vs FRAs

Les contrats de FRAs étudiés au Chapitre 2 et les contrats Futures CT sont des instruments semblables sur bien des aspects qui présentent néanmoins certaines différences dont une fondamentale liée au calcul des market values.

Ces deux types de contrats ont évidemment des similarités importantes sans lesquelles ni comparaison ni arbitrage ne seraient possibles :

- Garantie : taux de prêt ou d'emprunt garanti à terme
- Sous-Jacent : Prêt/Emprunt à CT
- Réglement : En cash, pas d'obligation de prêt ou d'emprunt à l'échéance
- Hors Bilan : Pas d'échange de flux en capital - Seuls les différentiels de flux d'intérêts sont échangés
- Indice de Référence : Euribor

Les principales différences sont données dans le tableau 6.2 mais la plus importante pour notre propos à venir est liée au calcul des market values.

	Futures CT	FRAs
Convention	L'achat d'un contrat Futures CT permet de se garantir un taux de prêt	L'achat d'un contrat de FRA permet de se garantir un taux d'emprunt
Standardisation	Les contrats Futures sont standardisés et négociables sur un marché organisé qui s'interpose entre acheteurs et vendeurs	Les contrats de FRA ne sont pas standardisés et sont négociables sur un marché de gré-à-gré (OTC)
Cash Settlement	Quotidien pour un contrat Futures CT (appels de marges)	Versés en totalité à l'échéance du contrat pour un FRA
Market Value	La market value d'un contrat Futures CT est linéaire	La market value d'un contrat de FRA est convexe

Tab. 6.2 – Contrats Futures CT vs FRAs : Différences

Avant de rentrer l'analyse purement financière des liens entre FRAs et contrats Futures CT donnons quelques éléments complémentaires d'analyse (économique) des marchés des FRAs et des Futures CT.

Le marché des FRAs et celui des contrats Futures CT sont des marchés complémentaires et interdépendants :

- Ils sont complémentaires car destinés à des acteurs différents en terme de surface et/ou d'activité . Les contrats Futures CT sont principalement utilisés par des acteurs financiers qui ont une taille (banques commerciales) ou une activité (hedge funds) significative tandis que les FRAs sont principalement utilisés par des acteurs non financiers (entreprises industrielles et commerciales) qui trouvent dans ces produits des réponses simples et adaptées à leurs besoins précis de couvertures du risque de taux

– Ils sont interdépendants car les banques commerciales utilisent les marchés de contrats Futures CT comme la « matière première » pour la création des produits OTC plus adaptés aux besoins des entreprises que sont les FRAs. D'une part, les engagements financiers (dépot de garantie et appels de marge) n'ont pas d'impact pour une banque commerciale de première catégorie se refinançant à un taux proche de l'Euribor. D'autre part, la liquidité intrinsèque aux marchés Futures (liée en partie à la standardisation des contrats) rend la « matière première » abondante (profondeur du marché) et « bon marché » (fourchettes bid-ask très étroites)

Comme illustré par le graphique 6.2 ci-dessous, les banques commerciales utilisent donc les contrats Futures CT pour pricer les structures de FRAs correspondants aux demandes de leurs clients corporates.

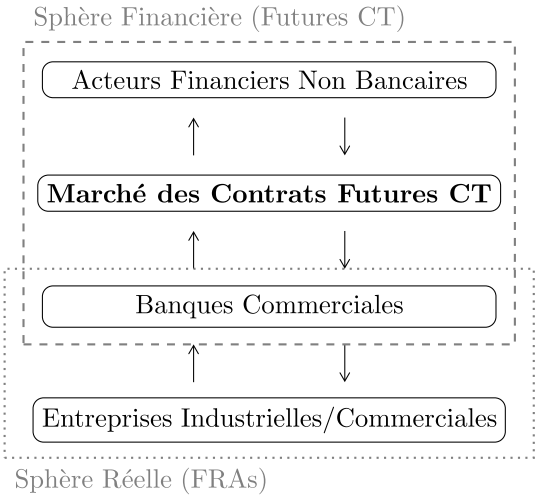

FIG. 6.2 – *Rôle Economique du Marché des Contrats Futures CT*

Dans cette perspective, la présence d'acteurs financiers non bancaires intervenants pour compte propre ou pour compte de tiers (spéculation et arbitrage) est essentielle pour la liquidité du marché des contrats Futures CT et donc in fine pour permettre aux entreprises industrielles et commerciales de se couvrir à moindre coût contre le risque de taux CT (FRAs).

Dans le processus de pricing des FRAs via les contrats Futures CT, les banques assument :

– Le risque de corrélation (mismatch)
– Le risque de convexité (volatilité)

et refacturent les « primes de risques » correspondantes à leurs clients via les marges qu'elles prennent sur les cotations de FRAs (spread bid-ask).

$$\boxed{\text{Marges FRA} = \text{Primes de Risques} + \text{Coûts de la Structure} + \text{Rémunération du Capital}}$$

Dans la suite de cette section, nous allons nous intéresser à l'arbitrage entre un FRA et un contrat Futures CT de mêmes caractéristiques (calcul du hedge ratio et analyse du P/L intraday de la position).

