

## Chapitre 8

# MBS Arbitrage

On commence par présenter les emprunts hypothécaires en insistant sur les deux caractéristiques principales de ces structures, l'amortissement par annuités constantes et l'option de remboursement anticipé. Les MBS Pass-Through sont la forme la plus simple de titrisation, technique qui consiste à regrouper des créances de même types (actif) de façon à émettre des titres (passif) donnant à leurs porteurs les droits sur les cashflows à l'actif. La projection des cashflows d'un MBS Pass-Through est réalisée en assimilant l'actif du MBS comme une unique créance hypothécaire. Une première approche du pricing des MBS consiste à faire l'hypothèse que l'échéancier de cashflows est certain et à calculer un spread statique par rapport à un Treasury Bond de même duration. Ce spread ne tient pas compte du risque principal supporté par les porteurs de MBS Pass-Through garanties par les agences hypothécaires US : le risque de prépaiement. Quantifiable dans les échéanciers (tableaux d'amortissements) sous différents formats (SMM, CPR, PSA), la modélisation du prépaiement est essentielle pour l'analyse des risques d'un MBS Pass-Through et son pricing. Le spread ajusté du risque de prépaiement (OAS) d'un MBS Pass-Through dans la courbe des taux UST est calculable par simulation (Monte Carlo) ainsi que les mesures de risques associées (duration modifiée, convexité et hedge ratio). Ce spread est à la base du relative value trading au sein de l'univers des MBS Pass-Through.

### 8.1 MBS Pass-Through

Les prêts hypothécaires à taux fixe<sup>1</sup> diffèrent sur bien des aspects des structures obligataires étudiées jusqu'à présent (paragraphe 8.1.1). Les Mortgages Backed Sécurités (MBS) sont des structures gagées sur des pools de prêts hypothécaires à taux fixe (sous-jacent) qui constituent la forme la plus simple et la plus connue de titrisation (paragraphe 8.1.2). L'analyse d'un MBS donné peut être réalisée sous certaines hypothèses en considérant ce MBS comme une unique créance hypothécaire (approche « top-down »), l'approche « bottom-up » consistant à recalculer les cashflows du MBS à partir des cashflows des sous-jacents n'étant pas envisageable en pratique (paragraphe 8.1.3). Parmi les risques supportés par un investisseur en parts de MBS, le risque de prépaiement est le plus important et explique la majeure partie du spread entre le taux actuariel « apparent » du MBS et le taux d'un Treasury Bond de même maturité (paragraphe 8.1.4).

1. Dans l'esprit du cours, il s'agit d'un rappel et nous renvoyons donc les lecteurs à leurs ouvrages de mathématiques financières préférés pour plus d'information, par exemple : P. Poncet, R. Portrait & S. Hayat (1996) « Mathématiques Financières », Dalloz (Ed.).

### 8.1.1 Les Crédits Hypothécaires US

Un prêt hypothécaire<sup>2</sup> est un prêt à long terme accordé à un ménage par un organisme financier pour financer l'achat d'un bien immobilier. Les prêts hypothécaires ont trois spécificités qui les distinguent des structures obligataires étudiées jusqu'à maintenant :

- L'amortissement progressif du principal : Contrairement aux structures obligataires classiques pour lesquelles le principal est remboursé en totalité à l'échéance (in fine), les prêts hypothécaires et les prêts aux particuliers (ménages) d'une manière générale sont amortis au fur et à mesure de la vie du prêt de façon à adapter les montants payés aux revenus des ménages. Les structures les plus courantes de prêts hypothécaires sont les prêts à annuités constantes pour lesquels les remboursements (amortissement du principal + intérêts) sont constants et mensuels
- La garantie (on parle plus spécifiquement d'hypothèque) : Dans un prêt hypothécaire, l'emprunteur (ou débiteur) devient le propriétaire légal du bien immobilier mais le prêteur (ou créancier) détient une hypothèque sur le bien immobilier qui n'est autre qu'un droit de transfert de propriété sur ce bien au cas où l'emprunteur serait dans l'incapacité à faire face à ces échéances de remboursement. Si le défaut de paiement est avéré, le créancier peut faire valoir son droit et demander la saisie du bien hypothéqué devant une juridiction compétente. Le bien saisi est le plus souvent revendu par le créancier qui peut ainsi recouvrer tout ou partie du principal
- L'option de prépaiement : Les prêts hypothécaires à taux fixe sont assortis d'une option de prépaiement détenue par le débiteur qu'il peut généralement exercer sans frais au terme d'une période de temps donnée (généralement trois ans). Cette option permet au débiteur de rembourser en totalité le prêt précédemment négocié par le biais d'un nouveau prêt négocié à un taux plus bas si les taux d'intérêts ont baissé entre temps. Cette option de prépaiement a des conséquences importantes en terme de risque et donc de pricing des MBS

Les prêts hypothécaires peuvent être à taux fixe ou à taux variable. Dans ce chapitre, nous traiterons uniquement du cas des prêts hypothécaires à taux fixe et donc des MBS à taux fixe qui sont les taux les plus couramment négociés aux Etats-Unis. La durée des prêts hypothécaires est négociable mais la durée de 30 ans est la plus souvent utilisée car c'est avec les durées les plus longues que l'on peut emprunter le plus (principal) pour une annuité donnée.

Considérons un prêt hypothécaire à taux fixe dont les caractéristiques sont :

- Montant Nominal (Principal) :  $N$
- Taux Fixe du prêt :  $C$
- Maturité :  $K$  Ans ( $12 * K$  Mois)

Dans le cadre d'un emprunt hypothécaire à annuité constante, le débiteur rembourse le mois  $k$  une somme fixe  $S$  composée d'une part du capital  $A_k$  (amortissement) et des intérêts  $I_k$  calculés sur la base du capital restant en début de période.

On a donc :

$$S_k = A_k + I_k \equiv Cte \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{360} A_k = N$$

L'annuité constante  $S$  est donnée par la formule<sup>3</sup> :

2. mortgage loan, en anglais

3. Il s'agit d'un résultat classique de mathématique financière que le lecteur pourra retrouver facilement dans la littérature ou démontrer par lui-même (exercice)

$$S = \frac{N \times C/1200}{1 - (1 + C/1200)^{-360}}$$

Connaissant  $S$ , il est possible de calculer le tableau d'amortissement (cf. Tableau 8.1 ci-dessous) qui donne pour chaque période  $k$  ( $k=1 \dots 360$ ), les quantités suivantes :

- Montant des intérêts:  $I_k$
- Amortissement:  $A_k$
- Capital restant à rembourser:  $N_k$

Il s'agit d'un tableau d'amortissement normal ou initial c'est-à-dire sans prépaiement.

Période $k$	$I_k$	$A_k$	$N_k$
0			$N_0$
1	$I_1 = N_0 \times C/1200$	$A_1 = S - I_1$	$N_1 = N_0 - A_1$
...	...	...	...
$k-1$	...	...	$N_{k-1}$
$k$	$I_k = N_{k-1} \times C/1200$	$A_k = S - I_k$	$N_k = N_{k-1} - A_k$
...	...	...	...
$K$	...	...	0

TAB. 8.1 – Tableau d'Amortissement d'un Prêt Hypothécaire

Notons que si le créancier décide d'exercer l'option de prépaiement à la période  $k$ , il lui suffit de rembourser tout ou partie du capital restant  $N_k$  en plus du montant  $S$  pour le mois écoulé. Qu'il soit partiel ou total, le remboursement anticipé a toujours pour conséquence de raccourcir la durée du prêt (ce qui n'est pas sans conséquence pour le pricing d'un MBS comme nous le verrons par la suite).

Donnons un exemple numérique pour fixer les idées.

Considérons un prêt hypothécaire à taux fixe dont les caractéristiques sont :

- Montant Nominal (principal): \$ 100000
- Taux Fixe du prêt (brut): 6%
- Maturité: 30A (360M)
- Périodicité des cashflows: Mensuelle

Calcul de l'annuité constante  $S$  :

$$S = \frac{\$ 100000 \times 6/1200}{1 - (1 + 6/1200)^{-360}} = \$ 599.55$$

Le débiteur doit donc rembourser un montant de \$ 599.55 tout les mois pendant 30A. La somme totale des remboursements (360 fois 599.55) est égale à \$ 215838 soit plus de deux fois le montant emprunté. Cette somme ne tient pas compte de l'actualisation, la valeur actuelle des 360 cashflows de \$ 599.55 actualisés au taux de 6% est elle précisément égale à \$ 100000 par construction.

