Chapitre 7

Contrats Futures LT vs Cash

L'objet de ce chapitre est de présenter les contrats Futures sur obligations d'Etat dont l'archétype est le Tbond Futures du CBOT (Chicago Board of Trade) crée en 1973. Parmi les contrats du même type, nous avons choisi le contrat Euro-Bund de l'Eurex qui est l'un des contrat Futures (tout types de sous-jacents confondus) le plus actif au monde. La relation cash-Futures est assez simple lorsque le sous-jacent théorique du contrat (obligation notionnelle) est livrable à l'échéance du contrat ou sert de référence pour un cash settlement. Il en va tout autrement pour les contrats Futures de type « Tbond Futures » en raison de la possibilité, pour le vendeur, de choisir, à l'échéance, les titres les « moins chers à livrer » dans un panier de titres livrables appelé gisement (obligations de l'Etat Allemand pour le contrat Euro-Bund) dont la règle contractuelle de mise en équivalence (facteur de concordance) n'est qu'approximative (règle de trois). Ce particularisme (historique) implique que le vendeur de contrats Futures est simultanément acheteur d'une option implicite de livraison. La compréhension de ces mécanismes et des techniques de pricing associées est indispensable à l'arbitragiste taux et au market-maker obligataire (trading de base) mais aussi au gérant obligataire (couverture du risque de taux).

7.1 Contrats Futures Long Terme

Nous allons, dans cette première section, décrire les contrats Futures LT de façon générale (7.1.1) et introduire les concepts propres à ce type de marchés. Contrairement aux contrats Futures CT, les contrats Futures LT donnent lieu à livraison physique du sous-jacent à l'échéance du contrat. Le paragraphe 7.1.2 nous permettra de décrire précisément ce mécanisme de livraison pour en comprendre à la fois les raisons (historiques) et les conséquences en terme de pricing. On détaillera enfin le contrat Futures Euro-Bund de l'Eurex (7.1.3) qui est le marché Futures de référence sur la partie LT de la courbe des taux Etats dans la zone Euro.

7.1.1 Généralités

Les contrats Futures LT sont des instruments financiers hors bilan négociés sur des marchés organisés. Un contrat Futures LT peut être interprété comme une garantie de prix (à terme) pour l'achat ou la vente d'obligations d'Etat pour un montant nominal et une date de livraison pré-déterminés et standardisés.

Les caractéristiques les plus importantes d'un contrat Futures LT sont :

1. Le montant nominal N_1 du sous-jacent (pour 1 contrat)

2. Les caractéristiques de l'obligation de référence (sous-jacent fictif du contrat)
3. Le gisement du contrat (titres obligataires livrables à l'échéance)
4. L'échelon minimal de cotation (tick)

Comme pour les contrats Futures CT, plusieurs contrats sont cotés simultanément qui portent sur le même sous-jacent fictif mais diffèrent par la date d'échéance[1].

Les contrats Futures LT sont négociés en prix. Ce prix n'est autre que le prix Futures pour lequel les intervenants sont prêts à acheter ou vendre l'obligation (fictive) de référence à la date d'échéance du contrat.

La valeur de l'échelon minimal de cotation (tick value) est constante et identique à la hausse (+ 1 tick) et à la baisse (-1 tick). Le prix d'un contrat Futures LT est un multiple de la tick value du contrat.

Plus précisément, la valeur d'un tick s'écrit :

$$Tick\,Value\,(Euros) = N_1\ \,(Euros) \times Tick\ \,(\%)$$

Cette valeur correspond au gain latent (resp. perte latente) réalisé par une position longue (resp. short) d'1 contrat lorsque le prix du contrat Futures LT augmente d'un tick.

Les intervenants[2] sur un contrat Futures LT peuvent être acheteurs (long) ou vendeurs (short) :

1. L'acheteur d'un contrat Futures LT voit sa position se valoriser lorsque le prix du contrat monte. L'acheteur d'un contrat Futures LT cherche donc implicitement à se couvrir contre une hausse du prix des obligations sous-jacentes ou, de façon équivalente, à une baisse des taux d'intérêt LT
2. Le vendeur d'un contrat Futures LT voit sa position se valoriser lorsque le prix du contrat baisse. L'acheteur d'un contrat Futures LT cherche donc implicitement à se couvrir contre une baisse du prix des obligations sous-jacentes ou, de façon équivalente, à une hausse des taux d'intérêt LT

Les contrats Futures LT, comme les contrats Futures CT, sont négociés sur des marchés organisés qui s'interposent entres les acheteurs et les vendeurs. Rappelons que l'un des rôles essentiels du marché organisé consiste à garantir la sécurité du réglement des transactions en limitant l'impact d'un défaut (non systémique) via deux mécanismes principaux, le dépôt de garantie et les appels de marges[3].

Considérons la situation à la date t d'une banque détentrice d'une position longue sur K contrats achetés en date t_0 et qui expirent en date t_1 :

$$t_0\ \,(date\ d'achat) < t\ \,(date\ de\ valorisation) < t_1\,(date\ de\ maturit\acute{e})$$

Si elle conserve ses contrats jusqu'à leur date d'échéance, elle devra faire face aux appels de marges suivants :

$$\begin{cases} K \times Tick\,Value \times \frac{P_{FUT,t_0} - P^{Fixing}_{FUT,t_0}}{Tick} & (en\,t_0) \\ K \times Tick\,Value \times \frac{P^{Fixing}_{FUT,t} - P^{Fixing}_{FUT,t-1}}{Tick} & (en\,t) \\ K \times Tick\,Value \times \frac{P^{Fixing}_{FUT,t_1} - P^{Fixing}_{FUT,t_1-1}}{Tick} & (en\,t_1) \end{cases}$$

1. Pour rappel, les mois d'échéances des contrats Futures LT sont standardisés et au nombre de quatre par an : Mars (H), Juin (M), Septembre (U) et Décembre (Z). Des contrats Futures LT sont généralement ouverts pour l'année en cours et sur les années suivantes en fonction de la demande des intervenants. Lorsqu'un contrat arrive à échéance, un autre est ouvert

2. La typologie des intervenants sur les marchés Futures est toujours la même quel que soit le sous-jacent du contrat (cf. Chapitre 6)

3. Ces deux mécanismes ont déjà été défini dans le cadre des contrats Futures CT (cf. Chapitre 6)

Dans ces formules, tous les prix sont des prix de compensation (fixing) à l'exception de P_{FUT,t_0} qui est le prix auquel les contrats ont été acheté en date t_0.

Le montant total de ces appels de marges (hors financement) s'écrit :

$$Total = K \times Tick\,Value \times \frac{P_{FUT,t_1}^{Fixing} - P_{FUT,t_0}}{Tick} \qquad (de\ t_0\ à\ t_1)$$

Le mécanisme des appels de marge n'a pas d'impact sur la valorisation des positions (hors financement des appels de marges) mais permet simplement de transformer les plus-ou-moins values latentes constatées en fin de journée en plus-ou-moins values réalisées.

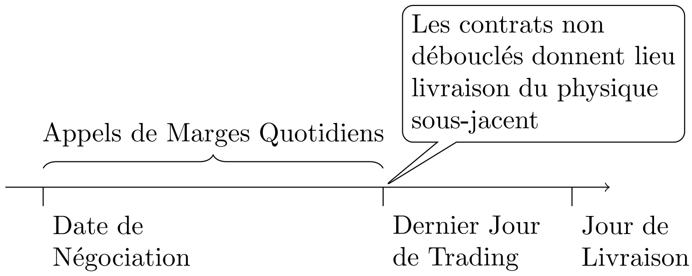

Fig. 7.1 – *Appels de Marge Quotidiens et Livraison du Sous-Jacent*

Notons enfin que le cours de compensation (settlement price) est publié par le marché organisé en charge de la gestion du contrat Futures considéré chaque soir après la fermeture (clôture) du marché[4].

A l'échéance d'un contrat Futures LT (dernier jour de trading), les contrats non débouclés dans le marché donnent lieu à une livraison « physique » du sous-jacent. Il s'agit d'une différence majeure par rapport aux contrats Futures CT dont le débouclement se fait uniquement via un dernier appel de marges sans obligation de prêt-emprunt[5].

7.1.2 Descriptif du Mécanisme de Livraison

Les contrats Futures LT (sur obligations d'Etat) donnent lieu à la livraison physique du « sous-jacent » (emprunts du gisement) des vendeurs vers les acheteurs. A l'échéance du contrat, le vendeur choisit le ou les titres à livrer dans le gisement (ou panier) du contrat qui défini précisément les titres livrables sur ce contrat. Les titres du gisement ayant des caractéristiques différentes (coupons et maturités résiduelles) de l'emprunt de référence, il est donc nécessaire de reconstituer des prix à terme (ou prix de livraison) pour chacun d'entre eux.