6.2.2 Calcul du Hedge Ratio

Etant donné une position prêteuse de FRAs, combien de contrats Futures CT (équivalents) faut-il vendre pour couvrir notre position de FRA ? Pour répondre à cette question[14] calculons les market values d'un contrat Futures CT et d'une position de FRA (équivalente) à une date T quelconque comprise entre la date de négociation $\mathrm{T_{NEGO}}$ et la date d'échéance des deux contrats $\mathrm{T_1}$.

$$T_{NEGO} < T = 0 < T_1 < T_2 = T_1 + 3M$$

On suppose que le FRA et le contrat Futures de couverture ont le même sous-jacent à savoir un P/E (à terme) de maturité 3M et de date départ $\mathrm{T_1}$ (date d'échéance du FRA et du contrat Futures CT) et ont bien sûr le même indice de référence (Euribor 3M).

Si l'on néglige le financement des appels de marges quotidiens[15] la **market value d'une position sur contrat Futures** avant l'échéance du contrat ($\mathrm{T} < \mathrm{T_1}$) pour un contrat négocié précédemment ($\mathrm{T_{NEGO}} < \mathrm{T}$) résulte alors directement de la définition du contrat donnée à la section 6.1 :

$$\begin{aligned} MV_{FUT} &= \frac{\left(P_{T_0}^{FUT} - P_{T_{NEGO}}^{FUT}\right) \times N}{100} \times \frac{90}{360} \\ &= \left(R_{T_{NEGO}}^{FUT} - R_{T_0}^{FUT}\right) \times N \times \frac{90}{360} \\ &= -\triangle R^{FUT} \times N \times \frac{90}{360} \end{aligned}$$

On constate que la market value $\mathrm{MV_{FUT}}$ est bien linéaire par rapport au cours de compensation du contrat Futures en T et donc par rapport au taux Futures implicite dans ce cours de compensation (puisque par définition le taux Futures implicite est égal à 100 moins le cours du Futures). Cette situation est décrite par le graphique 6.3 ci-dessous.

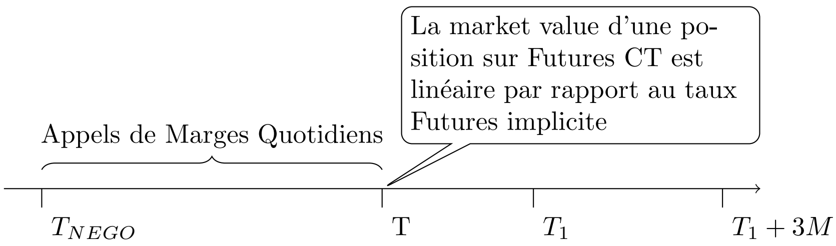

FIG. 6.3 – *Market Value d'une Position sur Futures CT*

La **market value de la position de FRA** (équivalente) a été donnée au Chapitre 2, elle consiste à actualiser le cash settlement de $\mathrm{T_1}$ (date d'échéance) à T (date de valorisation) :

$$\begin{aligned} MV_{FRA} &= \left(R_{T_{NEGO}}^{FRA} - R_{T}^{FRA}\right) \times N \times \frac{90}{360} \times \frac{1}{(1 + Z_{T_1+3M})^{f_{T_1+3M}}} \\ &= -\triangle R^{FRA} \times N \times \frac{90}{360} \times \frac{1}{(1 + Z_{T_1+3M})^{f_{T_1+3M}}} \end{aligned}$$

Z_{T_1+3M} est le taux Euribor spot (valeur T) de date de maturité $\mathrm{T_1}$+3M.

14. Cf. Kawaller I.G. (1994), « Comparing Eurodollar Strips to Interest Rate Swaps », The Journal of Derivatives (67) et Hoskins B. (1995), « A Question of Bias », Risk Magazine (Vol. 8, N° 3, March 1995)

15. On rappelle que le financement des appels de marge représente la somme capitalisées des intérêts quotidiens payés et/ou reçus entre la date de négociation et la date d'échéance du contrat et calculés chaque jour sur la base du solde net d'appels de marges

Rappelons que, contrairement aux contrats Futures CT qui font l'objet d'une « réalisation » au jour-le-jour des plus-ou-moins values latentes, le réglement d'une position de FRA est réalisé à l'échéance du contrat de FRA (cash settlement). La market value d'un contrat en cours de vie est donc bien obtenue par actualisation du cash settlement « anticipé » de la date d'échéance T_1 à la date de valorisation T (cf. Graphique 6.4).

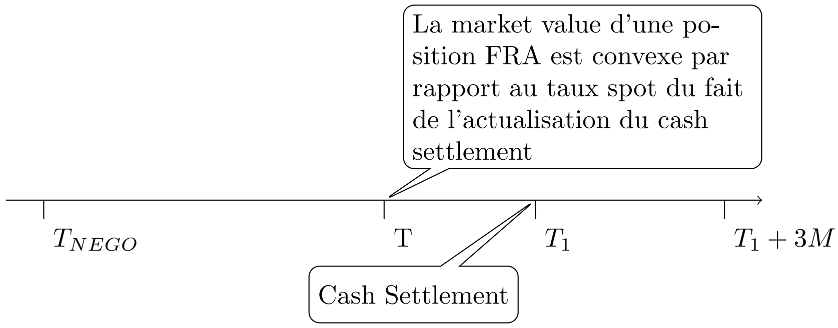

FIG. 6.4 – *Market Value d'une Position de FRA*

Notre **scénario de couverture** consiste à supposer que les variations du taux Futures et les variations du taux forward sont identiques, à savoir :

$$\boxed{\triangle R^{FRA} \equiv \triangle R^{FUT} \qquad (\textit{scénario de couverture})}$$

Sous cette hypothèse, on peut alors écrire :

$$MV_{FRA} = \frac{MV_{FUT}}{(1 + Z_{T_1+3M})^{f_{T_1+3M}}}$$

Cette dernière formule va nous permettre de calculer le hedge ratio à appliquer pour couvrir une position sur contrats de FRA par une position sur contrats Futures CT. Le Tableau 6.3 ci-dessous donne les sensibilités respectives d'1 contrat Futures CT (Nominal 1 MEUR) et d'une position de FRA équivalente pour une variation de 1bp des taux Futures et forward [16].