Période k	$I_k$	$A_k$	$N_k$
0			100000
1	500	99.55	99900.45
2	499.50	100.05	99800.40
...	...	...	...
119	420.23	179.32	83865.95
120	419,33	180.22	83685.72
...	...	...	...
359	5.95	593.60	596.57
360	2.98	596.57	0

TAB. 8.2 – Tableau d'Amortissement sans Prépaiement (Exemple)

Le tableau d'amortissement initial (sans amortissement) du prêt est donné dans le tableau 8.2 ci-dessus (les montants sont en USD).

Si l'annuité est constante par construction, la répartition entre intérêts et amortissements évolue au fil du temps du fait que les intérêts sont calculés sur la base du capital restant en début de période<sup>4</sup> :

- La part des intérêts décroît avec le temps
- La part de l'amortissement croît avec le temps

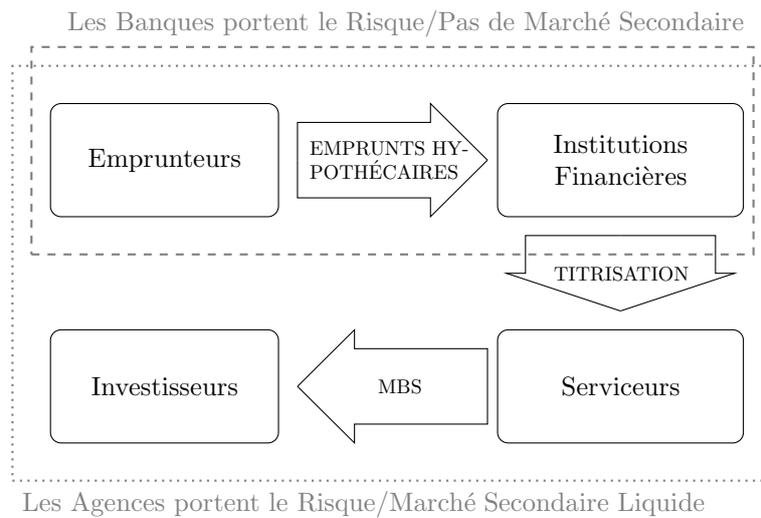
Nous terminons ici cette présentation des prêts hypothécaires pour nous intéresser aux MBS, titres obligataires négociables sur un marché secondaire dont le sous-jacent est un pool homogène de prêts hypothécaires que nous analyserons comme une unique créance hypothécaire.

### 8.1.2 Titrisation de Prêts Hypothécaires

La titrisation de prêts hypothécaires a commencé au début des années 70 aux Etats-Unis avec l'émission du premier MBS Pass-Through<sup>5</sup> garanti par l'agence GNMA. Jusqu'à cette date, les crédits accordés par les banques (« marché primaire ») restaient dans leur bilan pendant toute leur durée de vie. La titrisation va changer la donne pour les banques et les autres institutions financières impliquées dans le crédit hypothécaire en leur permettant de regrouper des crédits de mêmes caractéristiques sous la forme de titres « marketés » auprès des investisseurs « institutionnels » (mutual funds, pension funds, hedge funds et assureurs), négociables sur un marché secondaire et garantis par des agences hypothécaires publiques (cf. Graphique 8.1 ci-dessous).

4. La reproduction du tableau d'amortissement dans sa totalité ne nous a pas semblé d'une grande utilité et nous faisons confiance au lecteur pour créer ce tableau sous le tableur de son choix à l'aide des formules données ci-dessus

5. Pour une introduction générale et complémentaire aux MBS Pass-Through, on pourra consulter Lowell L. (2001), Mortgage Pass-Through Securities, in Fabozzi F.J. Editor. « The Handbooks of Mortgage-Backed Securities » McGrawHill et Tuckman B. (1995), « Fixed Income Securities », John Wiley & Sons (Ed.)

FIG. 8.1 – *Titrisation de Créances Hypothécaires*

Dans un MBS Pass-Through, les intérêts et amortissements issus des emprunts hypothécaires sous-jacents sont collectés par les banques originatrices et passés à un organisme « ad hoc » appelé serviteur qui prend en charge leur distribution auprès des investisseurs en proportion des parts de MBS détenues. Un investisseur détenant  $x\%$  du montant nominal d'un MBS va donc recevoir, chaque mois,  $x\%$  du total des cashflows issus des prêts hypothécaires sous-jacents au MBS (pour ce mois). Les MBS les plus courants sont ceux garantis par l'une des trois agences hypothécaires américaines (GNMA, FNMA et FHLMC). Ces agences garantissent le paiement des intérêts et le remboursement du principal dans des délais spécifiés au cas où une (ou plusieurs) créance hypothécaire sous-jacente est en « souffrance ».

C'est cette garantie qui a servi de catalyseur au développement du marché des MBS et permis d'en faire le second marché de dettes émises en dollar US derrière la dette émise par le Trésor américain (US Treasuries). L'avantage essentiel (mais apparent) du point de vue des investisseurs provient du fait qu'à risques de crédit et de liquidité équivalents (à  $\epsilon$ -près), un MBS pass-through offre un rendement significativement supérieur à un Treasury Bond de même « duration » :

$$R_{MBS} = R_{UST} + Spread \quad \text{avec} \quad Spread > 0$$

Cet avantage n'est cependant qu'apparent car cette rémunération supplémentaire est en grande partie justifiée par le risque de prépaiement supporté par les investisseurs.

Le rôle des agences hypothécaires est fondamental dans le développement du marché des MBS et témoigne de la volonté des autorités américaines de favoriser l'accès à la propriété aux Etats-Unis<sup>6</sup>. Ces agences sont au nombre de trois :

– **Government National Mortgage Association (GNMA)** ou « Ginnie Mae » est

6. Notons que dans le crédit traditionnel, les banques accordent les prêts (droit) et supportent les risques (devoir). Cette obligation de devoir assumer les risques liés aux prêts accordés est en quelque sorte auto-régulatrice. Avec la titrisation de créances façon MBS pass-through, les banques ont pu accorder des prêts sans assumer les risques ce qui constitue une entrave dans le fonctionnement auto-régulateur du marché du crédit. Car même si les agences hypothécaires sont sensées s'assurer que les crédits titrisés répondent à certains standards, elles dépendent pour cette analyse des informations que les banques veulent bien leur communiquer. L'effondrement du marché immobilier suite à la crise des subprimes a montré les limites d'un système de financement « extra-bancaire » de l'immobilier résidentiel US qui faisait reposer l'essentiel du risque de crédit sur les deux plus grosses agences hypothécaires américaines « Freddie Mac » et « Fannie Mae ».

une agence du gouvernement américain qui offre une garantie explicite sur les intérêts et le principal. Le rôle de GNMA est de promouvoir le marché secondaire (titrisation) pour des prêts hypothécaires bonifiés accordés à des ménages modestes. GNMA a émis le premier MBS pass-through en 1970

- **Federal National Mortgage Association (FNMA)** ou « Fannie Mae » est une entreprise « sponsorisée » par le gouvernement américain (Government Sponsored Entities ou GSE) et offre une garantie implicite sur les intérêts et le principal. Le rôle de FNMA est de promouvoir le marché secondaire (titrisation) pour des prêts hypothécaires bonifiés à destination des classes moyennes. FNMA a émis son premier MBS en 1981
- **Federal Home Loan Mortgage Corporation (FHLMC)** ou « Freddie Mac » est aussi une entreprise « sponsorisée » par le gouvernement américain qui offre une garantie implicite sur les intérêts et le principal. FHLMC a été créé en 1970 pour promouvoir un marché secondaire pour les emprunts hypothécaires conventionnels (non bonifiés). FHLMC a émis son premier MBS en 1971

A partir des années 80, d'autres institutions (banques, caisses d'épargne, promoteurs immobilier, etc.) ont émis des MBS Pass-Through « privés ». Les crédits sous-jacents ne répondant pas aux critères des agences gouvernementales, ces émissions ne sont pas garanties par ces dernières.

Le marché des MBS Pass-Through à taux fixe représente la plus grande partie du marché des MBS. Les autres types de structures sont :

- Pass-Through ARMs et Callable Pass-Through
- Strips Interest-only (IOs) & Principal-only (POs)
- Collateralized Mortgages Obligations (CMOs)

L'étude de ces structures n'est pas abordée dans ce cours.

Précisons tout de même que les structures de type CMO sont à l'origine du développement controversé des prêts hypothécaires Alt-A et subprime qui ont défrayé la chronique lors de la crise financière des années 2007-2009. Les CMOs se différencient des MBS traditionnels (pass-through) par la structure du passif. Là où les MBS pass-through ont un seul type d'engagement au passif (les porteurs de parts de MBS ayant tous les mêmes droits sur l'actif), les CMOs distinguent trois types d'engagements au passif hiérarchisés quand à leurs droits sur l'actif (les cashflows du pool de créances hypothécaires), par ordre de priorité :

1. Senior : Servis en premier / Risque faible (en théorie)
2. Mezzanine : Servis en second / Risque moyen
3. Equity : Servis en dernier / Risque élevé

On note que le risque croît avec l'ordre de priorité quant aux droits sur les cashflows à l'actif.