Le mécanisme de livraison des contrats Futures LT de type « Tbond Futures » permet de recréer des prix à termes pour les différents emprunts du gisement, il est entièrement défini par les deux concepts suivants :

- Prix de livraison
- Facteurs de concordance

4. Parmi d'autres statistiques complémentaires sur la séance (cf. Chapitre 6)

5. Le mécanisme de livraison « physique » sur les contrats Futures LT et le calcul du cours de compensation à partir du fixing Euribor lors du dernier jour de trading sur les contrats Futures CT jouent exactement le même rôle sur les deux types de contrats Futures à savoir garantir la convergence des « prix » Futures vers les « prix » Spots à l'échéance du contrat

Supposons que le gisement du contrat est constitué de I obligations.

Le **prix de livraison** (pied de coupon) de l'obligation n°i du gisement est défini contractuellement par :

$$PL_i = \frac{FC_i}{100} \times PL_{Ref}$$

avec

- PL_i : Prix (pied de coupon) de livraison de l'obligation n°i
- FC_i : Facteur de concordance de l'obligation n°i
- PL_{Ref} : Prix de liquidation du contrat Futures LT

Supposons que la banque X décide d'« aller à la livraison » et que les vendeurs choisissent de livrer l'obligation n°i du gisement. Dans ce cas, la procédure de livraison « physique » consiste pour la banque X a recevoir des obligations n°i du gisement pour un montant nominal $K \times N_1$ pour un prix (pied de coupon) unitaire PL_i.

Le montant total payé en contrepartie par la banque X est donc :

$$Montant\ Payé = K \times N_1 \times [PL_i + CC_i]$$

où CC_i est le coupon couru de l'obligation n°i du gisement en date d'échéance du contrat.

Par définition, on appelle **facteur de concordance** $\mathrm{FC_i}$ de l'obligation n°i du gisement son prix pied de coupon calculé à l'échéance du contrat Futures en actualisant les cashflows au taux de coupon $\mathrm{C_{Ref}}$ de l'obligation de référence :

$$FC_i + CC_{i,1} = \sum_{n=1}^{N_i} \frac{100 \times C_i}{(1 + C_{Ref})^{f_n}} + \frac{100}{(1 + C_{Ref})^{f_{N_i}}}$$

avec

- C_i : Taux de coupon de l'obligation n°i du gisement
- N_i : Nombre de cashflows résiduels pour l'obligation n°i en date d'échéance du contrat
- f_n : Fraction d'année pour le n-ième cashflow

On constate que la formule de calcul du prix de livraison permet donc un « pricing » de l'obligation n°i du gisement selon une simple règle de trois.

En notant $\mathrm{R_{Fut}}$ le taux actuariel de l'obligation de référence à l'échéance du contrat, on peut re-écrire le prix de livraison du titre n°i (pied de coupon) sous la forme suivante :

$$S_{i,1}(R_{Fut}) = \frac{S_{i,1}(C_{Ref})}{S_{Ref,1}(C_{Ref})} \times S_{Ref,1}(R_{Fut})$$

avec

$$S_{Ref,1}(R_{Fut}) = F_1 \qquad et \qquad S_{Ref,1}(C_{Ref}) = 100$$

En effet,

- Le prix de l'obligation de référence en date d'échéance du contrat calculé en actualisant les cashflows au taux $\mathrm{R_{Fut}}$ n'est autre que le prix de liquidation $\mathrm{F_1}$ du contrat (puisqu'à l'échéance le prix Futures converge vers le prix Spot)

– Le prix de l'obligation de référence en date d'échéance du contrat calculé en actualisant les cashflows au taux $\mathrm{C_{Ref}}$ qui n'est autre que le prix au pair (100) de l'obligation de référence

On a donc bien :

$$S_{i,1}\left(R_{Fut}\right) = \frac{S_{i,1}\left(C_{Ref}\right)}{100} \times F_1$$

Les formules du facteur de concordance et du prix de livraison ne tiennent donc compte :

– Ni de la non-linéarité de la relation prix-taux des obligations
– Ni de la forme de la courbe des taux zéro-coupons Etat
– Ni des différences de structures de cashflows des obligations du gisement par rapport à l'emprunt de référence

Il faut néanmoins se souvenir que le premier contrat du genre à été crée en 1973 (T-Bond Futures du CBOT) pour comprendre l'intérêt d'une règle de trois certe rustique mais adaptée aux moyens de calcul de l'époque [6].

La conséquence la plus importante du facteur de concordance est l'existence d'un emprunt du gisement **moins cher à livrer** (noté plus simplement CTD acronyme de l'anglicisme « cheapest-to-deliver ») à l'échéance du contrat Futures. En effet, à l'échéance du contrat, le vendeur compare, pour chaque titre du gisement :

– Le prix du titre n°i sur le marché spot : $S_{i,1} + CC_{i,1}$
– Le prix de livraison du titre n°i : $f_i \times F_1 + CC_{i,1}$

Il choisit donc le titre (CTD) qui réalise le minimum suivant :

$$CTD = \underset{i}{ArgMin}\left\{BN_{i,1}\right\} \qquad avec \qquad BN_{i,1} = S_{i,1} - \frac{FC_i}{100} \times F_1$$

Par définition, $BN_{i,1}$ désigne la base nette du titre livrable n°i à l'échéance ($\mathrm{T_1}$) du contrat Futures [7].

On notera qu'à l'échéance du contrat Futures, il est trivialement possible d'arbitrer entre la CTD et le Futures si la base nette $BN_{CTD,1}$ de la CTD n'est pas nulle [8]. On a donc sous hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) :

$$BN_{CTD,1} = 0 \qquad et \qquad BN_{i,1} > 0 \ (i \neq CTD)$$

En conséquence, le prix du contrat Futures (à l'échéance) doit être égal à :

$$F_1 = \frac{S_{CTD,1}}{f_{CTD}} \qquad avec \qquad f_{CTD} = \frac{FC_{CTD}}{100}$$

On peut donc réinterpréter la CTD (à l'échéance) comme le titre du gisement qui a le prix « équivalent Futures » le plus petit :

$$CTD = \underset{i}{ArgMin}\left\{\frac{S_{i,1}}{f_i}\right\}$$

6. Sans ce « particularisme historique » notre présentation des contrats Futures LT pourrait pratiquement s'arrêter là car les notions de « cheapest-to-deliver » et d'options implicites de livraisons n'existent qu'en raison du facteur de concordance. Pour le dire autrement, une mise en cohérence parfaite des titres du gisement à l'échéance rendrait les vendeurs indifférents à livrer un titre plutôt qu'un autre (les titres seraient « equi-cheapest » à l'échéance)

7. Les concepts de base nette, base brute et portage sont détaillés dans la section 2 du présent chapitre

8. Un contrat Futures (ou forward) converge vers le contrat Spot lorsque la période future (ou forward) converge vers zéro (ici lorsque $\mathrm{T_0}$ converge vers $\mathrm{T_1}$)

Notons tout de même que la base nette de la CTD à l'échéance calculée à partir du prix de liquidation du contrat Futures peut ne pas être nulle du simple fait que le prix de liquidation du contrat Futures est publié après la clôture du marché de sorte qu'il n'est plus possible d'arbitrer entre le Futures et le Cash.

7.1.3 Le Contrat Euro-BUND (Eurex)

Le contrat phare pour la fixation des taux Etat LT dans la zone Euro est depuis la création de l'Euro [9] le contrat German Government Bond (Euro-Bund) de l'Eurex (Francfort) dont les caractéristiques sont :

- Nominal : 100000 Euros
- Obligation de référence : Bund 10A au « pair » à 6% (échéance du contrat)
- Mois de livraisons : Mars, Juin, Septembre, Décembre
- Jours de livraison : 10ème jours ouvré du mois de livraison
- Echelon minimal de cotation : 0.01%
- Dernier jours de trading : Jours de livraison– 2 jours ouvrés
- Dernière heure de trading : 12H30 (heure de Francfort)
- Tick Value : EUR 10

Par définition, la tick value est le montant à recevoir ou à verser sur un contrat pour une variation du prix du Futures de 0.01% :

$$EUR\,10 = EUR\,100000 \times 0.01\%$$

Comme nous l'avons vu précédemment, l'obligation de référence n'éxiste pas sur le marché obligataire et ne peut donc pas être livrée. Le vendeur va donc choisir les titres à livrer parmi un ensemble de titres (gisement) dont les caractéristiques sont :

- Obligations émises par l'Etat Allemand
- A taux fixe et remboursement « in fine »
- Entre $8\frac{1}{2}$ et $10\frac{1}{2}$ de maturité résiduelle (à l'échéance du contrat)
- Encours Minimal de 2 Milliard d'Euros

Donnons un exemple simple pour fixer les idées.