1MEUR	1 Contrat Futures CT	Position de FRA Equivalente
Sensibilité	25 EUR/bp	$\frac{25}{(1+Z_{T_1+3M})^{f_{T_1+3M}}}\ EUR/bp$

TAB. 6.3 – Calcul des Sensibilités

Le nombre de contrats Futures CT nécessaires pour couvrir une position de FRAs de EUR 1M en nominal est donc :

$$\boxed{\delta_{hedge} = \frac{1}{(1 + Z_{T_1+3M})^{f_{T_1+3M}}}}$$

Sur la base du hedge ratio δ_{hedge} calculé précédemment on peut donc construire l'arbitrage suivant [17] :

– Vend FRA 3M pour un nominal N_{FRA} à un taux forward R_{FRA}

16. $1\ MEUR \times \frac{90}{360} \times 1\ bp = 10^6 \times 25 \times 10^{-2} \times 10^{-4} = 25\ EUR/bp$

17. On rappelle que les conventions sont inversées sur ces deux marchés en conséquence être vendeur de FRAs revient à être prêteur implicite à terme tandis qu'être vendeur de contrats Futures CT revient à être emprunteur implicite à terme

– Vend $\delta_{\text{hedge}} \times N_{\text{FRA}}$ Futures CT à un prix P_{FUT} (P_{FUT} = 1 - R_{FUT})

On rappelle que le FRA et le contrat Futures CT ont le même P/E sous-jacent (date de départ T_1 et date de maturité de T_1+3M).

On constate donc que pour couvrir une position de FRAs de nominal N_{FRA} (en MEUR), il ne faut pas N_{FRA} contrats Futures CT (comme on pourrait le penser a priori) mais un nombre sensiblement moindre et qui (toutes choses égales par ailleurs) tend à décroître lorsque l'échéance des deux contrats T_1 est plus lointaine.

6.2.3 Analyse du P/L Intraday de la Position

Par construction, la position décrite au paragraphe 6.2.2 est parfaitement couverte contre une variation du taux Forward/Futures en considérant le taux zéro-coupon spot de maturité T_1+3M constant. En effet :

$$MV_{TOTAL} = MV_{FRA} - MV_{FUT}$$

soit :

$$MV_{TOTAL} = -\delta_{T+\triangle T} \times N_{FRA} \times \frac{90}{360} \times \triangle R_{FRA} + \delta_{Hedge} \times N_{FRA} \times \frac{90}{360} \times \triangle R_{FUT}$$

avec :

$$\delta_{T+\triangle T} = \frac{1}{(1 + Z_{T_1+3M} + \triangle Z_{T_1+3M})^{f_{T_1+3M}}}$$

Par conséquent, la market value de la position est nulle sous les deux hypothèses suivantes :

1. Les variations des taux Forwards sont identiques aux variations des taux Futures ($\Delta R_{\text{FUT}} = \Delta R_{\text{FRA}}$)
2. Le taux zéro-coupon spot de date de maturité T_1+3M reste constant ($\delta_{T+\triangle T} = \delta_{Hedge}$) et $0 < \Delta T <$ 1J (on raisonne en intraday)

Cependant, faire l'hypothèse que le taux zéro-coupon spot de date de maturité T_1+3M est constant n'est évidemment pas réaliste. Non seulement, les taux zéro-coupon spot bougent mais, ils doivent de plus bouger en « cohérence » par rapport aux taux Forward/Futures, ce que nous allons vérifier dès maintenant.

Analysons les variations du taux Forward/Futures en fonction des variations du taux Spot.

Regardons la variation du taux Forward/Futures R_{T_1,T_1+3M} lorsque la courbe des taux zéro-coupons spot dépend du seul 1er facteur (Shift - facteur de déplacement uniforme de la courbe des taux zéro-coupon qui explique la part la plus importante de la variance totale – cf. Chapitre 1).

Par définition du taux forward, on a :

$$\underbrace{(1 + Z_{T_1+3M})^{f_{T_1+3M}}}_{\alpha} = \underbrace{(1 + Z_{T_1})^{f_{T_1}}}_{\beta} \times \underbrace{(1 + R_{T_1,T_1+3M})^{f_{3M}}}_{\gamma}$$

Différentions cette expression :

$$d\alpha = \beta \times d\gamma + \gamma \times d\beta$$

Calculons dα, $\beta\times$dγ et $\gamma\times$dβ séparément.