### 8.1.3 Projection des Cashflows

Un MBS Pass-Through a pour « sous-jacent » (actif) un « pool » de prêts hypothécaires homogène en terme de :

- Taux (Taux Fixe vs Taux Variable)
- Type d'emprunteurs (Prime, Alt-A, Subprime)
- Procédures appliquées pour l'octroi des prêts (Credit Standard)
- Clauses contractuelles (« Due-on-sales » vs « Assumable »)

Et ayant des :

- Maturités résiduelles similaires

- Taux de coupon similaires

L'homogénéité des prêts hypothécaires sous-jacents au MBS permet de projeter les cashflows du MBS comme si ce dernier était une unique créance hypothécaire dont les principales caractéristiques sont égales aux moyennes pondérées par les encours des principales caractéristiques des emprunts hypothécaires qui le composent.

Ainsi, le tableau d'amortissement d'un MBS (hors prépaiement, pour le moment) est calculé sur la base du :

- WAC : Weighting Average Coupon (Taux de coupon moyen)
- WAM : Weighting Average Maturity (Maturité résiduelle moyenne)

Formellement, si le pool contient H emprunts hypothécaires dont les caractéristiques génériques sont à la date k :

- Taux de coupon  $C_h$
- Maturité résiduelle  $T_{h,k}$
- Principal restant  $N_{h,k}$

On a :

$$WAC_k = \frac{\sum_{h=1}^H N_{h,k} \times C_h}{\sum_{h=1}^H N_{h,k}} \quad \text{et} \quad WAM_k = \frac{\sum_{h=1}^H N_{h,k} \times T_h}{\sum_{h=1}^H N_{h,k}}$$

Il est important de comprendre que **les projections de cashflows ainsi réalisées ne sont que des estimations des cashflows réellement perçus** même en l'absence de prépaiement<sup>7</sup>. En effet, contrairement aux créances individuelles, le taux de coupon varie au cours de la vie du MBS du fait que :

- Les prépaiements diffèrent selon les créances
- Les coupons diffèrent selon les créances

Lorsque les créances individuelles sont homogènes, le taux de coupon moyen peut être considéré comme constant (en première approximation). Il vérifie de façon triviale :

$$C_{MIN} = \underset{h=1\dots H}{Min} \{C_h\} \leq C_{MBS} \leq \underset{h=1\dots H}{Max} \{C_h\} = C_{MAX}$$

L'homogénéité du pool de créances hypothécaires (sous-jacent du MBS) garantie que l'erreur entre le taux de coupon estimé constant  $C_{MBS}$  du MBS et le taux de coupon réel variable  $C_{MBS,t}^*$  est minimal :

$$|C_{MBS} - C_{MBS,t}^*| \leq C_{MAX} - C_{MIN} \leq \epsilon$$

Notons que parmi les différents types de MBS Pass-Through ceux émis par les agences hypothécaires sont réputés être plus homogènes que ceux émis par des institutions financières privées. De même, parmi les MBS Pass-Through émis par les agences, ceux émis par GNMA sont les plus homogènes. Dans la suite, on considèrera que **le WAC du MBS est constant de sorte que l'on pourra analyser un MBS comme une unique créance hypothécaire dont le taux de coupon n'est autre que taux de coupon (apparent) du MBS.**

7. La procédure alternative à l'approche décrite dans ce paragraphe consisterait à projeter les cashflows au niveau des prêts hypothécaires sous-jacents aux MBS puis à les agréger. Cette approche de type « bottom-up » n'est pas envisageable car les informations nécessaires à sa mise en oeuvre ne sont pas communiquées aux investisseurs par les serviceurs

Les MBS Pass-Through sont généralement émis avec un coupon plein (ex: 6%) ou un demi-coupon (ex: 6.5%). Ils sont négociables sur un marché de gré-à-gré (OTC market) via des brokers ou des market makers.

Pour un prix de marché donné  $P_{MBS}$ , le montant payé pour l'achat de \$ 100 de principal initial de ce MBS est égal à :

$$M_{MBS,t} = \$ 100 \times (1 - \alpha_{MBS,t}) \times P_{MBS,t}$$

$\alpha_{MBS,t}$  est le pourcentage du principal déjà remboursé.

Le prix d'un MBS comparé au pair est un critère de classification essentiel, on appelle :

- Current Coupon : Le MBS Pass-Through dont le prix de marché est le plus proche du pair (mais en-dessous du pair )
- Discount : Les MBS Pass-Through dont les prix sont inférieurs au pair
- Premium : Les MBS Pass-Through dont les prix sont supérieurs au pair

On a donc :

$$P_{Discount} < P_{Current Coupon} \leq 100 < P_{Premium}$$

Notons enfin qu'en pratique, les cashflows reçus par les investisseurs ne sont pas strictement égaux aux cashflows projetés selon la méthode précédemment décrite. La différence provient des frais prélevés par les serviceurs, exprimés en points de taux et calculés sur la base du principal restant en début de période et déduits des intérêts reçus des prêts hypothécaires sous-jacents. Le revenu restant (intérêts moins frais) est versé aux investisseurs sous la forme d'un coupon :

$$Coupon = WAC - Frais$$

Le montant des frais diminue donc progressivement au cours de la vie du MBS du simple fait de l'amortissement progressif du principal. Dans la suite du chapitre, on raisonnera « hors frais » afin de simplifier la présentation.

#### 8.1.4 Spread MBS vs UST : Analyse Statique

L'analyse statique d'un MBS consiste à raisonner à structure d'amortissement donnée ce qui revient à considérer la structure de cashflows du MBS comme fixe et à calculer un spread au dessus des taux des US Treasuries<sup>8</sup>.

Deux approches sont envisageables :

- Spread actuariel
- Spread zéro-coupon

Le calcul du **spread actuariel** consiste dans un premier temps à calculer le taux de rendement actuariel « statique »  $R_{MBS}$  du MBS par inversion de la relation « prix-taux » classique suivante :

$$V_{MBS} = \sum_{j=1}^J \frac{CF_{t_j}}{(1 + R_{MBS})^{t_j}}$$

8. Notons que les taux des MBS sont des taux à période mensuelle tandis que les taux des US treasuries sont des taux à période bi-annuelle (cf. Chapitre 2). Il est nécessaire d'en tenir compte dans la mise en oeuvre des formules données dans ce paragraphe. Dans la suite et sauf mention contraire, nous raisonnerons en taux mensuels côté MBS comme côté US Treasuries.

Avec :

- $CF_t$  : cashflow statique du MBS pour la date  $t$
- $V_{MBS}$  : Valeur du MBS au prix du marché

On calcule ensuite, le taux actuariel interpolé pour un UST de maturité égale à la Duration ou à la Weighting Average Life<sup>9</sup> du MBS.

Pour calculer le spread par rapport à l'obligation d'Etat (fictive) de même durée de vie moyenne il est nécessaire de calculer le taux de rendement  $R_{UST}$  de cette obligation (fictive) en interpolant linéairement les taux actuariels des deux UST adjacentes ou en reprisant un UST fictif « au pair » pour cette maturité dans la courbe des taux zéro-coupon UST.

Au final, le spread actuariel est simplement égal à la différence entre le taux actuariel du MBS et le taux actuariel de l'obligation UST fictive :

$$Spread_{ACT} = R_{MBS} - R_{UST}$$

Le calcul du **spread zéro-coupon** est plus direct puisque ce spread se définit comme la rémunération de l'investisseur au dessus de la courbe des taux zéro-coupon UST.

Il se calcule donc par inversion de la relation prix-spread suivante :

$$P_{MBS} = \sum_{j=1}^J \frac{CF_{t_j}}{(1 + Z_{UST,t_j} + Spread_{ZC})^{t_j}}$$

$Z_{UST,t}$  est le taux zéro-coupon Etat US (UST) pour la maturité  $t$ .

A titre d'exemple, considérons une position de montant nominal \$ 100000 sur un MBS qui possède les mêmes caractéristiques de taux de coupon et de maturité que le crédit hypothécaire de l'exemple du paragraphe 8.1.1 et dont le prix de marché est 95% (il cote « Discount »).

Compte tenu de ces hypothèses, le tableau d'amortissement de notre MBS en l'absence de prépaiement est donc identique au tableau d'amortissement du crédit hypothécaire (cf. tableau 8.2 du paragraphe 8.1.1).