Cet exemple porte sur le contrat Mars 2002 de l'Euro-Bund donc le gisement (obligations livrables et facteurs de concordances associés) est décrit dans le tableau 7.1 ci-dessous.

Titre	Coupon	Date de Maturité	Facteur de Concordance
DE0001135168	5.25	4 Jan 2011	94.9546
DE0001135184	5.00	4 Jul 2011	92.9773
DE0001135192	5.00	4 Jan 2012	92.7170

TAB. 7.1 – Gisement du Contrat Euro-Bund Mars 2002

9. A ce titre, rappelons que des contrats Futures sur obligations de l'Etat Français ont existé en France de 1986 à 2000. Ces Futures étaient négociables par le MArché à Terme d'Instruments Financiers (MATIF) qui a disparu suite à son combat frontal avec le l'Euro-Bund (Eurex) lorsque l'Euro a été créé. Devenus « redondants » en terme de risques couverts dans le cadre de l'Euro (disparition des primes de risque de change) et du pacte de stabilité et de croissance (quasi-disparition des primes de risque de crédit), seul le plus liquide des deux Futures LT a survécu

Supposons que le 15 Février 02 à 10H38 (date de négociation), une banque X achète 10 contrats Mars 02 à 107.70. Il s'agit de l'achat d'un instrument hors bilan, cette opération ne génère donc pas de flux de trésorerie (hors paiement du dépôt de garantie qui est auto-financé).

Le 15 Février 02 à 18H00, le cours de compensation du contrat Mars 2002 est 107.92. Comme le cours de compensation est supérieur au cours d'achat, la banque X va recevoir de l'Eurex des appels de marges pour un montant de +2200 Euros :

$$EUR\,2200 = 10\ (contrats) \times 22\ (ticks) \times EUR\,10\,(valeur\ d'1\,tick)$$

Plaçons-nous maintenant le 8 Mars 02 à 12H30 (dernier jour de trading) et donnons les informations supplémentaires suivantes :

- Prix de Liquidation (Futures): 107.56
- Cours de compensation du 7 Mars 02 : 107.66

De la même façon on trouve que le montant des derniers appels de marges est de - 1000 Euros (baisse de 10 ticks) et le total des appels de marges (hors financement) est de - 400 Euros (baisse de 4 ticks) :

$$EUR\ -400 = 10\ (contrats) \times -4\ (ticks) \times EUR\,10\,(valeur\ d'1\,tick)$$

Puisque la banque X « va à la livraison », quel titre obligataire du gisement lui sera livrée en toute vraissemblance ?

Cherchons le titre le moins cher à livrer (à l'échéance) sur le contrat Mars 2002 du Bund connaissant les prix spots des titres livrables à la clôture du contrat Futures. Le tableau 7.2 résume les calculs nécessaires à la détermination de la CTD sur le contrat Mars 2002 sur l'Euro-Bund.

	Prix Spot (1)	Prix de Livraison (2)	Base Nette (1) - (2)
4 Jan 2011	102.45	102.1332	0.3168
4 Jul 2011	100.11	100.0064	0.1036
4 Jan 2012	99.73	99.7264	0.0036

TAB. 7.2 – Calcul de la CTD du contrat Euro-Bund Mars 2002

La CTD du contrat Euro-Bund Mars 2002 à l'échéance est donc la « 4 Jan 2012 ». Le prix de livraison (pied de coupon) que devra payer la banque X est de 99.726405 calculé comme suit :

$$99.726405 = \frac{92.7170}{100} \times 107.56$$

On notera que la convergence du prix Futures vers le prix Spot n'est réalisée qu'à ε-près du fait que le prix de liquidation du contrat Futures n'est réellement connu qu'après la clôture et peut différer (en général de façon maginale) du cours de clôture.

Cet exemple illustre le mécanisme de livraison décrit au paragraphe 7.1.2. Rappelons que la livraison ne concerne que les contrats non débouclés après la clôture du marché le dernier jour de trading. La banque X aurait pu, par exemple, revendre ses 10 contrats le 8 Mars 02 avant 12H30 à un prix de 107.56 ce qui ne change rien en terme d'appels de marges cumulés mais lui évite d'« aller à la livraison » si tel n'était pas son objectif.

7.2 Arbitrage Cash vs Futures LT

Il existe une relation d'arbitrage exacte et symétrique entre le Futures et le Cash (obligation de référence sous-jacente) lorsque cette obligation est livrable à l'échéance du contrat (7.2.1). Par contre, dans le cas des contrats Futures LT décrits dans la première section de ce chapitre (de type T-Bond Futures du CBOT), on montre que seul l'arbitrage de type « cash & carry » (Long Cash vs Short Futures = Long Base) est envisage lorsque le prix du Futures est supérieur à son prix théorique (7.2.2). L'arbitrage inverse « reverse cash & carry » (Short Cash vs Long Futures = Short Base) n'est pas à proprement parler un arbitrage puisque le « vendeur de base » prend le risque d'un changement de CTD entre l'initiation de la position et l'échéance du contrat (7.2.3). On terminera cette section (7.2.4) par une présentation du concept de Taux Repo Implicite et par un comparatif des deux façons (équivalentes) de « regarder » l'arbitrage « cash & carry » (arbitrage sur Futures vs arbitrage sur Repos). Pour alléger l'exposé, on raisonne pour un nominal du contrat future égal à 1 Euro.

7.2.1 Arbitrage « Cash & Carry » Simplifié

On considère dans ce paragraphe un contrat Futures simplifié portant uniquement sur une obligation de référence à taux fixe C_{Ref}, de maturité résiduelle 10A (à l'échéance du contrat) et à remboursement « in fine » que l'on suppose livrable (à l'échéance du contrat). L'achat d'un contrat Futures au prix F_0 en T_0 permet d'acquérir l'obligation de référence à ce prix à l'échéance du contrat (T_1). Pour ce contrat Futures simplifié, un raisonnement d'arbitrage permet de trouver son prix théorique F_0 en T_0.

Dans la suite, on utilise les notations suivantes :

- $S_{Ref,0}$: Prix spot (pied de coupon) de l'obligation de référence en T_0
- F_k : Prix du Futures en T_k (k=0,1)
- $r_{0,1}$: Taux de repo pour l'obligation de référence sur $[T_0, T_1]$
- $CC_{Ref,0}$: Coupon couru de l'obligation de référence en T_0
- $\triangle CC_{Ref}$: Différence de coupons courus entre les dates T_0 et T_1

L'arbitrage « cash & carry » simplifié consiste à réaliser les opérations suivantes en T_0 et T_1 :

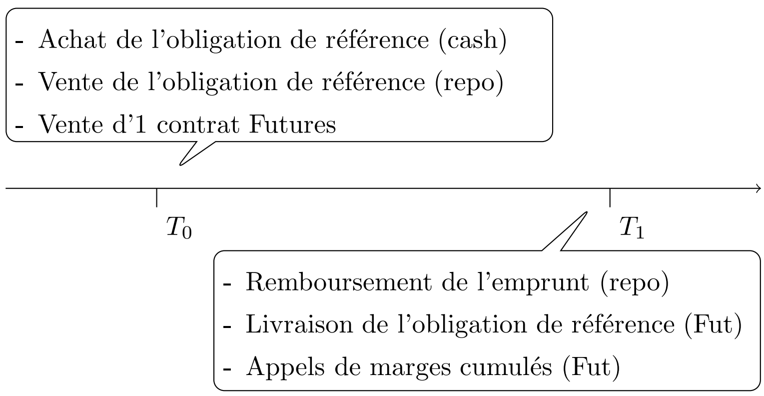

FIG. 7.2 – *Opérations à Réaliser en T_0 et T_1*

Les flux des différentes opérations réalisées en T_0 sont donnés dans le tableau 7.3 ci-dessous :

Opérations	Flux (T_0)
Achat spot de l'obligation de référence	$-(S_{Ref,0} + CC_{Ref,0})$
Vente en repo de l'obligation de référence	$+(S_{Ref,0} + CC_{Ref,0})$
Vente d'1 contrat Futures	0
Total	0

TAB. 7.3 – Flux des Opérations en T_0

Le flux total en T_0 est donc nul.