Pour dα :

$$\begin{aligned} d\alpha &= (1+Z_{T_1+3M})^{f_{T_1+3M}} \times \frac{f_{T_1+3M}}{(1+Z_{T_1+3M})} \times dZ_{T_1+3M} \\ &= (1+Z_{T_1+3M})^{f_{T_1+3M}} \times D^{mod}_{T_1+3M} \times dZ_{T_1+3M} \end{aligned}$$

Pour $\beta\times$dγ :

$$\begin{aligned} \beta \times d\gamma &= (1+Z_{T_1})^{f_{T_1}} \times \frac{f_{3M}}{(1+R_{T_1,T_1+3M})} \times (1+R_{T_1,T_1+3M})^{f_{3M}} \times dR_{T_1,T_1+3M} \\ &= (1+Z_{T_1})^{f_{T_1}} \times (1+R_{T_1,T_1+3M})^{f_{3M}} \times D^{mod}_{T_1,T_1+3M} \times dR_{T_1,T_1+3M} \\ &= (1+Z_{T_1+3M})^{T_1+3M} \times D^{mod}_{T_1,T_1+3M} \times dR_{T_1,T_1+3M} \end{aligned}$$

Pour $\gamma\times$dβ :

$$\begin{aligned} \gamma \times d\beta &= (1+R_{T_1,T_1+3M})^{f_{3M}} \times \frac{f_{T_1}}{(1+Z_{T_1})} \times (1+Z_{T_1})^{f_{T_1}} \times dZ_{T_1} \\ &= (1+Z_{T_1})^{f_{T_1}} \times (1+R_{T_1,T_1+3M})^{f_{3M}} \times D^{mod}_{T_1} \times dZ_{T_1} \\ &= (1+Z_{T_1+3M})^{T_1+3M} \times D^{mod}_{T_1} \times dZ_{T_1} \end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$\triangle R_{T_1,T_1+3M} = \left[\frac{D^{mod}_{T_1+3M} - D^{mod}_{T_1}}{D^{mod}_{T_1,T_1+3M}}\right] \times \triangle Z_{T_1+3M} = (1 \pm \epsilon) \times \triangle Z_{T_1+3M}$$

Les taux Forwards/Futures varient donc exactement comme les taux zéro-coupon spots si la courbe des taux est plate ($\varepsilon = 0$) et dans le même sens et du même ordre de grandeur que les taux zéro-coupon spots si la courbe des taux n'est pas plate ($0 < |\varepsilon| << 1$).

Calculons le P/L de notre position en fonction du taux $\mathbf{Z_{T_1+3M}}$.

Reprenons la formule du P/L de notre position d'arbitrage et comparons les P/L des deux composantes en fonction du signe de $\triangle Z_{T_1+3M}$, on obtient :

$$\begin{cases} \triangle Z_{T_1+3M} < 0 & \Rightarrow \delta_{Hedge} < \delta_{T+\triangle T} \; et \; \triangle R_{T_1,T_1+3M} < 0 \\ \triangle Z_{T_1+3M} > 0 & \Rightarrow \delta_{Hedge} > \delta_{T+\triangle T} \; et \; \triangle R_{T_1,T_1+3M} > 0 \end{cases}$$

Dans les deux cas, on vérifie bien que :

$$\boxed{P/L_{FRA} > P/L_{FUT} \qquad \forall \, \triangle Z_{T_1+3M}}$$

Le P/L du FRA sur-performe donc celui du Futures à la hausse et à la baisse des taux en raison de la convexité de la market value du FRA (cf. Graphique 6.5).

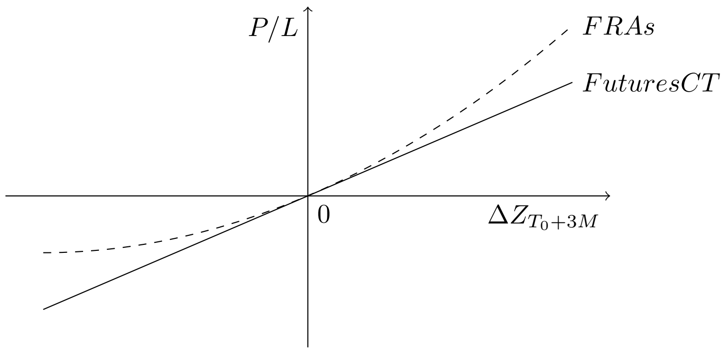

FIG. 6.5 – *P/L FRAs vs P/L Futures CT*

Au total, le P/L de la position d'arbitrage est positif à la hausse comme à la baisse des taux et nulle pour $\triangle Z_{T_1+3M} = 0$.

$$MV_{TOTAL} = \frac{90}{360} \times N_{FRA} \times [\delta_{T+\triangle T} - \delta_{Hedge}] \times \triangle R_{T_1,T_1+3M} \geq 0$$

Un contrat Futures CT a un désavantage significatif par rapport à un contrat de FRA équivalent, l'absence de convexité. Une telle situation est incompatible avec l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). Toutes choses égales par ailleurs, les contrats Futures doivent donc se négocier (en terme de prix et donc de taux Futures implicites) avec une décôte par rapport à leur équivalents FRA (en terme de taux de FRA, donc de taux Forward en vertu de l'arbitrage « FRA vs Forward-Forward » présenté au Chapitre 2). Par conséquent, **un taux Futures doit être plus élevé que le taux Forward équivalent pour rétablir l'AOA**. La différence entre les deux taux est appelée « prime ou spread de convexité ».

On peut donc écrire :

$$\boxed{R^{3M}_{FUT} = R^{3M}_{FRA} + \theta_{CVX} \qquad avec \qquad \theta_{CVX} \geq 0}$$

Dans la section suivante, nous allons étudier ce biais de convexité d'un point de vue qualitatif (dynamique et facteurs explicatifs) et quantitatif (pricing heuristique et empirique).