On peut à partir des éléments que l'on vient de donner calculer le taux actuariel « statique » du MBS et la duration du MBS. On trouve :

$$R_{MBS} = 6.49\% \quad \text{et} \quad D_{MBS} = 10.47$$

On note que la duration du MBS (10.47 Ans) est beaucoup plus faible que sa maturité (30 Ans) ce qui s'explique par l'amortissement progressif du principal tout au long de la vie du MBS.

Donnons-nous maintenant des taux zéro-coupons UST pour les principales maturités<sup>10</sup> (cf. tableau 8.3).

9. La durée de vie moyenne (WAL) est la moyenne des dates de cashflows pondérées par l'amortissement du principal :

$$WAL = \frac{\sum_{k=1}^K A_k \times T_k}{\sum_{k=1}^K A_k} \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^K A_k = 100$$

10. Ces taux sont en période mensuelle

T	1A	2A	3A	4A	5A	7A	10A	15A	20A	30A
Tx ZC (%)	4	4.1	4.2	4.29	4.39	4.56	4.81	5.17	5.47	5.88

TAB. 8.3 – Taux Zéro-Coupon UST (Exemple)

On suppose de plus que le taux repo GC à un 1M est à 3.5%.

On est donc en mesure de calculer le spread zéro-coupon du MBS au dessus de la courbe des taux zéro-coupon UST (on utilise la méthode d'interpolation linéaire pour calculer les taux manquants), on trouve :

$$Spread_{ZC} = 126 bp$$

Ce spread zéro-coupon correspond à la rémunération demandée par le marché pour assumer les risques supplémentaires du MBS par rapport à un investissement similaire (même structure de cashflows) en US Treasuries.

Nous terminons ici l'exemple numérique.

Le spread qu'il soit actuariel ou zéro-coupon rémunère tous les risques asymétriques pris par l'investisseur en parts de MBS par rapport à un investissement « équivalent » en US Treasuries.

En toute généralité, les risques supportés par un investisseur sur une position de MBS sont :

- Le risque de marché
- Le risque de crédit (FNMA/FHLMC)
- Le risque de liquidité
- Le risque de prépaiement

Le tableau 8.4 ci-dessous donne les principales caractéristiques des risques précédents.

Risque	Description	Rémunéré	Spécifique
Marché	A structure d'amortissement donnée (et donc à structure de cashflows statique) les prix fluctuent en fonction des taux d'intérêts (effet d'actualisation commun à la quasi-totalité des instruments de taux)	Non, car symétrique	Non, propre à tous les produits de taux
Crédit	Ginnie Mae, Fannie Mae et Freddy Mac garantissent en totalité et sans délai le paiement du principal et des intérêts. Le risque de crédit est inexistant pour un MBS GNMA et faible en pratique pour les MBS garantis par les agences FNMA et FHLMC	Oui	Non, propre à toutes les titres de dette émis par des institutions autres que les Etats AAA
Liquidité	La taille des encours et la présence des MBS dans les grands indices obligataires US et mondiaux rend incontournables pour les investisseurs finaux. Le marché des MBS est presque aussi liquide que le marché des US Treasuries	Oui	Non, propre à tout les produits OTC
Prépaiement	Les emprunteurs ont une option de remboursement anticipé qu'ils peuvent exercer à tout moment principalement en cas de baisse des taux afin de refinancer le prêt à un taux plus bas	Oui	Oui, spécifique aux MBS

TAB. 8.4 – Analyse des Risques d'un MBS

Parmi ces risques, le **risque de prépaiement** est le seul risque spécifique aux MBS et explique en général la plus grande partie du spread MBS vs UST. Ce risque tient au fait que le prépaiement est réalisé à l'initiative des emprunteurs et intervient principalement en cas de baisse des taux. Le prépaiement est donc un événement négatif pour l'investisseur en parts de MBS puisqu'il doit replacer le principal prépayé à des taux plus bas.

Le risque de prépaiement est au cœur de l'analyse des MBS et de leur pricing, il est étudié dans la section qui suit.

## 8.2 Analyse du Risque de Prépaiement

On commence par présenter les trois principales mesures du prépaiement que sont les standards SMM, CPR et PSA ainsi que l'impact du prépaiement sur le calcul du tableau d'amortissement d'un MBS pour un scénario de prépaiement donné quelconque. Le prépaiement a pour principale conséquence de modifier la structure de cashflows du MBS ce qui n'est pas

sans impacter le calcul du taux de rendement actuariel « statique ». On termine par une présentation générale des facteurs à prendre en compte dans les modèles de prépaiement.

### 8.2.1 Prépaiement : Conventions et Calcul

Le prépaiement s'exprime sous la forme d'un montant d'amortissement supplémentaire par rapport à l'amortissement initial. Plusieurs standards (conventions) existent pour le mesurer, nous allons présenter les trois principaux :

- SMM
- CPR
- PSA

Ce montant d'amortissement supplémentaire peut naturellement et simplement être calculé sur la base du capital restant en fin période auquel on applique un taux de prépaiement mensuel appelé Single Monthly Mortality (SMM).

Le SMM peut donc être exprimé sous la forme suivante :

$$SMM = 100 \times \frac{\text{Capital Restant Initial} - \text{Capital Restant Observé}}{\text{Capital Restant Initial}}$$

avec :

- Capital Restant Initial : Capital restant en fin de période hors prépaiement
- Capital Restant Observé : Capital restant en fin de période prépaiement inclus

Ce taux de prépaiement mensuel est le plus souvent présenté sous sa forme annualisée appelée Conditional Prepayment Rate (CPR) :

$$CPR = 100 \times \left[ 1 - \left( 1 - \frac{SMM}{100} \right)^{12} \right]$$

Les premières études statistiques sur les prépaiements, réalisés par le HUD<sup>11</sup> sur la base d'historiques de prépaiements de prêts hypothécaires garantis par le FHA<sup>12</sup>, ont mis en avant l'âge du prêt hypothécaire comme facteur prépondérant dans le comportement de prépaiement.

Les données historiques montrent que les ménages ont tendance à très peu prépayer au début du prêt, le prépaiement augmentant lentement mois après mois pour se stabiliser après 30 mois en moyenne. Ce comportement s'explique d'ailleurs assez bien puisque :

- La probabilité de changer d'appartement ou de maison est logiquement très faible au début du prêt puis augmente avec l'âge du prêt
- Les ménages (et plus spécifiquement les « primo-accédents ») ont à faire face à des frais d'équipement importants dans les premiers mois qui suivent leurs emménagements ce qui obère d'autant leurs capacités de prépaiement

11. Le « U.S. Department of Housing and Urban Development » (HUD) est l'organe central du gouvernement américain en charge de la politique du logement et du développement urbain. Créé en 1937 (U.S. Housing Act), il supervise aujourd'hui toutes les agences gouvernementales impliquées dans le crédit hypothécaire

12. Le « Federal Home Agency » (FHA) est une agence gouvernementale US créée en 1934 par décision politique (National Housing Act) pour relancer le marché immobilier US plombé par la réticence des banques à accorder des crédits hypothécaires faute de garanties suffisantes dans une période où l'activité économique était au plus bas et le chômage au plus haut (Grande Dépression)

Le Public Securities Association (PSA) est un modèle de prépaiement qui reprend les invariants constatés dans ces études sous la forme d'un scénario « stylisé » :

$$CPR_{PSA} = 0.2\% \times \text{Min}(\text{age}_{MBS}, 30)$$

Concrètement, le scénario PSA de base (aussi appelé 100% PSA) se présente sous la forme de 360 taux de prépaiement (mensuels) exprimés en CPR (annuel) :

- Il commence à 0.2% CPR le premier mois
- Il s'accroît de 0.2% CPR chaque mois jusqu'au 30ème mois
- Il se stabilise à 6% CPR jusqu'à la maturité du prêt

Notons que des vitesses de prépaiement différentes du scénario 100% PSA peuvent être exprimées sous la forme de multiples de ce scénario de base. Ainsi, un taux de 150% PSA correspond au scénario de prépaiement suivant :

- Il commence à 0.3% CPR le premier mois
- Il s'accroît de 0.3% CPR chaque mois jusqu'au 30ème mois
- Il se stabilise à 9% CPR jusqu'à la maturité du prêt

A titre d'exemple, calculons les taux de prépaiement SMM, CPR et PSA pour un MBS dont les caractéristiques sont :

- Capital Restant Initial: \$154000
- Capital Restant Observé: \$153000
- Age MBS: 25M

On trouve par application directe des formules données ci-dessus :

- SMM: 0.65%
- CPR: 7.53%
- PSA: 150% (ou « 150% PSA »)

Le dernier calcul s'explique par le fait que le CPR correspondant au scénario 100% PSA pour un prêt hypothécaire âgé de 25 mois est  $0.2\% \times \text{Min}(25, 30) = 0.2\% \times 25 = 5\%$ . Par conséquent, un CPR de 7.53% pour un prêt hypothécaire âgé de 25 mois correspond à un scénario de 150% PSA.