A l'échéance du contrat Futures en T_1, les flux des différentes opérations sont donnés dans le tableau 7.4 :

Opérations	Flux (T_1)
Appels de marges (h.f.)	$F_0 - F_1$
Livraison de l'obligation de référence	$F_1 + CC_{Ref,1}$
Remboursement de l'emprunt (repo)	$-(S_{Ref,0} + CC_{Ref,0}) \times [1 + r_{0,1} \times f_{0,1}]$
Total	- Base Nette en T_0

TAB. 7.4 – Flux des Opérations en T_1

Le flux total en T_1 est égal à moins la base nette de l'obligation de référence calculée en T_0.

Par définition, la base nette $\mathrm{BN}_{\mathrm{Ref,0}}$ de l'obligation de référence en T_0 est la somme de sa base brute $\mathrm{BB}_{\mathrm{Ref,0}}$ et de son portage $\mathrm{PT}_{\mathrm{Ref,0}}$ en T_0 :

$$BN_{Ref,0} = BB_{Ref,0} + PT_{Ref,0} \qquad (\textit{base nette})$$

avec

$$\begin{cases} BB_{Ref,0} = & S_{Ref,0} - F_0 \qquad (\textit{base brute}) \\ PT_{Ref,0} = & r_{0,1} \times f_{0,1} \times (S_{Ref,0} + CC_{Ref,0}) - \triangle CC_{Ref} \qquad (\textit{portage}) \end{cases}$$

On constate donc que la base nette $\mathrm{BN}_{\mathrm{Ref,0}}$ est parfaitement connue en T_0 et doit donc être nulle pour garantir l'absence d'opportunité d'arbitrage :

$$BN_{Ref,0} = 0 \qquad \forall\, T_0 \leq T_1 \qquad (AOA)$$

De la contrainte précédente, on déduit le prix théorique du contrat Futures « simplifié » sur l'obligation de référence en T_0 :

$$\boxed{F_0 = S_{Ref,0} + [r_{0,1} \times f_{0,1} \times (S_{Ref,0} + CC_{Ref,0}) - \triangle CC_{Ref}]}$$

Cette analyse montre que le prix du Futures doit être égal au prix du cash (prix spot de l'obligation) augmenté du portage total (obligation et financement) pour garantir l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA).

En première approximation, on constate que si la courbe des taux est :

- « Normale » (les taux long terme sont supérieurs aux taux court terme) : Le prix Futures de l'obligation de référence est inférieur à son prix Spot
- « Inversée » (les taux long terme sont inférieurs aux taux court terme) : Le prix Futures de l'obligation de référence est supérieur à son prix Spot

On notera pour terminer ce paragraphe que la formule trouvée n'est autre que l'application au cas particulier des obligations de la relation d'arbitrage classique entre marché Futures et marché Spot qui veut que le prix Futures soit égal au prix Spot augmenté du coût de portage pour respecter l'AOA (cette relation générale s'applique quel que soit le sous-jacent du contrat Futures).

7.2.2 Arbitrage « Cash & Carry »

Le passage d'un contrat Futures « simplifié » à un contrat Futures standard de type T-Bond Futures (CBOT) introduit un « facteur de risque » supplémentaire puisque l'on ne sait pas a priori quel sera le titre CTD à l'échéance du contrat en T_1.

On peut néanmoins monter la position d'arbitrage en utilisant le titre le **moins cher à livrer (CTD) anticipé** à la date T_0. Par définition, on appelle CTD anticipée en T_0, le titre du gisement qui a la base nette la plus faible à cette date (voir plus bas le calcul de la base nette dans le cas de l'arbitrage standard).

On a donc :

$$CTD_{T_0} = \underset{i}{ArgMin}\{BN_{i,T_0}\}$$

L'arbitrage « cash & carry » standard (appelée aussi position de « base ») diffère du cas simplifié dans la mesure où le titre n°i peut être ou ne pas être CTD à l'échéance du contrat.

Nous allons donc traiter les deux cas séparément.

7.2.2.1 Le titre n°i est CTD en T_1

L'arbitrage « cash & carry » standard consiste à réaliser les opérations suivantes en T_0 et T_1 :

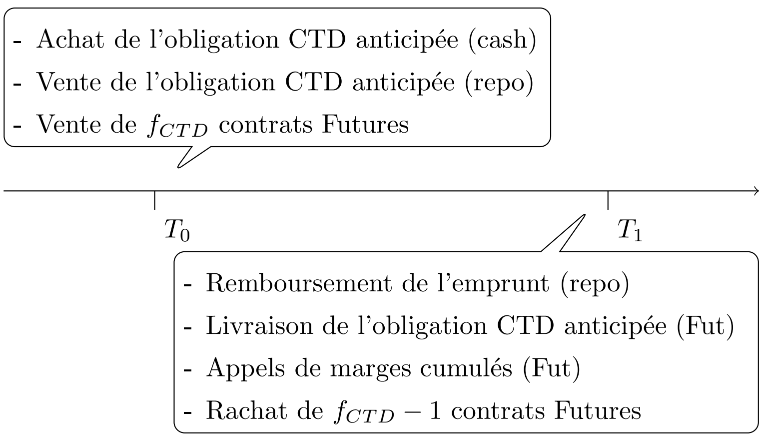

Fig. 7.3 – *Opérations à Réaliser en T_0 et T_1*

Les flux des différentes opérations réalisées en T_0 sont donnés dans le tableau 7.5 ci-dessous :

Opérations	Flux (T_0)
Achat spot de l'obligation n°i	$-(S_{i,0}+CC_{i,0})$
Vente en repo de l'obligation n°i	$+(S_{i,0}+CC_{i,0})$
Vente de f_i contrats Futures LT	0
Total	0

TAB. 7.5 – Flux des Opérations en T_0

Le flux total en T_0 est donc nul.

Les flux des différentes opérations réalisées à l'échéance du contrat Futures en T_1 sont donnés dans le tableau 7.6 :

Opérations	Flux (T_1)
Appels de marges (h.f.)	$F_0 - F_1$
Livraison de l'obligation n°i	$f_i \times F_1 + CC_{i,1}$
Remboursement de l'emprunt (repo)	$-(S_{i,0}+CC_{i,0}) \times [1 + r_{0,1} \times f_{0,1}]$
Rachat de (f_i − 1) contrats Futures LT	$(f_i - 1) \times (F_0 - F_1)$
Total	- Base Nette en T_0

TAB. 7.6 – Flux des Opérations en T_1

Le flux total en T_1 est égal à moins la base nette (calculée en T_0) de l'obligation n°i du gisement.

Comme précédemment, on définit la base nette $BN_{i,0}$ de l'obligation de référence en T_0 comme la somme de sa base brute $BB_{i,0}$ et de son portage $PT_{i,0}$ en T_0 (avec des notations similaires) :

$$BN_{i,0} = BB_{i,0} + PT_{i,0} \qquad (\textit{base nette})$$

avec

$$\begin{cases} BB_{i,0} = & S_{i,0} - f_i \times F_0 \qquad (\textit{base brute}) \\ PT_{i,0} = & r_{0,1} \times f_{0,1} \times (S_{i,0} + CC_{i,0}) - \triangle CC_i \qquad (\textit{portage}) \end{cases}$$

On constate donc, qu'il n'y a pas de différence fondamentale entre le contrat future simplifié et le contrat future standard si, bien sur, on se place dans l'hypothèse où le titre n°i reste CTD à l'échéance du contrat.

7.2.2.2 Le titre n°i n'est pas CTD en T_1

Dans ce cas, l'arbitragiste (qui est short de contrats Futures) peut ne pas tenir compte du changement de CTD et livrer le titre n°i à l'échéance du contrat Futures (ce qui nous ramène au cas précédent). En pratique, il n'a cependant pas intérêt à livrer le titre n°i (ancienne CTD) mais le titre n°j (nouvelle CTD), ce qui mécaniquement améliore son P/L.

Supposons que le titre n°j (j≠i) est le CTD en T_1.

L'arbitragiste peut améliorer son P/L en réalisant le « swap » suivant en T_1 :

- Vendre l'obligation n°i
- Acheter l'obligation n°j

Et en livrant l'obligation n°j à l'échéance du contrat Futures.