6.3 Biais de Convexité

Nous avons à la section 6.2 démontré l'existence d'un biais de convexité entre le taux Forward et le taux Futures (équivalent) lié à l'absence de convexité de la market value d'un contrat Futures CT comparée à celle d'un FRA (équivalent). Dans cette dernière section, nous allons analyser ce biais de convexité d'un point de vue qualitatif de façon à identifier ses facteurs explicatifs. Nous montrerons ensuite comment pricer (empiriquement) ce biais de convexité via une heuristique de calcul couramment utilisée sur les marchés puis via une position optionnelle (straddle) sur le marché des options sur contrats Futures CT. Enfin, nous terminerons par expliquer comment utiliser les contrats Futures CT pour pricer des swaps de taux LT.

6.3.1 Analyse du Biais de Convexité

L'Arbitrage FRA vs Futures CT décrit à la section précédente a les propriétés suivantes :

– La position a une valeur nulle en T_{NEGO} (date de négociation)

– $E(P/L_{T,T+\Delta T}) \geq 0$ sur $[T, T+\Delta T]$

Pour rétablir une situation de non arbitrage (AOA), il est donc nécessaire que le taux Futures soit supérieur au taux Forward (FRA).

La différence entre les deux taux est le spread de convexité :

$$R_{FUT}^{3M} = R_{FRA}^{3M} + \theta_{CVX}$$

Nous allons montrer que le spread de convexité θ_{CVX} est d'autant plus grand que :

1. La date d'échéance des contrats T_1 est éloignée
2. La volatilité des variations des taux zéro-coupon spots est grande

Par ailleurs, à l'échéance des contrats T_1 le spread de convexité est nul du fait de la convergence des taux Forward et Futures vers le taux spot :

$$R_{FRA} = R_{FUT} = R_{SPOT} \qquad (\grave{a}\ l'\acute{e}ch\acute{e}ance)$$

Ces propriétés sont illustrées par le graphique 6.6 ci-dessous.

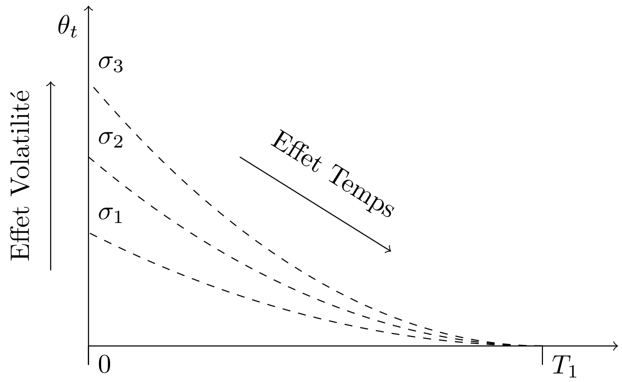

FIG. 6.6 – *Prime de Convexité : Effets Temps & Volatilité*

Calculons la variation du P/L de la position globale $\Delta P/L_{T,T+\Delta T}$ sur la période $[T,T+\Delta T]$ ($\Delta T > 0$ et ΔT petit).

On a :

$$\triangle P/L_{TOTAL} = 1M \times \frac{90}{360} \times \left(\underbrace{\delta_{T,T+\triangle T} \times \triangle R_{T,T+\triangle T}^{FRA}}_{\alpha} - \underbrace{\delta_{Hedge} \times \triangle R_{T,T+\triangle T}^{FUT}}_{\beta} \right)$$

<u>Calculons α et β séparemment.</u>

Pour α, remplaçons $\delta_{T,T+\Delta T}$ par son développement limité au deuxième ordre et ΔR_{FRA} par son approximation $(1+\varepsilon)\times\Delta Z$:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \delta_{T,T+\triangle T} \times \triangle R_{T,T+\triangle T}^{FRA} \\
&\simeq \left[\delta_{Hedge} + S_T \times \triangle Z_{T,T+\triangle T}^{T_1+3M} + \Gamma_T \times \left(\triangle Z_{T,T+\triangle T}^{T_1+3M} \right)^2 \right] \times \triangle R_{T,T+\triangle T}^{FRA} \\
&\simeq \delta_{Hedge} \times \triangle R_{T,T+\triangle T}^{FRA} + \left[S_T \times \left(\triangle Z_{T,T+\triangle T}^{T_1+3M} \right)^2 + \Gamma_T \times \left(\triangle Z_{T,T+\triangle T}^{T_1+3M} \right)^3 \right] \times (1 \pm \epsilon)
\end{aligned}$$

Pour β, remplaçons le taux Futures par le taux Forward plus le spread de convexité :

$$\begin{aligned}\beta &= \delta_{Hedge} \times \triangle R^{FUT}_{T,T+\triangle T} \\ &= \delta_{Hedge} \times \triangle \left[R^{FRA}_{T,T+\triangle T} + \theta_{T,T+\triangle T}\right] \\ &= \delta_{Hedge} \times \triangle R^{FRA}_{T,T+\triangle T} + \delta_{Hedge} \times \triangle\theta_{T,T+\triangle T}\end{aligned}$$