Fin de l'exemple numérique.

Le PSA est un standard de calcul utile pour la communication entre intervenants sur le marché des MBS mais limité en tant que scénario crédible de refinancement car il ne tient pas compte du facteur aujourd'hui prépondérant dans les comportements de prépaiement, le refinancement lié à la baisse des taux d'intérêts.

Par généralisation du scénario PSA, on appellera scénario de prépaiement pour un MBS de maturité K, la donnée des K taux de prépaiement à appliquer à chaque période k allant de 1 à K :

$$\text{Scénario de prépaiement} = \{CPR_k\}_{k=1\dots K}$$

Dans la suite, nous utiliserons essentiellement le standard SMM/CPR pour présenter et calculer les prépaiements.

Il nous reste à intégrer le prépaiement dans le calcul du tableau d'amortissement.

Le principe consiste à se donner un scénario de prépaiement et à recalculer l'annuité constante à chaque période sur la base du principal restant à rembourser en début de période.

Notons que ce principe est parfaitement cohérent avec le calcul du tableau d'amortissement sans prépaiement donné au paragraphe 8.1.1 du simple fait que dans ce cas, l'annuité recalculée à chaque période ne change pas. En d'autres termes, lorsqu'il n'y a pas de prépaiement, on peut écrire<sup>13</sup> :

$$S_k \equiv S \quad (k = 1 \dots K) \quad \text{avec} \quad S_k = \frac{N_k \times C/1200}{1 - (1 + C/1200)^{-T+k}}$$

Ce résultat n'est par contre plus valable lorsqu'il y a prépaiement ce qui oblige à recalculer l'annuité  $S_k$  à chaque étape  $k$ .

Nous avons regroupé les différentes formules nécessaires au calcul du tableau d'amortissement avec prépaiement dans le tableau 8.5 ci-dessous.

Description	Quantité	Formule
Annuité « constante » en $k$	$S_k$	$\frac{N_{k-1}^* \times C/1200}{1 - (1 + C/1200)^{-K+k}}$
Intérêts en $k$	$I_k$	$N_{k-1}^* \times \frac{C}{1200}$
Amortissement « constant » en $k$	$A_k$	$S_k - I_k$
Capital restant en $k$ calculé sur la base de l'amortissement « constant »	$N_k$	$N_{k-1}^* - A_k$
Capital restant « réel » en $k$	$N_k^*$	$N_k \times (1 - SMM_k)$
Prépaiement en $k$ (en plus de l'amortissement « constant »)	$A_k^*$	$N_k \times SMM_k$
Amortissement total en $k$	$A_k^{**}$	$A_k + A_k^*$

TAB. 8.5 – Calcul du Tableau d'Amortissement avec Prépaiement

Le tableau d'amortissement consiste à calculer ces différentes quantités pour  $k$  allant de 1 à  $K$  (date de maturité du MBS) en prenant pour valeur initiale pour le capital restant « réel » en 0, le montant nominal  $N$  du MBS :

$$N_0^* = N \quad (\text{initialisation du calcul})$$

A titre d'exemple, reprenons l'exemple du paragraphe 8.1.1 et appliquons un taux de prépaiement constant  $CPR = 5\%$ <sup>14</sup>. Le tableau d'amortissement initial (avec amortissement) du prêt est donné dans le tableau 8.6 ci-dessous (les montants sont en USD).

13. Il s'agit encore d'un résultat classique de mathématique financière que le lecteur pourra retrouver facilement dans la littérature ou démontrer par lui-même par récurrence (exercice)

14.  $SMM = 100 \times \left[ 1 - \left( 1 - \frac{5}{100} \right)^{1/12} \right] = 0.4265\%$  est constant sur toute la durée de vie du MBS

k	$S_k$	$I_k$	$A_k$	$N_k$	$N_k^*$
0					100000
1	599.55	500	99.55	99900.45	99474.34
2	596.99	497.37	99.62	99374.72	98950.86
...					
119	362.06	253.77	108.29	50644.75	50428.73
120	360.51	252.14	108.37	50320.37	50105.73
...					
359	129.79	1.29	128.50	129.15	128.60
360	129.24	0.64	128.60	0	0

TAB. 8.6 – Tableau d'Amortissement avec Prépaiement (Exemple)

On note que le montant reçu chaque mois par un détenteur de part de MBS (colonne  $S_k$ ) n'est plus constant à prépaiement non nul comme annoncé précédemment.

### 8.2.2 Impact du Prépaiement sur le Taux Actuariel

Reprenons l'exemple du paragraphe 8.1.4 et regardons l'impact du prépaiement sur le taux actuariel d'un MBS.

On rappelle que le MBS a les caractéristiques suivantes :

- Taux de Coupon : 6%
- Maturité : 30A (360M)

Commençons par regarder l'impact du prépaiement sur l'amortissement total (amortissement initial plus prépaiement) dans les quatre cas suivants :

- CPR : 0% (pas de prépaiement)
- CPR : 1%
- CPR : 5%
- CPR : 10%

Le graphique 8.2 ci-dessous confirme l'intuition, plus le taux de prépaiement est élevé et plus le poids de l'amortissement est déplacé des maturités les plus lointaines vers les maturités les plus proches de sorte que l'amortissement total devient décroissant pour les taux de prépaiement élevés.

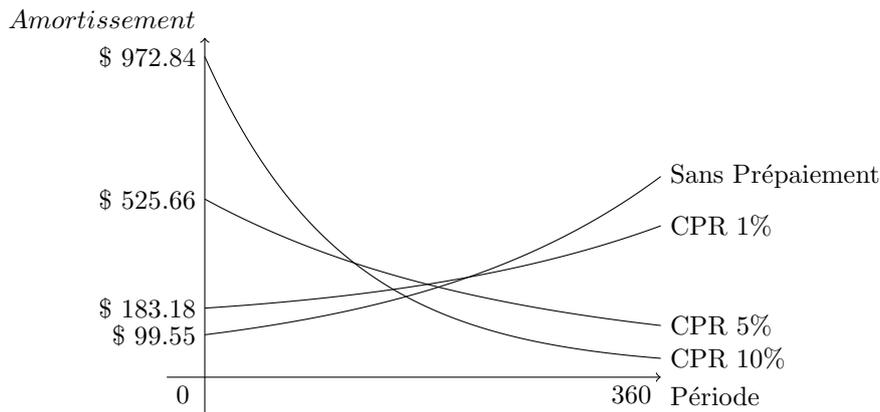


FIG. 8.2 – Impact du Taux de Prépaiement sur l'Amortissement

Pour comprendre l'effet du prépaiement sur le taux actuariel d'un MBS, il faut distinguer selon que celui-ci traite :

- Au pair (P = 100%)
- Premium (P = 105%)
- Discount (P = 95%)

Dans les trois cas, nous allons calculer les éléments d'analyse principaux suivants :

- Taux actuariel du MBS
- Duration du MBS
- Spread Zéro-Coupon MBS vs UST<sup>15</sup>

Les résultats des calculs sont regroupés dans le tableau 8.7 ci-dessous<sup>16</sup> :

	Au Pair (100%)	Discount (95%)	Premium (105%)
0%	6% - 10.78 - 167pb	6.49% - 10.47 - 218bp	5.55% - 11.07 - 119bp
1%	6% - 9.93 - 167pb	6.53% - 9.63 - 223bp	5.51% - 10.22 - 116bp
5%	6% - 7.40 - 167pb	6.71% - 7.11 - 242bp	5.35% - 7.67 - 98bp
10%	6% - 5.44 - 167pb	6.97% - 5.20 - 270bp	5.12% - 5.67 - 74bp

TAB. 8.7 – Impact du Prépaiement sur le « Pricing » d'un MBS

On note que si le MBS traite « au pair » alors les changements dans la vitesse de prépaiement n'affectent pas le calcul du taux actuariel :

- Si le prépaiement est plus rapide que prévu alors le supplément de principal retourné va parfaitement compenser la perte de revenus futurs
- Si le prépaiement est moins rapide que prévu alors le retard dans le prépaiement est parfaitement compensé par un supplément de revenus futurs

15. Les calculs ont été réalisés en prenant une courbe des taux UST zéro-coupon « flat » à 4.5% (taux en période mensuelle)

16. Les chiffres donnés dans les cellules de ce tableau sont (dans l'ordre) : taux actuariel - duration - spread zéro-coupon

Pour le dire autrement, lorsque le MBS traite « au pair », le supplément de principal retourné à l'investisseur peut être remplacé au taux du MBS dans le marché (et réciproquement).