Pour calculer le P/L de cette stratégie de « cash & carry » avec un « swap » entre les titres n°i et n°j à l'échéance du contrat, regardons (cf. Tableau 7.7) quelles sont les opérations à réaliser en T_1 et les flux associés :

Opérations	Flux (T_1)
Appels de marges (h.f.)	$F_0 - F_1$
Vente de l'obligation n°i	$+(S_{i,1} + CC_{i,1})$
Achat de l'obligation n°j	$-(S_{j,1} + CC_{j,1})$
Livraison de l'obligation n°j	$f_j \times F_1 + CC_{j,1}$
Remboursement de l'emprunt (repo)	$-(S_{i,0} + CC_{i,0}) \times [1 + r_{0,1} \times f_{0,1}]$
Rachat de (f_i − 1) contrats Futures LT	$(f_i - 1) \times (F_0 - F_1)$
Total	P/L

TAB. 7.7 – Flux des Opérations en T_1

En additionnant les différents flux et en réorganisant les termes, on trouve :

$$P/L = -BN_{i,0} - (BN_{j,1} - BN_{i,1})$$

Si le titre n°j est la CTD à l'échéance du contrat Futures alors :

$$BN_{j,1} = 0 \qquad et \qquad BN_{i,1} > 0$$

En conséquence, le P/L de la stratégie est amélioré du montant de la base nette du titre n°i en T_1 :

$$P/L = BN_{i,1} - BN_{i,0} > -BN_{i,0}$$

Le vendeur de contrats Futures a donc toujours intérêt à livrer la CTD à l'échéance du contrat.

Dans les deux cas, la base nette $BN_{i,0}$ ne peut donc être négative en $T_0 \leq T_1$. Si c'était le cas, on pourrait alors obtenir un gain sans risque sur l'arbitrage puisqu'à l'échéance, on est certain de locker un P/L au moins égal à $-BN_{i,0}$.

En conséquence, sous hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) on doit avoir :

$$\boxed{BN_{i,0} \geq 0 \qquad \forall\, T_0 \leq T_1}$$

7.2.3 Arbitrage « Reverse Cash & Carry »

Nous venons de voir que la base nette du titre n°i (une obligation quelconque du gisement) ne pouvait pas être négative sous l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrages.

Supposons donc que la base nette du titre n°i est <u>strictement</u> positive en T_0 :

$$BN_{i,0} > 0 \qquad \forall\, T_0 \leq T_1$$

On peut donc penser « a priori » pouvoir mettre en place l'arbitrage inverse appelé logiquement « reverse cash & carry » pour espérer obtenir un P/L strictement positif à l'échéance du contrat Futures.

Quant est-il exactement et quel est le profil de gain-risque de cette stratégie?

Comme précédemment nous distinguons deux cas selon que le titre n°i est ou n'est pas CTD à l'échéance du contrat. Notons que les opérations et les flux sur l'arbitrage « reverse cash & carry » sont strictement symétriques aux opérations et aux flux sur l'arbitrage « cash & carry ».

7.2.3.1 Le titre n°i est CTD en T_1

Si le titre n°i est CTD à l'échéance du contrat Futures alors l'arbitragiste (qui est long de contrats Futures) reçoit le titre n°i (car ce dernier est le « moins cher à livrer » pour le vendeur) ce qui annule sa position short sur le titre n°i. Son P/L est donc strictement égal à la base nette du titre n°i en T_0 qui est strictement positive par hypothèse :

$$P/L = BN_{i,0} > 0$$

7.2.3.2 Le titre n°i n'est pas CTD en T_1

Dans ce cas, l'arbitragiste ne va (vraissemblablement) pas recevoir le titre n°i mais le titre n°j (la CTD à l'échéance du contrat). Il va donc devoir revendre le titre n°j et acheter le titre n°i sur le marché spot pour annuler sa position short sur ce dernier titre. Son P/L est donc strictement égal à :

$$P/L = -BN_{i,1} + BN_{i,0}$$

Dans ce cas, le P/L de l'arbitrage « reverse cash & carry » n'est pas forcément positif. Il peut parfaitement être négatif si la base nette du titre n°i augmente entre la date d'initiation de l'arbitrage (T_0) et la date de débouclage (T_1). Une telle situation est tout à fait envisageable puisqu'à l'échéance du contrat les titres non-CTD ont tendance à se « déconnecter » du contrat Futures.

L'asymétrie qui existe entre le vendeur du contrat (qui choisit le ou les titres à livrer) et l'acheteur (qui ne sais pas à l'avance ce qui va lui être livré) implique donc que la base nette des titres du gisement doit être positive. Seul le titre CTD doit avoir une base nette nulle à l'échéance du contrat Futures pour éviter l'arbitrage trivial entre le Futures et le cash à cette date.

En conclusion de notre analyse, **on constate que la relation d'arbitrage parfaite entre le Cash et le Futures qui prévaut dans le cas d'un contrat Futures simplifié (7.2.1), n'est plus valable pour le contrat Futures standard.**

On a dans le cas standard l'inégalité suivante :

$$\boxed{F_0 \leq \frac{1}{f_i} \times \{S_{i,0} + [r_{0,1} \times f_{0,1} \times (S_{i,0} + CC_{i,0}) - \triangle CC_i]\}}$$

Cette différence est due à l'existence d'un titre « moins cher à livrer » à l'échéance du contrat et au fait que le vendeur d'un contrat Futures bénéficie de l'avantage du choix du titre à livrer par rapport à l'acheteur qui doit accepter ce qu'on lui livre.

Le vendeur d'un contrat Futures est donc simultanément acheteur d'une option implicite de livraison dont la prime est précisément égale à la différence entre le prix théorique du contrat Futures si seul le titre n°i était livrable à l'échéance du contrat Futures (partie droite de l'inégalité précédente) et son prix de marché F_0.

7.2.4 Taux Repo Implicite

Le Taux de Repo Implicite (« Implied Repo Rate » en anglais) est généralement défini dans la litérature comme le taux de repo pour lequel la base nette est nulle.

Formellement, on a donc :

$$BN_{i,0} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad r^*_{0,1} = \frac{f_i \times F_0 - S_{i,0} + \triangle CC_i}{f_{0,1} \times (S_{i,0} + CC_{i,0})}$$

Le concept de Taux de Repo Implicite ne change rien aux analyses faites jusqu'à maintenant mais permet d'introduire une autre façon de regarder l'arbitrage « cash & carry ».

Jusqu'à présent, nous avons regardé l'arbitrage « cash & carry » comme un arbitrage (short) Futures LT contre son synthétique constitué par une position (long) obligataire (CTD anticipée) financée par une position (short) repo jusqu'à la date d'échéance du contrat. Dans cette approche, on est donc simultanément (short) Futures LT vs (long) Futures LT (synthétique) et la Base Nette n'est rien d'autre (au facteur de concordance près) que la différence de prix entre les deux Futures.

$$\boxed{\begin{array}{c} \textit{Arbitrage "Cash \& Carry"} \\ \Leftrightarrow \\ (\textit{short})\ \textit{Futures LT vs}\ (\textit{long})\ \textit{Futures LT Synthétique} \\ \& \\ \textit{Base Nette} \simeq P_{\textit{Futures LT Synthétique}} - P_{\textit{Futures LT}} \end{array}}$$

Une autre approche consiste précisément à regarder l'arbitrage « cash & carry » comme un arbitrage (short) repo contre son synthétique constitué par une position (long) obligataire

(CTD anticipée) couverte par une position (short) de Futures LT. Dans cette approche, on est donc simultanément (short) Repo vs (long) Repo (synthétique) et le Taux de Repo Implicite peut alors s'interpréter comme le taux du repo synthétique.

$$\begin{gathered} Arbitrage\,\text{"}Cash\,\&\,Carry\text{"} \\ \Leftrightarrow \\ (short)\ Repo\,vs\ (long)\ Repo\,Synth\acute{e}tique \\ \& \\ Implied\,Repo\,Rate = Taux\,du\,Repo\,Synth\acute{e}tique \end{gathered}$$

Ces deux approches sont évidemment parfaitement équivalentes en terme de pricing et d'opportunités ou non d'arbitrages.