Au final on peut donc écrire :

$$\alpha - \beta \simeq \left[S_T \times \left(\triangle Z^{T_1+3M}_{T,T+\triangle T}\right)^2 + \Gamma_T \times \left(\triangle Z^{T_1+3M}_{T,T+\triangle T}\right)^3\right] \times (1 \pm \epsilon) - \delta_{Hedge} \times \triangle\theta_{T,T+\triangle T}$$

Si on impose de plus les hypothèses supplémentaires suivantes :

$$E\left[\triangle P/L_{TOTAL}\right] = 0 \ (AOA) \qquad et \qquad \triangle Z^{T_1+3M}_{T,T+\triangle T} \to \aleph\left(0,\sigma^2_{\triangle Z^{T_1+3M}_{T,T+\triangle T}}\right)$$

On trouve finalement :

$$\boxed{E\left[\triangle\theta_{T,T+\triangle T}\right] \simeq S_T \times \sigma^2_{\triangle Z^{T_1+3M}_{T,T+\triangle T}}}$$

avec :

- S_T : Sensibilité d'un ZC de maturité T_1+3M calculée en T
- $\sigma_{\triangle Z^{T_1+3M}_{T,T+\triangle T}}$: Volatilité sur l'intervalle [T,T+ΔT] du taux ZC de maturité T_1+3M

En extrapolant l'analyse intraday ci-dessus, on constate que la dynamique du biais de convexité dépend de deux facteurs principaux :

- Effet « temps » : Plus on se rapproche de l'échéance des contrats Futures plus les variations quotidiennes du biais de convexité sont faibles (T converge vers 0)
- Effet « volatilité » : Si il n'y avait pas de biais, l'espérance du P/L de notre stratégie serait une fonction croissante de la volatilité des variations du taux zéro-coupon donc la variation du biais de convexité est une fonction croissante de la volatilité (pour maintenir l'AOA)

Au final, notre position d'arbitrage « Futures CT vs FRA » a un profil de P/L similaire à une position optionnelle.

6.3.2 Pricing du Biais de Convexité

Nous allons présenter dans cette section deux approches que l'on peut qualifier d'empiriques pour estimer le biais de convexité :

- La première est une « heuristique » couramment utilisée par les professionnels qu'il est possible de retrouver formellement (au prix de quelques approximations) en prolongeant l'analyse faite au paragraphe 6.3.1
- La seconde consiste à remarquer que le profil de P/L de la position d'arbitrage FRA vs Futures CT est en première approximation équivalent au profil de P/L d'un straddle de sorte que la prime du straddle constitue un proxy de la prime de convexité

Ces deux approches sont détaillées ci-dessous.

6.3.2.1 Heuristique de Calcul du Biais de Convexité

Reprenons l'analyse faite au paragraphe 6.3.1 en raisonnant avec un pas de temps de ΔT de 1J et une volatilité des taux CT uniforme et constante dans le temps.

$$\triangle T = 1 \qquad et \qquad \sigma^2_{\triangle_{1D} Z} \equiv Cte$$

Plaçons-nous à une date t quelconque entre T=0 et T_1, on peut alors reécrire la formule obtenue au paragraphe 6.3.1 sous la forme suivante :

$$E\left[\triangle \theta_{t,t+1}\right] \simeq S_t \times \sigma^2_{\triangle_{1D} Z} \qquad avec \qquad 0 \leq t \leq T_1$$

Calculons la somme de cette expression de t=0 à t=T_1-1 :

$$\underbrace{\sum_{t=0}^{T_1-1} E\left[\triangle \theta_{t,t+1}\right]}_{\alpha} \simeq \underbrace{\sum_{t=0}^{T_1-1} S_t \times \sigma^2_{\triangle_{1D} Z}}_{\beta}$$

Calculons α et β séparément.

Pour α, en modifiant l'ordre de la sommation et en isolant θ_0 (la prime de convexité cherchée) ainsi que θ_{T_1} (qui est nul par construction), on a :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{t=0}^{T_1-1} E\left[\triangle \theta_{t,t+1}\right] \\
&= \sum_{t=0}^{T_1-1} E\left[\theta_{t+1} - \theta_t\right] \\
&= -\theta_0 + \underbrace{\sum_{t=1}^{T_1-1} E\left[\theta_t - \theta_t\right]}_{0} + \underbrace{E\left[\theta_{T_1-1}\right]}_{0} \\
&= -\theta_0
\end{aligned}$$

Pour β, en sortant $\sigma^2_{\triangle_{1D} Z}$ de la somme et en prenant la moyenne des sensibilités entre T=0 et T_1, on obtient :

$$\begin{aligned}
\beta &= \sum_{t=0}^{T_1-1} S_t \times \sigma^2_{\triangle_{1D} Z} \\
&= \left[\sum_{t=0}^{T_1-1} S_t\right] \times \sigma^2_{\triangle_{1D} Z} \\
&= T_1 \times \overline{S}_{T_0,T_1} \times \sigma^2_{\triangle_{1D} Z}
\end{aligned}$$

Au final, on a :

$$\boxed{\theta_0 \simeq -T_1 \times \overline{S}_{T_0,T_1} \times \sigma^2_{\triangle_{1D} Z} \qquad avec \qquad \overline{S}_{T_0,T_1} = \frac{1}{T_1} \times \sum_{t=0}^{T_1-1} S_t}$$

Notons qu'il est possible en ne « rechignant » pas sur les approximations de reécrire la formule précédente sous la forme usuelle suivante :

$$\theta_0 \simeq \frac{f_{T_1} \times f_{T_2} \times \sigma^2_{\triangle_{1Y}Z}}{2}$$

avec :

- $\sigma_{\triangle_{1Y}Z}$: Volatilité annualisée des variations des taux CT
- f_{T_1} : Durée entre T=0 et T_1 exprimée en années
- f_{T_2} : Durée entre T=0 et T_2=T_1+3M exprimée en années

Il s'agit d'une heuristique de calcul de la prime de convexité couramment utilisée sur les marchés[18] du fait de sa simplicité et de sa cohérence avec les propriétés du biais de convexité décrites au paragraphe 6.3.1.