Si le MBS traite « discount » (resp. « premium »), le taux actuariel augmente (resp. baisse) avec le taux de prépaiement car le temps pendant lequel le principal restant est rémunéré à un taux inférieur (resp. supérieur) au taux du marché est réduit.

Dans ces deux cas les effets « principal » et « coupon » ne se compensent plus :

- Si le prépaiement est plus rapide que prévu alors le supplément de principal retourné ne va pas compenser la perte, plus importante (resp. faible) en valeur actuelle, de revenus futurs
- Si le prépaiement est moins rapide que prévu alors le retard dans le prépaiement est compensé par un supplément, plus important (resp. faible) en valeur actuelle, de revenus futurs

On note par ailleurs que, dans les trois cas, la durée du MBS diminue avec la hausse du taux de prépaiement du simple fait que plus le taux de prépaiement est élevé et plus le poids des cashflows sur les échéances les plus proches est important. Notons enfin l'évolution des spreads zéro-coupon « MBS vs UST » est cohérente avec l'évolution du taux actuariel du MBS (on rappelle que la courbe des taux zéro-coupon utilisées dans les calcul est flat à 4.5%).

### 8.2.3 Prépaiement : Analyse et Modélisation

Nous avons vu au paragraphe 8.2.1 que l'âge d'un MBS a été le premier facteur explicatif identifié en matière de prépaiement. Cependant, la fin du régime de change fixe (Brettons Wood) au début des années 70 puis les politiques de déréglementation financière et de lutte contre l'inflation menées au cours des années 80, ont entraîné une forte hausse de la volatilité des taux d'intérêts et donc des opportunités de refinancement.

**Les taux d'intérêts sont devenus le facteur prépondérant.**

La première et principale cause du prépaiement est donc liée au refinancement. Dans une approche normative de l'exercice de l'option de prépaiement, un emprunteur devrait prépayer son emprunt hypothécaire dès que le capital restant à rembourser  $N_{PH}$  est inférieur à la valeur du prêt hypothécaire  $V_{PH}$  :

$$N_{PH} < V_{PH} \quad (\text{condition normative d'exercice de l'option})$$

Si en théorie, les emprunteurs devraient exercer l'option dès que cette condition est satisfaite, dans la pratique, l'observation montre que les emprunteurs (ménages) ne se comportent pas de cette façon. Le comportement des emprunteurs en matière de refinancement peut être expliqué par l'existence de coûts :

- Les coûts objectifs sont les frais de transaction supportés par les emprunteurs lors du refinancement. Ces frais sont appelés « points » car ils sont exprimés en points de taux qui viennent s'ajouter au (nouveau) taux d'intérêt négocié
- Les coûts subjectifs portent sur la collecte de l'information, le traitement de cette information et la prise de décision

L'impact principal des coûts subjectifs est l'existence d'un délai dans l'exercice de l'option de prépaiement.

Deux facteurs validés empiriquement viennent encore compliquer l'analyse prospective d'un pool de MBS en terme de refinancement :

1. L'effet « media » : L'activité de refinancement est influencée par les médias qui ont tendance à communiquer sur les baisses de taux lorsqu'elles ont un caractère « exceptionnel » (baisse importante dans un temps limité et/ou nouveau plus bas) de sorte que les emprunteurs vont plus prépayer dans ces situations
2. L'effet « burnout » : Les MBS qui ont beaucoup prépayé dans le passé ont tendance à répondre beaucoup plus lentement et faiblement à une nouvelle baisse des taux d'intérêt. Les emprunteurs qui ont la propension à prépayer la plus forte (ou les coûts de prépaiement les plus faibles) tendent à prépayer les premiers de sorte que les emprunteurs restants au sein du pool sont ceux qui ont la propension à prépayer la plus faible (ou les coûts de prépaiement les plus élevés)

**Le refinancement n'est cependant pas la seule cause du prépaiement.**

Outre le refinancement, d'autres facteurs peuvent motiver un remboursement anticipé et ceci sans lien direct avec le niveau des taux d'intérêt :

- Le déménagement : ce facteur vient en seconde position dans les causes de prépaiement après le refinancement. Il est saisonnier car très lié aux cycles scolaires et est moins important sur les prêts hypothécaires « assumable » car ces derniers peuvent être repris par les acheteurs en même temps que le bien immobilier contrairement aux prêts hypothécaires « due-on-sales »
- Le défaut de paiement : Il entraîne mécaniquement le prépaiement car les prêts hypothécaires sont contractuellement remboursables en totalité en cas de défaut. Le défaut de paiement entraîne généralement la saisie puis la vente du bien immobilier dont le produit permettra de recouvrir tout ou partie du capital restant à rembourser
- La destruction du bien immobilier (garantie) : Elle entraîne aussi mécaniquement le prépaiement car les prêts hypothécaires sont contractuellement remboursables en totalité en cas de destruction du bien immobilier (incendie, inondation, catastrophe naturelle)

Dans les deux derniers cas le risque de crédit est supporté par les agences hypothécaires et non par les investisseurs. Notons qu'il existe d'autres facteurs explicatifs du comportement des investisseurs en matière de prépaiement dont l'exposé sort du cadre de ce cours.

**C'est sur la base de ces observations que sont construit les modèles de prépaiement.**

Ces modèles sont généralement des modèles économétriques dont les équations reflètent les régularités comportementales que nous venons de décrire ainsi que d'autres facteurs non traités ici et dont les paramètres sont estimés sur la base de données passées. Ces modèles permettent de « prévoir » les taux de prépaiements futurs (CPR/SMM) à partir d'un certain nombre de variables observées ou simulées (dont les taux d'intérêts).

Notons que construire et faire évoluer un modèle de prépaiement est une activité très spécifique qui suppose des compétences mais surtout une culture en modélisation socio-économique que ne possèdent pas toujours les ingénieurs financiers quantitatifs<sup>17</sup>. Nous renvoyons le lecteur intéressé par ce vaste sujet sur la littérature<sup>18</sup> et aux sites des sociétés spécialisées<sup>19</sup>.

17. A titre d'exemple, la société RiskMetrics (pourtant l'un des tout premiers éditeurs de logiciels de calcul des risques et à ce titre disposant en interne de sa propre équipe de recherche quantitative et d'ingénierie financière) a fait appel à une société externe (Derivatives Solutions) pour lui fournir un modèle de prépaiement lors de l'intégration des MBS dans le logiciel RiskManager

18. Cf. Bykhovsky M. (2001), Overview of Recent Prepayment Behavior and Advances, in Fabozzi F.J. Editor. « The Handbooks of Mortgage-Backed Securities » McGrawHill

19. Voir par exemple le site de la société Andrew Davidson & Co

### 8.3 Pricing et Arbitrage

En première analyse, on peut considérer qu'être Long d'un MBS Pass-Through (émis par une Agence Hypothécaire US) est équivalent à être simultanément :

- Long d'un portefeuille d'obligations du Trésor US
- Short des options implicites de remboursement anticipé

Cette décomposition est à la base des techniques de calcul de l'Option Adjusted Spread (OAS) par simulation (Monte Carlo), du calcul des indicateurs de risques (coût des options, duration effective et convexité effective) et des techniques d'arbitrages associées (contre UST ou au sein même de l'univers des MBS).

#### 8.3.1 Calcul de l'Option Adjusted Spread d'un MBS

En toute généralité, le prix théorique d'un MBS peut être obtenu en calculant l'espérance mathématique des valeurs actuelles des cashflows. L'actualisation (pour un cashflow donné) est réalisée au taux zéro-coupon sans risque (correspondant à la maturité du cashflow) plus un spread appelé « Option-Adjusted Spread »<sup>20</sup> (OAS) représentatif des risques résiduels (crédit, liquidité) non pris en compte dans le calcul.

On peut donc écrire :

$$P_{MBS} = E \left\{ \sum_{j=1}^J \frac{\tilde{F}_j}{\prod_{k=0}^{j-1} (1 + \tilde{R}_k + OAS)} \right\}$$

Avec :

- $P_{MBS}$  : Prix de marché du MBS
- $\tilde{F}_j$  : Cashflow (aléatoire) du MBS en j
- $\tilde{R}_k$  : Taux forward (aléatoire) 1M départ date k
- $E(\cdot)$  : Espérance mathématique sous probabilité risque-neutre
- OAS : Option-adjusted spread

De façon générale, les trois approches les plus couramment utilisées pour la valorisation (ou le pricing) des instruments financiers sont :

1. Le calcul direct via une formule explicite (closed-form formula)
2. Le calcul par « backward valuation » de la date d'échéance de l'instrument financier à la date de valorisation à partir d'une simulation discrète arborescente du facteur de risque sous-jacent
3. Le calcul par simulation de Monte-Carlo

Dans le cas des MBS, il n'existe pas de formule explicite de valorisation et la valorisation par arbre n'est pas possible d'un point de vue théorique<sup>21</sup>.