Comme nous l'avons vu plus haut, un Futures LT correctement pricé implique un prix Futures théorique (calculé à partir de la CTD anticipée) strictement supérieur au prix Futures observé donc une base nette de la CTD anticipée strictement positive. De cette inégalité stricte, on en déduit simplement qu'un Futures LT correctement pricé implique un Taux Repo Implicite strictement inférieur au taux de Repo observé (sur la CTD anticipée). La réciproque est aussi vraie.

$$AOA \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Prix_{Futures\,LT\,Th\acute{e}orique} > Prix_{Futures\,LT} & (Futures\,LT) \\ \qquad\qquad\Updownarrow & \\ Taux_{Repo\,Th\acute{e}orique} < Taux_{Repo} & (Repo\,CTD) \end{cases}$$

Notons que, comme précédemment, la différence entre le taux de repo observé et le taux de repo théorique vient du fait que le repo synthétique intègre une option implicite de livraison. La différence entre les deux taux de repo reflète précisément le coût de cette option implicite de livraison pricée par le marché.

$$Taux_{Repo} - Taux_{Repo\,Th\acute{e}orique} \equiv Co\hat{u}t\,de\,l'option\,de\,livraison > 0$$

L'analyse et le pricing de cette option implicite de livraison sont détaillés dans la section 1.3 qui suit.

A titre d'exemple, considérons un contrat Futures fictif dont les caractéristiques sont :

- Echéance : Dans 3 mois
- Prix d'1 contrat Futures (F_0) : 107.05
- Nominal d'1 contrat : EUR 100

L'obligation de référence de ce Futures a les caractéristiques suivantes :

- Maturité (à l'échéance du contrat) : 10A
- Coupon : 5%

Les titres livrables (gisement) à l'échéance du contrat sont décrits dans le tableau 7.8 ci-dessous[10] :

10. Toutes les obligations sont à coupons annuels et à remboursement « in fine »)

	Titre 1	Titre 2	Titre 3
Maturité	9.5A	10A	10.5A
Coupon	5%	4.5%	4%
Taux Actuariel	3.95%	4.05%	4%
S_0	110.6605	103.6408	101.5593
CC_0	2.5	0	2
CC_1	3.75	1.125	3
Duration Modifiée	7.4026	7.9812	8.2711
FC	99.9770	96.1940	92.1110

TAB. 7.8 – Exemple - Gisement du Contrat Futures LT

On se donne un taux de repo 3 Mois à 2%.

Calculons les bases nettes de chacun des trois titres du gisement (ainsi que les éléments de calcul intermédiaires). Les résultats sont donnés dans le tableau 7.9 ci-dessous, ils sont obtenus par application directe des formules données dans cette section.

	Titre 1	Titre 2	Titre 3
Base Brute	1.13512	0.66519	0.95443
Portage	0.69670	-0.60680	-0.49220
Base Nette	0.43842	0.05839	0.46223

TAB. 7.9 – Exemple - Calcul de la Base Nette des Titres du Gisement

On constate donc qu'avec une base nette d'environ 6 centimes, le titre 2 est la CTD anticipée en T_0.

7.3 Analyse de la Base

Au terme des deux sections précédentes, on constate que la relation entre le Futures et le Cash peut donner lieu à deux types de prise de position résumées dans le tableau 7.10 ci-dessous.

	Cash & Carry	Reverse Cash & Carry
Décision	$BN_{i,0} < 0$	$BN_{i,0} > 0$
Montage	– Achat Titre i (Cash) – Vente Titre i (Repo) – Vente de $\mathrm{f_i}$ contrats Futures	– Vente Titre i (Cash) – Achat Titre i (Repo) – Achat de $\mathrm{f_i}$ contrats Futures
P/L	$BN_{i,1} - BN_{i,0} \geq 0 BN_{i,0} > 0$	$BN_{i,0} - BN_{i,1}$
Risque	Aucun	Le Titre i n'est plus CTD en $\mathrm{T_1}$

TAB. 7.10 – Tableau Synthétique des Stratégies « Futures vs Cash »

On suppose le titre n°i du gisement est CTD en $\mathrm{T_0}$.

Dans les deux cas, la base nette est l'élément principal puisqu'elle sert à la fois dans la prise de décision et dans le calcul du P/L. C'est la raison pour laquelle l'activité d'arbitrage « Futures LT vs Cash » est aussi couramment appelée « trading de base »[11]

Dans cette dernière section, nous allons montrer que la base nette n'est autre que le coût de l'option de livraison ou plus précisément des options de changement de CTD dont le vendeur de contrats Futures est implicitement long du fait de l'existence d'un titre « moins cher à livrer » à l'échéance du contrat et de l'asymétrie intrinsèque entre acheteurs et vendeurs dans le choix des titres à livrer.

7.3.1 Analyse des Options de Changement de CTD

Le prix théorique du contrat Futures en $\mathrm{T_0}$ est le prix obtenu en supposant que la CTD anticipée est le seul titre livrable :

$$F_0^* = \frac{1}{f_{CTD}} \times \{S_{CTD,0} + [r_{0,1} \times f_{0,1} \times (S_{CTD,0} + CC_{CTD,0}) - \triangle CC_{CTD}]\}$$

Sous cette hypothèse, un contrat Futures est sensible à deux facteurs de risque :

- Le taux long terme $\mathrm{r_{LT}}$ (taux actuariel de la CTD)
- Le taux court terme $\mathrm{r_{CT}}$ (taux de repo de la CTD)

On peut donc écrire :

$$\triangle F_0^* \simeq \frac{\partial F_0^*}{\partial r_{LT}} \times \triangle r_{LT} + \frac{\partial F_0^*}{\partial r_{CT}} \times \triangle r_{CT}$$

avec

$$\frac{\partial F_0^*}{\partial r_{LT}} = \frac{1}{f_{CTD}} \times [1 + r_{0,1} \times f_{0,1}] \times \frac{\partial S_{CTD,0}}{\partial r_{LT}}$$

11. Cette section est en grande partie basée sur des connaissances acquises et des recherches effectuées par l'auteur dans le cadre de ses fonctions de trader-arbitragiste compte propre au sein du desk de Trading Obligataire de la salle des marchés du CA Indosuez (1998)

et

$$\frac{\partial F_0^*}{\partial r_{CT}} = \frac{1}{f_{CTD}} \times [1 + r_{0,1} \times f_{0,1}] \times \frac{\partial S_{CTD,0}}{\partial r_{CT}}$$

On note qu'au facteur $[1 + r_{0,1} \times f_{0,1}]$ près, l'arbitrage de type « cash & carry » est couvert contre le risque de taux (variation du taux $\mathrm{r_{LT}}$).

Que se passe-t'il lors d'un changement de CTD?

On fait abstraction de la partie court terme en supposant que le risque (repo) est le même quel que soit le titre du gisement. Calculons la sensibilité du contrat Futures LT dans les deux cas suivants :

1. Le titre 1 est CTD
2. Le titre 2 est CTD

La sensibilité d'1 contrat Futures s'écrit :

$$\left.\frac{\partial F_0^*}{\partial r_{LT}}\right|_i = \frac{1}{f_i} \times [1 + r_{0,1} \times f_{0,1}] \times \frac{\partial S_{i,0}}{\partial r_{LT}} \qquad (i = 1{,}2)$$

Supposons que l'on ait monté la position de base (cash & carry) initiale avec le titre n°1 comme CTD anticipée[12].

Supposons maintenant que le titre n°2 devient CTD, le nombre de contrats Futures nécessaires pour couvrir la position longue sur le titre n°1 change et la position devient mécaniquement long ou short de :

$$\frac{\frac{\partial S_{1,0}}{\partial r_{LT}}}{\frac{1}{f_2} \times [1 + r_{0,1} \times f_{0,1}] \times \frac{\partial S_{2,0}}{\partial r_{LT}}} - f_1$$

contrats Futures.

Quand y-a-t'il changement de CTD?

Lorsque la courbe des taux se déforme uniformément :

- A la baisse des taux, les titres les moins « sensibles » (en règle générale, ceux de plus petite duration ou maturité) deviennent CTD
- A la hausse des taux, les titres les plus « sensibles » (en règle générale, ceux de plus grande duration ou maturité) deviennent CTD

Toutes choses égales par ailleurs, il est possible de déterminer les niveaux de taux (ou de prix du contrat Futures) pour lesquels les changements de CTD se produisent. Ces niveaux constituent les strikes des options de changement de CTD :

- A la hausse des taux (hausse du prix du Futures), on devient long : on est donc implicitement long de Call(s)
- A la baisse des taux (hausse du prix du Futures), on devient short : on est donc implicitement long de Put(s)

12. On note que la composante $r_{0,1} \times f_{0,1} \times \partial S_{i,0}/\partial r_{LT}$ de cette sensibilité est négligeable devant 1

Au final, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{array}{c} Long\ d'1\ contrat\ Futures\ LT \\ \Leftrightarrow \\ Long\ de\ ^1/_{f_{CTD}}\ Cheapest-to-Deliver\ \ (Cash) \\ + \\ Short\ de\ ^1/_{f_{CTD}}\ Cheapest-to-Deliver\ \ (Repo) \\ + \\ Short\ des\ Options\ de\ Changement\ de\ CTD \end{array}$$

Au terme de cette analyse, il nous reste à préciser les caractéristiques des options de changement de CTD (type d'option, nombre de contrats Futures, niveau de strike et échéance) de façon à en quantifier la valeur (pricing).