6.3.2.2 Prime de Convexité = Prime d'un Straddle

Le profil de P/L de la position d'arbitrage FRA vs Futures CT est en première approximation équivalent au profil de P/L d'un straddle. Rappelons qu'un straddle est une position où l'on est simultanément long d'un Put et d'un Call de mêmes caractéristiques et en principe « à la monnaie » (ATM).

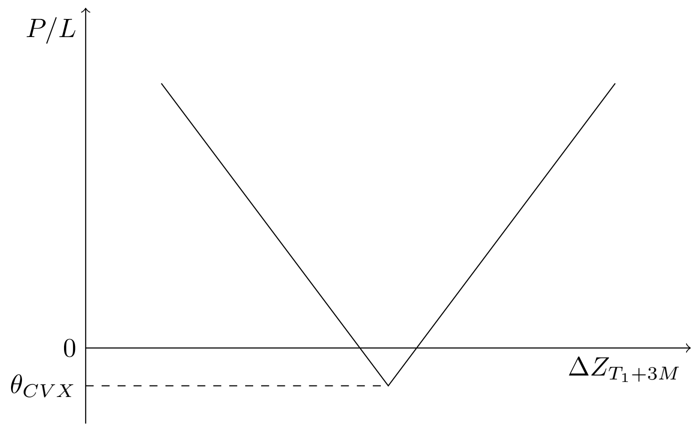

FIG. 6.7 – *Profil de Gain/Perte d'un Straddle à l'Echéance*

A priori, seul le marché des options sur FRA permet de monter ce type de position puisque les options sur FRAs peuvent être « pricées » par un market-maker pour n'importe quel niveau de strike. Cependant, il est préférable d'utiliser le marchés des options sur contrats Futures CT du fait des bonnes propriétés des prix de ces contrats (efficience et liquidité notamment). Dans ce cas, on construira un straddle « théorique » en ayant au préalable pricée un Put et un Call « à la monnaie » à l'aide des volatilités implicites des options négociables sur le marché au moment du pricing (dont il est peu probable qu'elles soient « à la monnaie »).

Comme le P/L de notre position d'arbitrage FRA vs Futures CT n'est pas parfaitement symétrique à la baisse et à la hausse des taux, nous allons nous donner deux scénarios de

18. Cette formule figure notamment dans la notice introductive au contrat Futures Euribor 3M du Chicago Mercantile Exchange qui est un contrat concurrent de celui de Liffe (cf. Frederick Sturm & Peter Barker, « Three-Month Euribor Futures: The Basics », CME Group, September 2011)

variation du taux zéro-coupon spot et calculer le P/L instantané ou intraday de la position dans les deux cas :

- Hausse du taux zéro-coupon spot de X bp : P/L^{+}
- Baisse du taux zéro-coupon spot de X bp : P/L^{-}

On suppose ensuite que notre straddle est constitué de N_{PUT} options de vente (Put) et N_{CALL} options d'achats (Call) sur contrats Futures CT (les deux options sont « à la monnaie »).

$$\left.\begin{array}{ll} Short & N_{FRA}\,FRA \\ Short & \delta_{Hedge} \times N_{FRA}\,FUT \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} Long & N_{CALL}\,FUT\ (ATM) \\ Long & N_{PUT}\,FUT\ (ATM) \end{array}\right.$$

On calcule ensuite le P/L de chacune des deux options pour les deux scénarios de variation du taux zéro-coupon spot décrits précédemment.

Taux ZC Spot	Put	Call
Hausse de X bp	P/L^{+}_{PUT}	P/L^{+}_{CALL}
Baisse de X bp	P/L^{-}_{PUT}	P/L^{-}_{CALL}

TAB. 6.4 – Calcul des Sensibilités du Put et du Call

Le hedge (N_{PUT}, N_{CALL}) de notre position d'arbitrage est ensuite obtenu en imposant que le P/L du straddle soit égal au P/L de notre position d'arbitrage et ce pour les deux scénarios de variation du taux zéro-coupon spot :

$$\left\{\begin{array}{ll} P/L^{+} & = N_{PUT} \times P/L^{+}_{PUT} + N_{CALL} \times P/L^{+}_{CALL} \\ P/L^{-} & = N_{PUT} \times P/L^{-}_{PUT} + N_{CALL} \times P/L^{-}_{CALL} \end{array}\right.$$

On en déduit N_{PUT} et N_{CALL} :

$$\left\{\begin{array}{ll} N_{CALL} & = \frac{P/L^{-}_{PUT} \times P/L^{+} - P/L^{+}_{PUT} \times P/L^{-}}{P/L^{-}_{PUT} \times P/L^{+}_{CALL} - P/L^{+}_{PUT} \times P/L^{-}_{CALL}} \\ N_{PUT} & = \frac{P/L^{-}_{CALL} \times P/L^{+} - P/L^{+}_{CALL} \times P/L^{-}}{P/L^{+}_{PUT} \times P/L^{-}_{CALL} - P/L^{-}_{PUT} \times P/L^{+}_{CALL}} \end{array}\right.$$

Le spread de convexité est finalement estimé à partir de la prime du straddle :

$$\boxed{\theta_{CVX} = N_{PUT} \times p_{PUT} + N_{CALL} \times p_{CALL}}$$

où p_{PUT} et p_{CALL} sont les primes unitaires des options d'achat et de vente sur contrats Futures CT pricées précédemment.