Les procédures de valorisation par arbre ne sont pas applicables aux MBS Pass-Through du fait que **le prix d'un MBS ne dépend pas uniquement du niveau des taux d'intérêts au nœud de valorisation mais du chemin complet parcouru par les taux d'intérêts pour arriver jusqu'à ce nœud**. Cette propriété des MBS pass-through, connue

20. Littéralement, « écart de taux d'intérêt ajusté du coût des options de prépaiement » ou encore « écart de taux d'intérêt hors coût des options de prépaiement ».

21. Ni même en pratique puisque l'arbre binomial à construire pour pricer un MBS de 30A de maturité est de profondeur 360 (un nœud par mois) ce qui représente  $2^{360}$  ( $\sim 10^{11}$ ) chemins possibles dans l'arbre !

sous le nom de « path dependency », est due à deux effets spécifiques du comportement des emprunteurs en matière de prépaiement que nous avons mentionné précédemment, l'effet « media » et l'effet « burnout ». En d'autres termes, l'histoire des taux d'intérêts depuis la création du MBS pass-through détermine l'état du pool de créances hypothécaires au nœud de valorisation.

Nous allons donc utiliser la méthode dite de Monte Carlo pour le calcul (estimation) de l'espérance mathématique précédente.

**La méthode de Monte Carlo consiste à estimer l'espérance mathématique  $E(\cdot)$  par simulation numérique.** Elle permet en particulier d'intégrer le risque de prépaiement dans les calculs contrairement aux approches statiques étudiées jusqu'à maintenant dont les résultats sont contingents aux scénarios utilisés.

Concrètement, on se donne une valeur arbitraire  $K$  pour l'Option-adjusted spread (OAS) et on procède par étape<sup>22</sup>.

#### Etape 1 – Génération des Scénarios de Taux Forwards 1M UST

On utilise un modèle de taux discrétisé pour simuler des trajectoires possibles (réalisations) des taux 1M forwards pour les dates de départ  $j=0 \dots J-1$ . Dans le cas d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, on a<sup>23</sup> :

$$\tilde{Z}_{t+h} = \tilde{Z}_t + \alpha \times (\beta - R_t) \times h + \sigma \times \tilde{\varepsilon}_t \times \sqrt{h}$$

où  $\tilde{\varepsilon}_t$  suit une loi normale centrée-réduite.

Le modèle est calibré sur les prix actuels des obligations UST afin de déterminer  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\sigma$ .

Au final, on obtient  $I$  trajectoires possibles des taux forwards 1M pour les  $J$  dates forwards successives :

$$\{Z_{ij}\}_{i=1 \dots I, j=1 \dots J}$$

#### Etape 2 – Calcul des Taux de Prépaiement

On utilise un modèle de prépaiement permettant de calculer les taux de prépaiement aux dates  $j=1 \dots J$  pour une trajectoire donnée des taux forwards 1M.

On applique ce modèle aux  $I$  trajectoires possibles des taux forwards 1M précédemment calculées et on en déduit  $I$  scénarios de prépaiement ( $J$ -uplet de taux de prépaiement) :

$$\{\alpha_{ij}\}_{i=1 \dots I, j=1 \dots J}$$

#### Etape 3 – Calcul de la structure de Cashflows

Etant donné un scénario de prépaiement, on peut calculer le tableau d'amortissement complet correspondant à ce scénario :

- Amortissement (initial et prépaiement)
- Intérêts

On combine ensuite amortissement et intérêts pour obtenir la structure de cashflows du MBS pour ce scénario.

En appliquant ce même calcul aux  $I$  scénarios de prépaiement, on obtient  $I$  structures de cashflows :

22. Cf. Fabozzi F.J., Richard S.F., Horowitz D.S. (2001), Valuation of Mortgage-Backed Securities, in Fabozzi F.J. Editor. « The Handbooks of Mortgage-Backed Securities » McGrawHill (Ed.)

23. On utilise ici la méthode dite d'Euler-Maruyama de discrétisation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck dont l'erreur est de l'ordre du pas de discrétisation.

$$\{F_{ij}\}_{i=1\dots I, j=1\dots J}$$

#### Etape 4 – Calcul du Prix Moyen à Spread donné K

Le prix théorique  $P_{th}$  du MBS va être estimé par la moyenne des prix correspondants à chacune des I trajectoires simulées d'évolution des taux zéro-coupon sans risque (UST) :

$$P_{th}(K) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{F_{ij}}{\prod_{k=0}^{j-1} (1 + Z_{ij} + K)^{t_j}}$$

Le prix  $P_{th}(K)$  est calculé ici pour un niveau de spread arbitraire K.

#### Etape 5 – Calcul de l'OAS

On procède enfin par dichotomie pour calculer l'OAS.

L'OAS est la valeur  $K^*$  pour laquelle le prix théorique  $P_{th}(K^*)$  est égal au prix de marché  $P_{MBS}$ .

$$P_{th}(K^*) = P_{MBS} \quad \Longrightarrow \quad OAS = K^*$$

Il est important de noter que le résultat obtenu n'est pas la valeur exacte de  $E(.)$  (ou implicitement de l'OAS) mais une approximation de  $E(.)$  (ou implicitement de l'OAS) dont la précision dépend du nombre de scénarios utilisés.

Le choix du nombre I de scénarios à utiliser dans le calcul dépend de deux objectifs contradictoires :

1. La précision du calcul
2. Le temps de calcul

Il existe plusieurs techniques dites de réduction de variance permettant de réduire le nombre de scénarios et donc le temps de calcul à précision du calcul inchangée<sup>24</sup>. L'exposé de ces techniques sort du cadre dans ce cours, nous invitons le lecteur à se référer à la littérature tant théorique qu'appliquée sur la méthode de Monte Carlo et ses applications en finance<sup>25</sup>

Enfin, l'algorithme précédemment décrit permet de calculer l'Option-Adjusted Spread d'un MBS Pass-Through connaissant le prix de marché du MBS. Il est bien évidemment possible de calculer le prix théorique d'un MBS connaissant l'OAS du MBS ou plus exactement sur la base d'une estimation externe de l'OAS du MBS. Il suffit d'appliquer le même algorithme à l'exception de l'Etape 5.

### 8.3.2 Calcul des Indicateurs de Risques

La technique de calcul de l'OAS d'un MBS par Monte Carlo (simulation) permet d'intégrer le risque de prépaiement contrairement aux approches statiques dont les résultats dépendent directement des scénarios spécifiques utilisés. Néanmoins, le calcul du coût de l'option de prépaiement nécessite de se donner un spread zéro-coupon statique de référence.

24. A titre d'exemple, F. Fabozzi propose d'utiliser l'ACP pour réduire de façon drastique le nombre de scénarios. La méthode consiste à estimer le prix du MBS (à OAS donné) par la moyenne des prix sur les premiers facteurs issues de l'ACP pondérée par les poids des facteurs. Voir Fabozzi F. (1998), « Valuation of Fixed Income Securities and Derivatives », Wiley.

25. Voir par exemple l'article de Boyle P., Broadie M. et Glasserman P. (1997), « Monte Carlo methods for security pricing », Journal of Economics Dynamics and Control (n°21) qui constitue une référence technique sur ce sujet pour le pricing des options « américaines »

Par convention, le spread zéro-coupon statique est calculé sur la base des taux zéro-coupon forwards comme scénario de référence :

$$\text{Coût des Options} = \text{Spread Statique Forward} - \text{Option-Adjusted Spread}$$

Le coût des options correspond à la rémunération demandée par le marché pour assumer le risque de prépaiement sur un MBS donné.

L'algorithme de calcul de l'OAS peut être appliqué pour calculer numériquement la duration effective et la convexité effective. La technique consiste à appliquer une variation uniforme (shift) de  $\Delta X$  bp à la courbe des taux zéro-coupon UST initiale pour calculer le prix d'un MBS dans les deux cas à OAS constant :

- $\text{Prix}_{+\Delta X}$
- $\text{Prix}_{-\Delta X}$

On procède de la même façon qu'au paragraphe 8.3.1.