7.3.2 Pricing des Options de Changement de CTD

Nous nous plaçons ici à une date quelconque $T_0 < T_1$. On note $BN_{i,0}$ et $BN_{j,0}$ les bases nettes respectives de l'obligation n°i et de l'obligation n°j. On suppose de plus que l'obligation n°j est la CTD anticipée en T_0.

On note $\triangle BN_{i-j,0}$ la différence de base nette en T_0 entre l'obligation n°i et la CTD anticipée :

$$\triangle BN_{i-j,0} = BN_{i,0} - BN_{j,0} > 0$$

On se propose de calculer la variation du taux actuariel $\triangle R_{i,0}$ pour laquelle l'obligation n°i et la CTD anticipée deviennent « equi-cheapest », c'est-à-dire :

$$\triangle BN_{i-j,0} = 0$$

En dérivant la base nette $BN_{i,0}$ du titre n°i par rapport à son taux actuariel $R_{i,0}$, on trouve :

$$\frac{dBN_{i,0}}{dR_{i,0}} = [1 + r_{0,1} \times f_{0,1}] \times \frac{dS_{i,0}}{dR_{i,0}} - f_i \times \frac{dF_0}{dR_{i,0}}$$

Il nous faut calculer la sensibilité du prix du contrat Futures F_0 au taux $R_{i,0}$. On fait l'hypothèse que le prix du contrat Futures est parfaitement « corrélé » au prix de la CTD anticipée. Ce qui revient à dire que les variations de la base nette de la CTD peuvent être négligées (en première approximation) tant qu'il n'y a pas de changement de CTD. On en déduit donc la sensibilité du prix du contrat Futures par rapport au taux $R_{i,0}$:

$$\frac{dF_0}{dR_{i,0}} = \frac{1}{f_j} \times [1 + r_{0,1} \times f_{0,1}] \times \frac{dS_{j,0}}{dR_{i,0}}$$

En remplaçant cette expression de la dérivée du prix du Futures par rapport au taux actuariel $R_{i,0}$ et en tenant compte des deux approximations classiques suivantes[13] :

$$dS_{i,0} = -S_{i,0}^{brut} \times D_{i,0}^{mod} \times dR_{i,0} \qquad et \qquad dS_{i,0} = -S_{j,0}^{brut} \times D_{j,0}^{mod} \times dR_{j,0}$$

13. S, S^{brut} et D^{mod} sont respectivement le prix pied de coupon, le prix brut (coupon couru inclus) et la duration modifiée

Par ailleurs, on suppose que la variation des taux actuariels est uniforme sur la zone des 10A. On peut donc écrire :

$$dR_{i,0} \equiv dR_{j,0}$$

On trouve finalement une approximation la variation du taux actuariel $\triangle R_{i,0}$ (variation uniforme des taux actuariels sur la zone des 10A) qui rend le titre n°i « equi-cheapest » avec la CTD anticipée :

$$\boxed{\triangle R_{i,0} = \frac{-\triangle BN_{i,0}}{[1 + r_{0,1} \times f_{0,1}] \times \left[S_{i,0}^{brut} \times D_{i,0}^{mod} - \frac{f_i}{f_j} \times S_{j,0}^{brut} \times D_{j,0}^{mod}\right]}}$$

Toujours sous l'hypothèse de variation des taux 10A uniformes (parallel shift) on peut montrer que le détenteur d'une position de « cash & carry » est implicitement détenteur d'une option sur contrats Futures LT dont les caractéristiques sont :

- Nombre de contrats Futures : δ_i
- Echéance : T_1
- Strike : F_i^*

Cette option est un :

- Put : Lorsque le titre n°i devient CTD à la hausse des taux (si le titre i à une duration supérieure à la duration du titre j)
- Call : Lorsque le titre n°i devient CTD à la baisse des taux (si le titre i à une duration inférieure à la duration du titre j)

En effet, si il y a changement de CTD la position de base initiale est modifiée dans la mesure où le Futures suit maintenant le titre n°i qui est la nouvelle CTD. En terme de sensibilité, on a donc :

$$\begin{aligned} EUR\,1\,de\,titres\,n°j \quad &\Longleftrightarrow \quad EUR\,\frac{S_{j,0}^{brut} \times D_{j,0}^{mod}}{S_{i,0}^{brut} \times D_{i,0}^{mod}}\,de\,titres\,n°i \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{f_i}{[1 + r_{0,1} \times f_{0,1}]} \times \frac{S_{j,0}^{brut} \times D_{j,0}^{mod}}{S_{i,0}^{brut} \times D_{i,0}^{mod}}\,contrats\,Futures \end{aligned}$$

La position de base initiale a maintenant une composante directionnelle qui équivaut à :

$$\boxed{\delta_i = \frac{f_i}{[1 + r_{0,1} \times f_{0,1}]} \times \frac{S_{j,0}^{brut} \times D_{j,0}^{mod}}{S_{i,0}^{brut} \times D_{i,0}^{mod}} - f_j\,contrats\,Futures}$$

En comparant les formules de $\triangle R_{i,0}$ et de δ_i on constate qu'ils sont de signes opposés :

- $\triangle R_{i,0} > 0$
  - Le titre n°i devient CTD à la hausse des taux
  - Le titre n°i a donc une sensibilité supérieure au titre n°j
  - On devient donc short de δ_i contrats Futures
  - On est donc implicitement long d'un Put sur contrats Futures
- $\triangle R_{i,0} < 0$
  - Le titre n°i devient CTD à la baisse des taux

- Le titre n°i a donc une sensibilité inférieure au titre n°j
- On devient donc long de δ_i contrats Futures
- On est donc implicitement long d'un Call sur contrats Futures

Il ne reste plus qu'à calculer le strike de l'option de changement de CTD. Si F_0 est le prix du Futures en T_0, le strike de l'option est simplement égal au prix du Futures plus la variation du prix du Futures (liée à la variation du taux d'intérêt LT précédemment calculé) approximée par la sensibilité du Futures, soit :

$$F_i^* = F_0 + \triangle F_{i,0} \qquad avec \qquad \triangle F_{i,0} = \frac{1}{f_j} \times [1 + r_{0,1} \times f_{0,1}] \times S_{j,0}^{brut} \times D_{j,0}^{mod} \times \triangle R_{i,0}$$

Cette modélisation de l'option (générique) de changement de CTD du titre n°j au titre n°i est illustrée par le graphique 7.4 qui décrit le payoff de l'option en fonction du prix du Futures.

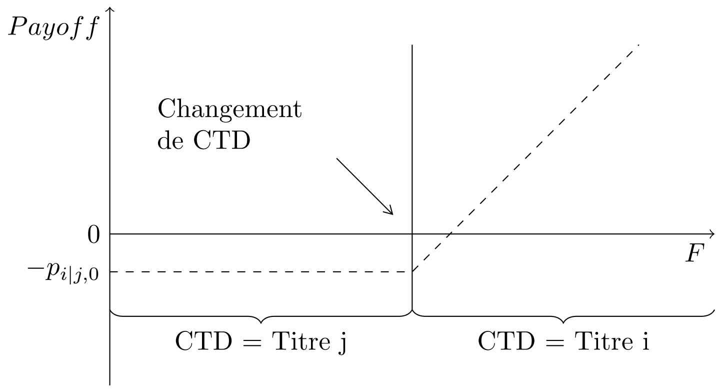

FIG. 7.4 – *Payoff de l'Option de Changement de CTD*

Au final, si le gisement du contrat Futures contient N titres livrables, le détenteur d'une position de base (« cash & carry ») sur le titre n°j (CTD anticipée en T_0) est simultanément long de N-1 options implicites de changement de CTD. Si $p_{i|j,0}$ est la prime de l'option de changement de CTD du titre n°j vers le titre n°i alors la base nette du titre n°j peut être approximée (dans le cadre de notre modèle de pricing) par la somme des primes des options :

$$\boxed{BN_{j,0}^{th} = \sum_{i \neq j} p_{i|j,0}}$$

Le modèle de pricing de base que nous venons de présenter permet une analyse simple et didactique des facteurs fondamentaux qui déterminent les changements de CTD sur les contrats Futures sur obligations d'Etat. Certaines hypothèses ou simplifications faites dans ce modèle peuvent néanmoins êtres levées :