6.3.3 Application - Pricing des Swaps de Taux

Le pricing des swaps de taux a été expliqué à la section 2 du Chapitre 5.

Les techniques décrites permettent de pricer des structures de swaps non cotées à partir des taux de swap cotés (en fait à partir des courbes de taux zéro-coupon issues des courbes de taux swap « au pair »).

Mais comment pricer une structure de swap donnée sans utiliser les taux des swaps cotés ?

On pourrait a priori utiliser les taux de FRA qui sont homogènes à des taux de swap[19] et permettent en théorie de pricer toutes les structures de swaps. Cependant, le marché des FRA est, comme le marché des swaps, un marché de « gré-à-gré » qui n'offre aucune garantie de liquidité, d'unicité et d'accessibilité des taux de FRA et sur lequel les FRAs sont rarement cotés sur des échéances longues.

La solution consiste donc à utiliser les contrats Futures CT qui permettent de pricer toutes les structures de swaps. En général les marchés organisés (Futures) sont plus liquides que les marchés OTC (FRAs) et des contrats sont disponibles pour des échéances lointaines (cas des contrats Futures Eurodollar). Par contre les taux à terme implicites dans les prix des Futures devront être corrigés du biais de convexité pour reconstituer les taux forwards.

Sur un plan pratique, la procédure à suivre est la suivante.

Partons des prix des contrats Futures CT cotés sur les différentes échéances contiguës et calculons les taux Futures implicites correspondants par la formule générique :

$$R^{FUT}_{T_1+k\times 3M} = 100 - P^{FUT}_{T_1+k\times 3M}$$

T_1 est l'échéance du premier contrat (contrat « front »).

Le tableau 6.5 ci-dessous regroupe les données initiales nécessaires au calcul.

Echéance	T_1	T_1+3M	...	T_1+k×3M	...	T_1+K×3M
Prix	$P^{FUT}_{T_1}$	$P^{FUT}_{T_1+3M}$	...	$P^{FUT}_{T_1+k\times 3M}$	...	$P^{FUT}_{T_1+K\times 3M}$
Taux	$R^{FUT}_{T_1}$	$R^{FUT}_{T_1+3M}$	...	$R^{FUT}_{T_1+k\times 3M}$	...	$R^{FUT}_{T_1+K\times 3M}$

TAB. 6.5 – Prix et Taux Implicites des Contrats Futures par Echéance

L'étape suivante consiste à calculer les taux de FRA (Forward) à partir des taux Futures correspondants en corrigeant les taux Futures du biais de convexité. Pour simplifier, on considère une volatilité des taux CT uniforme sur toutes les maturités et on corrige les taux Futures via l'heuristique donnée au sous-paragraphe 6.3.2.1 :

$$R^{FRA}_{T_1+k\times 3M} = R^{FUT}_{T_1+k\times 3M} - \frac{f_{T_1+k\times 3M} \times f_{T_1+(k+1)\times 3M} \times \sigma^2_{\triangle_{1Y} Z}}{2}$$

Les taux de FRA sont regroupés dans le tableau 6.6 ci-dessous pour les périodes contiguës correspondants aux périodes des contrats Futures CT.

Echéance	T_1	T_1+3M	...	T_1+k×3M	...	T_1+K×3M
Taux	$R^{FRA}_{T_1}$	$R^{FRA}_{T_1+3M}$	...	$R^{FRA}_{T_1+k\times 3M}$	...	$R^{FRA}_{T_1+K\times 3M}$

TAB. 6.6 – Taux des Contrats de FRA Implicites

Le taux générique $R^{FRA}_{T_1+k\times 3M}$ est le taux Forward de date de départ T_1+k×3M et de date de maturité T_1+(k+1)×3M.

19. Même référence Euribor et même méthode de valorisation

La dernière étape consiste à transformer cette courbe des taux Forwards en une courbe des taux Spot en « empilant » les taux Forwards via la formule générique :

$$R_{T_k}^{SPOT} = \left[\left(1 + R_{T_1}^{SPOT}\right)^{f_{T_1}} \times \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 + R_{T_i, T_i+3M}^{FRA}\right)^{f_{3M}} \right]^{1/f_{T_k}} - 1$$

Le premier taux Spot $R_{T_1}^{SPOT}$ est donné par le taux Euribor de maturité T_1.

Au final, la courbe des taux ZC FRA/Swap Spot est donnée par le tableau 6.7 ci-dessous :

Echéance	T_1	T_1+3M	...	T_1+k×3M	...	T_1+K×3M
Taux	$R_{T_1}^{SPOT}$	$R_{T_1+3M}^{SPOT}$	...	$R_{T_1+k\times 3M}^{SPOT}$	...	$R_{T_1+K\times 3M}^{SPOT}$

TAB. 6.7 – Taux ZC FRA/Swap départ Spot