Ensuite, la duration effective et la convexité effective peuvent être calculées de façon numérique :

$$\text{Duration Effective} = \frac{-100}{\text{Prix}} \times \frac{\text{Prix}_{+\Delta X} - \text{Prix}_{-\Delta X}}{2 \times \Delta X}$$

et

$$\text{Convexité Effective} = \frac{100}{\text{Prix}} \times \frac{\text{Prix}_{+\Delta X} + \text{Prix}_{-\Delta X} - 2 \times \text{Prix}}{[\Delta X]^2}$$

La relation « prix-taux » pour un MBS Pass-Through est moins convexe que celle de son « équivalent » US Treasury. La duration d'un MBS tend à :

- Augmenter à la hausse des taux du fait d'une hausse des taux forwards et donc d'une baisse des taux de prépaiement anticipés
- Diminuer à la baisse des taux du fait d'une baisse des taux forwards et donc d'une hausse des taux de prépaiement anticipés

Dans les deux cas, un MBS sous-performe son synthétique zéro-coupon UST (même structure de cashflows forward statique que le MBS).

$$\left. \begin{array}{l} Z_{UST} \downarrow \Rightarrow CPR \uparrow \Rightarrow D_{MBS} \downarrow \\ Z_{UST} \uparrow \Rightarrow CPR \downarrow \Rightarrow D_{MBS} \uparrow \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta P_{MBS/UST} \downarrow$$

Dans les faits, un MBS Pass-Through est non seulement moins convexe que son équivalent zéro-coupon UST et peut même être « negative convex » dans certains cas. Néanmoins, la convexité d'un MBS Pass-Through dépend de la façon dont il traite par rapport au pair :

- Les MBS « proches du pair » ont la convexité négative et le coût des options de prépaiement les plus élevés. Les options de prépaiement implicites sont dites « à la monnaie »
- Les MBS « discount » ont une convexité négative et un coût des options de prépaiement moins élevé. Les options de prépaiement implicites sont dites « en dehors de la monnaie »

- Les MBS « premium » ont une convexité négative et un coût des options de prépaiement moins élevé aussi. Comme les options de prépaiement sont de type « américaine », elles ont donc déjà été exercées pour partie. Les options de prépaiement implicites sont dites « dans la monnaie »

A ce stade de l'étude analytique et quantitative des MBS, on est en mesure de calculer, pour un MBS donné, un certain nombre d'indicateurs que l'on peut classer dans différentes catégories :

- Marchés (données brutes)
  - Prix
  - Taux Actuariel
- Spread (MBS vs UST)
  - Spread Actuariel
  - Spread Zéro-Coupon
  - Spread Forward
- Prépaiement (Scénarios de prépaiement anticipés)
  - PSA « Actuel »
  - PSA « Forward »
- Options (décomposition du spread forward)
  - Option Adjusted Spread (OAS)
  - Coût des options
- Risques (sensibilités du MBS aux variations des taux d'intérêt)
  - Duration Effective
  - Convexité Effective

Le calcul de ses indicateurs pour tous les MBS émis par une agence donnée (ex: Ginnie Mae) est un préalable à toute prise de décision pour l'arbitragiste.

### 8.3.3 Techniques d'Arbitrages

Les techniques d'arbitrages envisageables consistent à se couvrir contre le risque de taux (actualisation) via le marché des UST (ce qui revient à être long/short des options de prépaiement) ou contre le risque de taux et le risque de prépaiement via des barbells (ce qui revient à long/short de butterfly au sein même de l'univers des MBS).

Le **premier** type de position consiste être long d'un MBS donné et short d'un US Treasury de duration proche de la duration du MBS. Plus précisément, le montant d'UST à shorter pour 1 dollar de nominal de MBS est donné par le hedge ratio suivant :

$$\text{Hedge Ratio} = \frac{\text{Duration Effective}_{MBS} \times \text{Prix}_{MBS}}{\text{Duration Effective}_{UST} \times \text{Prix}_{UST}}$$

La position résultante est couverte contre le risque de taux mais n'est pas couverte contre les risques suivants :

- Risque de prépaiement (principalement)

- Risque de crédit et de liquidité (dans une moindre mesure)

Le critère de décision sur lequel est fondé l'arbitrage est le spread statique forward dont la composante la plus importante tant en terme de montant que de volatilité est le coût des options de prépaiement.

Ce type de stratégie revient en fait à être short des options de prépaiement tout en étant couvert localement au premier ordre contre un déplacement parallèle de la courbe des taux zéro-coupon. Il s'agit d'une stratégie de « vente de volatilité » qui consiste à capter le spread entre le MBS et le US Treasury (portage). L'histoire de l'évolution des taux d'intérêts post-« Bretton Woods » a montré à quel point ce type de pari était risqué en raison de la grande imprévisibilité et volatilité des taux d'intérêts<sup>26</sup>.

Le **second** type de position consiste à faire du « relative value arbitrage » dans l'univers des MBS sur la base de l'OAS comme critère de décision. Ce type de position consiste à se mettre simultanément long d'un MBS sous-évalué et short<sup>27</sup> de deux MBS sur-évalués de maturités résiduelles « proches »<sup>28</sup>.

Pour un montant nominal  $N_0$  de  $MBS_0$ , calculons les montants nominaux  $N_1$  et  $N_2$  des MBS à shorter en couvrant simultanément la position globale en :

- Duration effective
- Convexité effective

Par construction, la position résultante sera bien couverte contre le risque de taux et le risque de prépaiement au premier et au deuxième ordre.

Notons par  $V$  la valeur du portefeuille, on a :

$$\Delta V = N_0 \times \Delta P_0 - N_1 \times \Delta P_1 - N_2 \times \Delta P_2$$

Appliquons la formule de Taylor au prix  $P_i$  du MBS n°i, on a :

$$\Delta P_i \simeq P_i \times D_i \times \Delta R_i + \frac{1}{2} \times P_i \times \Gamma_i \times [\Delta R_i]^2$$

Plaçons-nous dans le cadre d'un déplacement parallèle de la courbe des taux actuariels :

$$\Delta R_i \equiv \Delta R \quad i = 0,1,2$$

En remplaçant  $\Delta P_i$  ( $i=0,1,2$ ) par les formules de Taylor correspondantes et en factorisant les termes de premier et de deuxième ordre, on trouve les durations et convexités effectives du portefeuille :

$$\begin{cases} D_P &= N_0 \times P_0 \times D_0 - N_1 \times P_1 \times D_1 - N_2 \times P_2 \times D_2 \\ \Gamma_P &= N_0 \times P_0 \times \Gamma_0 - N_1 \times P_1 \times \Gamma_1 - N_2 \times P_2 \times \Gamma_2 \end{cases}$$

En appliquant nos deux contraintes de couverture :

$$D_P = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_P = 0$$

26. Dans cette histoire, le crack obligataire de l'année 1994 est resté tristement célèbre notamment pour les investisseurs sur le marché des MBS

27. Le marché des repo existe aussi pour les MBS Pass-Trough émis par les agences et permet la vente à découvert d'un MBS. Les remarques faites aux Chapitre 3 & 4 sur le risque repo s'appliquent aussi ici

28. Ce type de position n'est autre qu'une adaptation des « butterfly » à l'univers spécifique des MBS Pass-through dont la hiérarchie des risques est différente de l'univers des US Treasuries

On trouve les montants nominaux  $N_1$  et  $N_2$  des MBS à shorter pour un montant nominal  $N_0$  donné du MBS à acheter :

$$N_1 = N_0 \times \frac{P_0}{P_1} \times \frac{\Gamma_0 \times D_2 - \Gamma_2 \times D_0}{\Gamma_1 \times D_2 - \Gamma_2 \times D_1} \quad \text{et} \quad N_2 = N_0 \times \frac{P_0}{P_2} \times \frac{\Gamma_0 \times D_1 - \Gamma_1 \times D_0}{\Gamma_1 \times D_2 - \Gamma_2 \times D_1}$$

Le critère de décision (analyse « cheap-dear ») à partir duquel on classera les MBS de l'univers considéré est l'OAS (qui, rappelons-le, mesure la composante spécifique aux risques de crédit et de liquidité dans le spread forward d'un MBS donné) :

$$\begin{cases} OAS < \alpha_{Min} & \Rightarrow \text{Le MBS est cher} \\ OAS > \alpha_{Max} & \Rightarrow \text{Le MBS n'est pas cher} \end{cases}$$

$\alpha_{Min}$  et  $\alpha_{Max}$  sont les valeurs minimales et maximales pour l'OAS de l'univers des MBS considéré qui définissent la sur-évaluation ou la sous-évaluation d'un MBS. Ces valeurs sont en général estimées à partir d'analyses statistiques de l'évolution de l'OAS des MBS considérés.

Ce type d'arbitrage doit être réalisé non pas globalement au sein de l'univers des MBS mais au niveau des MBS de même type (proche du pair, discount, premium), du fait des différences de réponses, entre ces trois types de MBS, à une variation des taux d'intérêts. En pratique, on choisira des titres de maturités les plus proches possibles de façon à limiter l'impact des risques de taux (actualisation) et de prépaiement d'ordres supérieurs à 2.