- L'hypothèse d'une relation linéaire entre le prix du Futures et le taux d'intérêt LT peut être trivialement levée en utilisant une approximation à l'ordre 2 (delta/gamma) au lieu de l'approximation à l'ordre 1 (delta) utilisée dans notre modèle
- L'hypothèse que les variations de la base nette de la CTD peuvent être négligées tant qu'il n'y a pas de changement de CTD est plus complexe à lever mais néanmoins tout à fait envisageable. Fondamentalement cela revient à réintroduire dans la sensibilité du contrat Futures la contribution due à la base qui est ignorée ici. Cette approche consiste à appliquer la méthode du bootstrap au pricing simultané des N bases du

contrat Futures[14]. La conséquence principale de ce changement est l'obtention d'une relation prix-taux du contrat Futures continue, globalement convexe et localement concave aux points de changement de CTD
- L'hypothèse de variations uniformes (shift) des taux 10A est plus délicate à lever sans recourir à un modèle de taux[15] ou à des modèles spécifiques de pricing d'options d'échange d'un actif contre un autre[16]. Ce type d'approches permet de gagner en précision mais n'autorise plus une décomposition « synthétique » de la base en instruments négociables sur le marché (options sur contrats Futures LT)

Reprenons l'<u>exemple du paragraphe 7.2.4</u> et calculons la valeur théorique de la base nette du titre 2 dans le cadre du modèle précédent.

Nous avons deux options de changement de CTD correspondants aux titres 1 et 3. Le tableau 7.11 ci-dessous donne les principaux éléments de calcul pour ces deux titres.

i	Titre 1	Titre 3
Type Option	Call	Put
$\triangle BN_{i,0}$	38 ctm	40.4 ctm
$\triangle R_{i,0}$	-93.3bp	+83.8bp
δ_i	0.04257	-0.07259
$\triangle F_i$	8.062	-7.144
F_i^*	115.112	99.806
$d_{1,i}$	-1.08462	-1.14962
$d_{2,i}$	1.11050	1.04550
$p_{i\|2,0}$	2.02 ctm	3.48 ctm

TAB. 7.11 – Exemple - Elements de Calcul pour le Pricing de la Base

On obtient donc une valeur théorique de la base nette du titre n° 2 égale à 5.5 ctm.

Les éléments communs au pricing des deux options sont liés au Futures :

- Volatilité (Annuelle) : 13%
- Sensibilité : -8.6420
- Prix : 107.05
- Maturité : 3M

Le calcul des primes des options est réalisé à l'aide du modèle de Black[17].

7.3.3 Couverture par des Contrats Futures LT

On considère ici le problème de la couverture d'une position obligataire quelconque (maturité et émetteur) par des contrats Futures LT. Le principe général consiste simplement à prendre

14. Cf. Leroy F. (1998), « Contrats sur Futures LT : Pricing Multi-Base par la Méthode du Boostrap », Proprietary Bond Trading Desk (Crédit Agricole Indosuez)
15. Cf. Koenisgberg M. (1990), « The Salomon Brother Delivery Option Model : Understanding Treasury Bond Futures II », Salomon Brothers (Bond Portfolio analysis Group)
16. Cf. Margrabe W. (1978), « The Value of an Option to Exchange one Asset for Another », Journal of Finance (March)
17. Cf. Black F. (1976), « The Pricing of Commodity Contracts », Journal of Financial Economics (March)

une position sur contrats Futures LT de sens opposé à la position obligataire détenue au comptant de façon à « réduire le risque de taux » de la position couverte. La mise en oeuvre de ce principe général nécessite de se donner un critère explicite de couverture sous la forme d'un objectif à atteindre.

On note :

- h : L'horizon de couverture ($0 < h \leq 1$)
- S_t : Le prix pied de coupon du titre obligataire (à couvrir) en t
- F_t : Le prix du contrat Futures en t

Par extension du concept de base brute[18], on appelle « base brute étendue » l'expression :

$$BB' = S - \theta \times F$$

Le problème à résoudre consiste à **déterminer le ratio de couverture θ qui annule la variation de la base brute « étendue »** de la position couverte sur la période de couverture :

$$\triangle BB' = 0 \qquad (\textit{critère de couverture})$$

La variation du cours de la position couverte est alors égale à la différence des bases brutes « étendues » :

$$\triangle BB' = \triangle S - \theta \times \triangle F = BB_h^{'} - BB_0^{'}$$

On détermine d'abord le ratio optimal de couverture θ^* pour une valeur nominale de EUR 100 de la position à couvrir et du contrat Futures.

On commence par le cas particulier où la position obligataire à couvrir est constituée de la CTD anticipée du contrat Futures LT.

En appliquant notre critère de couverture à ce cas particulier, on trouve :

$$\triangle BB' = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \triangle S_{CTD} = f_{CTD} \times \triangle F$$

On fait l'hypothèse que les variations du prix pied de coupon de la CTD sont parfaitement corrélées aux variations du cours du contrat Futures LT :

$$\triangle S_{CTD} \equiv \triangle F \qquad (\textit{hypothèse de couverture})$$

On en déduit le ratio de couverture à appliquer dans ce cas :

$$\boxed{\theta^* = f_{CTD}}$$

On retrouve ici le même ratio de couverture que dans l'arbitrage « cash & carry » donné au paragraphe 7.2.2.

Dans le cas général où la position à couvrir est différente de l'obligation CTD, le ratio de couverture doit tenir compte des sensibilités respectives de l'obligation à couvrir et de la CTD anticipée du contrat Futures.

18. Ce paragraphe est en partie basé sur Roure F. (1988), Stratégies Financières sur le MATIF et le MONEP, Economica

On peut écrire :

$$\triangle S = -D^{mod} \times S^{brut} \times \triangle R \qquad et \qquad \triangle S_{CTD} = -D^{mod}_{CTD} \times S^{brut}_{CTD} \times \triangle R_{CTD}$$

Avec les notations suivantes :

- D^{mod} et D^{mod}_{CTD} sont les durations modifiées respectives du titre à couvrir et de la CTD anticipée
- R et R_{CTD} sont les taux actuariels respectifs du titre à couvrir et de la CTD anticipée
- S et S_{CTD} sont les prix pied de coupon respectifs du titre à couvrir et de la CTD anticipée
- S^{brut} et S^{brut}_{CTD} sont les prix bruts (coupons courus inclus) respectifs du titre à couvrir et de la CTD anticipée

La variation du cours du contrat Futures LT peut s'écrire en fonction de la variation du taux actuariel de la CTD anticipée :

$$\triangle F = \frac{1}{f_{CTD}} \times \triangle S^{brut}_{CTD} = -\frac{1}{f_{CTD}} \times D^{mod}_{CTD} \times S^{brut}_{CTD} \times \triangle R_{CTD}$$

La variation de la base brute « étendue » s'écrit alors dans le cas général :

$$\triangle BB' = -D^{mod} \times S^{brut} \times \triangle R + \theta \times \frac{1}{f_{CTD}} \times D^{mod}_{CTD} \times S^{brut}_{CTD} \times \triangle R_{CTD}$$

On fait l'hypothèse que les variations du taux actuariel de la CTD sont parfaitement corrélées aux variations du taux actuariel du titre à couvrir :

$$\triangle R \equiv \triangle R_{CTD} \qquad (\textit{hypothèse de couverture})$$

On obtient alors le ratio optimal de couverture cherché dans le cas général :

$$\boxed{\theta^* = f_{CTD} \times \frac{D^{mod}}{D^{mod}_{CTD}} \times \frac{S^{brut}}{S^{brut}_{CTD}}}$$

Le calcul du nombre optimal de contrats Futures K* qui tient compte du montant nominal N de la position à couvrir et du montant nominal d'un contrat Futures (Euro-Bund) est immédiat :

$$K^* = \theta^* \times \frac{EUR\,N}{EUR\,100000}$$

Notons pour terminer qu'il ne s'agit ni d'une couverture totale, ni même d'une couverture parfaite. Lors de la couverture par des contrats Futures, on échange un risque de taux contre les risques « résiduel » suivants :

- Risque de base (lié aux fluctuations de la base à CTD inchangée)
- Risque de changement de CTD sur la période de couverture
- Risque de corrélation entre le titre à couvrir et la CTD

La couverture n'aura donc de sens que si les risques « résiduels » sont négligeables par rapport au risque de taux que l'on cherche à couvrir.